الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي

الشعبة : العلوم التجريبية — المدة :03 ساعات و 30 د

اختبار في مادة الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأول

التمرين الأول (04,5 نقط)

1 – حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة :

$$z^2-(1+2i)z-1+i=0$$

نرمز للحلين بـ z_1 و z_2 حيث : $|z_1|<|z_2|$

بين أن $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2013}$ عدد حقيقي .

2 – المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.لتكن A ، B و C نقط المستوي التي لاحقاتها على الترتيب 1 ، z_1 ، z_2 .

ليكن Z العدد المركب حيث : $Z=\frac{z_2-1}{z_1-1}$

أ) انطلاقا من التعريف $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ و من الخاصية : $e^{i(\theta_1+\theta_2)}=e^{i\theta_1}\times e^{i\theta_2}$

برهن أن : $e^{-i\theta}=\frac{1}{e^{i\theta}}$ و أن $\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}}=e^{i(\theta_1-\theta_2)}$ حيث θ ، θ_1 و θ_2 أعداد حقيقية .

ب) أكتب Z على الشكل الأسي .

جـ) أكتب Z على الشكل المثلثي و استنتج أن النقطة C هي صورة النقطة B بتشابه مباشر مركزه A ، يطلب تعيين زاويته و نسبته.

التمرين الثاني (04 نقط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نعتبر المستوى (P) الذي معادلته :

$$x+2y-z+7=0$$

و النقط $A(2,0,1)$ و $B(3,2,0)$ و $C(-1,-2,2)$.

1 – تحقق أن النقط A ، B و C ليست على استقامية ، ثم بين أن المعادلة الديكارتية للمستوى (ABC) هي : $y+2z-2=0$

2 – أ – تحقق أن المستويين (P) و (ABC) متعامدان ، ثم عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) مستقيم تقاطع (P) و (ABC) .

ب – احسب المسافة بين النقطة A و المستقيم (Δ) .

3 – لتكن G مرجح الجملة $\{(A,1),(B,\alpha),(C,\beta)\}$ حيث α,β عددان حقيقيان يحققان $1+\alpha+\beta\neq 0$

عين α حتى تنتمي النقطة G إلى المستقيم (Δ).

التمرين الثالث (04 نقط)

1) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $I=[1,2]$ بالعبارة: $f(x)=\frac{x+2}{-x+4}$.

أ– بين أن الدالة f متزايدة تماما على I .

ب – بين أنه من اجل كل عدد حقيقي x من المجال I ، $f(x)$ ينتمي إلى I.

2) (u_n) هي المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يأتي:

$$u_0=\frac{3}{2} \quad \text{و} \quad u_{n+1}=f(u_n)$$

أ – برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، u_n ينتمي إلى I.

ب– أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ثم استنتج أنها متقاربة.

3) أ) برهن بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n=1+\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n+1}$

ب) عين النهاية : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

التمرين الرابع (07,5 نقط)

I – نعتبر الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $[-2,+\infty[$ كما يأتي :

$$f(x)=(ax+b)\,e^{-x}+1$$

حيث a و b عددان حقيقيان.

(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ وحدة الطول $1cm$.

عين قيمتي a و b بحيث تكون النقطة $A(-1,1)$ تنتمي إلى (C_f) و معامل توجيه المماس عند A يساوي $(-e)$.

II – نعتبر الدالة العددية g للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $[-2,+\infty[$ كما يلي :

$$g(x)=(-x-1)\,e^{-x}+1$$

و (C_g) تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق.

أ) بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=1$ و فسر هذه النتيجة بيانيا.(نذكر أن $\lim\limits_{u\to-\infty}ue^u=0$)

ب) ادرس تغيرات الدالة g ، ثم أنشئ جدول تغيراتها.

ج) بيّن أن المنحنى (C_g) يقبل نقطة انعطاف I يطلب تعيين احداثييها.

د) اكتب معادلة المماس للمنحنى (C_g) عند النقطة I .

هـ) ارسم (C_g).

و) H الدالة العددية المعرفة على $[-2,+\infty[$ كما يأتي: $H(x)=(\alpha x+\beta)e^{-x}$ حيث α و β عددان حقيقيان.

عيّن α و β بحيث تكون H دالة أصلية للدالة : $x\mapsto g(x)-1$

استنتج الدالة الأصلية للدالة g و التي تنعدم عند القيمة 0.

III) لتكن k الدالة المعرفة على المجال $[-2,+\infty[$ كما يأتي:

$$k(x)=g(x^2)$$

باستعمال مشتقة دالة مركبة ، عين اتجاه تغير الدالة k ثم شكل جدول تغيراتها .

الموضوع الثاني

التمرين الأول (03 نقط)

لكل سؤال من الأسئلة التالية جواب واحد صحيح فقط . عيّن الجواب الصحيح معللا اختيارك.

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقط:

$A(1,3,-1)$ ، $B(4,1,0)$ ، $C(-2,0,-2)$ ، $D(3,2,1)$.

و المستوى (P) الذي معادلته: $x-3z-4=0$.

1) المستوى (P) هو: ج1) (BCD) ، ج2) (ABC) ، ج3) (ABD).

2) شعاع ناظمي للمستوي (P) هو :

ج1) $\vec{n_1}(1,2,1)$ ، ج2) $\vec{n_2}(-2,0,6)$ ، ج3) $\vec{n_3}(2,0,-1)$

3) المسافة بين النقطة D و المستوى (P) هي :

ج1) $\frac{\sqrt{10}}{5}$ ، ج2) $\frac{\sqrt{10}}{10}$ ، ج3) $\frac{2\sqrt{10}}{5}$

التمرين الثاني (05 نقط)

(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي :

$u_0=\frac{5}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+2$

1) أ – ارسم في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ ، المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$ و المنحنى (d) الممثل للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\frac{2}{3}x+2$

ب – باستعمال الرسم السابق، مثل على حامل محور الفواصل و بدون حساب الحدود : u_3,u_2,u_1,u_0 و u_4

جـ – ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها.

2) أ– برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n\leq 6$.

ب – تحقق أن (u_n) متزايدة .

جـ – هل (u_n) متقاربة ؟ برّر إجابتك .

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=u_n-6$.

أ – اثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

ب – أكتب عبارة u_n بدلالة n ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

التمرين الثالث (05 نقط)

1 . حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية:

$$z^2+iz-2-6i=0$$

2. نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقطتين ، A و B اللتين لاحقتاهما z_A و z_B على الترتيب حيث :

$z_A=2+i$ و $z_B=-2-2i$

عين z_ω لاحقة النقطة ω مركز الدائرة (Γ) ذات القطر $[AB]$.

3.لتكن C النقطة ذات اللاحقة z_c حيث $z_c=\frac{4-i}{1+i}$.

اكتب z_c على الشكل الجبري ثم أثبت أن النقطة C تنتمي إلى الدائرة (Γ).

4.أ – برهن أن عبارة التشابه المباشر S الذي مركزه $M_0(z_0)$ و نسبته k $(k>0)$ و زاويته θ و الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ هي : $z'-z_0=ke^{i\theta}(z-z_0)$

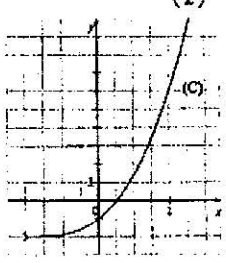
ب – تطبيق : عين الطبيعة و العناصر المميزة للتحويل S المعرف بـ : $z'+\frac{1}{2}i=2e^{i\frac{\pi}{3}}\left(z+\frac{1}{2}i\right)$.

التمرين الرابع (07 نقط)

المنحنى (C) المقابل هو التمثيل البياني للدالة العددية g المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ كما يأتي :

$$g(x)=x^3+3x^2+3x-1$$

1- أ) – بقراءة بيانية شكل جدول تغيرات الدالة g و حدد $g(0)$ وإشارة $g\left(\frac{1}{2}\right)$.



ب) علل وجود عدد حقيقي α من المجال $\left]0,\frac{1}{2}\right[$ يحقق : $g(\alpha)=0$

ج) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]-1;+\infty[$.

2 – f هي الدالة العددية المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بما يأتي :

$$f(x)=\frac{x^3+3x^2+3x+2}{(x+1)^2}$$

و ليكن (Γ) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$.

أ) تحقق انه من اجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1;+\infty[$: $f'(x)=\frac{g(x)}{(x+1)^3}$

حيث f' هي الدالة المشتقة للدالة f.

ب) عيّن دون حساب $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ و فسّر النتيجة بيانيا.

ج) احسب : $\lim\limits_{x\to-1^{>}}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)]$ و فسّر النتيجتين بيانيا.

د) شكل جدول تغيرات الدالة f .

3 – نأخذ $\alpha=0,26$

أ) عين مدور $f(\alpha)$ إلى 10^{-2} .

ب) ارسم المنحنى (Γ)

4- أ) أكتب $f(x)$ على الشكل : $f(x)=x+a+\frac{b}{(x+1)^2}$ ، حيث a و b عددان حقيقيان.

ب) عين F الدالة الأصلية للدالة f على المجال $]-1;+\infty[$ والتي تحقق : $F(1)=2$

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

امتحان شهادة بكالوريا التعليم الثانوي

الشعبة : تقني رياضي

اختبار في مادة : الرياضيات — المدة : 04 ساعات ونصف

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول : (20 نقطة)

التمرين الأوّل: (04 نقاط)

1) أ) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2-2z+2=0$ حيث z هو المجهول.

ب) استنتج في $\mathbb{C}$ حلول المعادلة ذات المجهول z: $(\overline{z}+3)^2-2(\overline{z}+3)+2=0$

حيث $\overline{z}$ مرافق z.

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$

النقط A، B، M لواحقها $(1-i)$، $(1+i)$، z على الترتيب.

أ- عين (Γ) مجموعة النقط M من المستوي حيث: $z=1-i+ke^{i\frac{5\pi}{4}}$ عندما k يمسح $\mathbb{R}^+$.

ب- عين (E) مجموعة النقط M من المستوي حيث: $|z-1+i|=|z-1-i|$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

1. أ) عيّن الأعداد الطبيعية التي مربع كل منها يقسّم 2009

u_0 و a عددان طبيعيان غير معدومين، (u_n) متتالية هندسية أساسها a وحدها الأوّل u_0 بحيث $u_1^2+u_2+35a^2=2009$.

ب)احسب a و u_0.

2. نضع $a=7$ و $u_0=2$، احسب u_n بدلالة n

3. نضع $S_n=u_0+u_1+...+u_n$

أ) عبّر عن S_n بدلالة n

ب) عيّن العدد الطبيعي n حتى يكون $S_n=800$

التمرين الثالث: (07 نقاط)

نعتبر الدّالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=x+\frac{2}{e^x+1}$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1. احسب $f(x)+f(-x)$ من أجل كل عدد حقيقي x، ثمّ استنتج أنّ النقطة $\omega(0;1)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f)

2. ادرس تغيّرات الدّالة f على المجال $[0;+\infty[$ ثمّ استنتج جدول تغيّراتها على $\mathbb{R}$.

3. بيّن أنّ المستقيم ذي المعادلة $y=x$ هو مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

احسب $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(x+2)]$، استنتج المستقيم المقارب للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.

4. بيّن أنّ للمعادلة $f(x)=0$ حلا وحيدا α بحيث $-1,7<\alpha<-1,6$

5. ارسم (C_f) من أجل $x\in\mathbb{R}$

6. بيّن أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f(x)=x+\frac{2e^{-x}}{e^{-x}+1}$

7. احسب $\mathcal{A}(\alpha)$ مساحة الحيز من المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات ذات المعادلات :

$x=\alpha$ و $x=0$ و $y=x+2$

بيّن أنّ $\mathcal{A}(\alpha)=2\ln(-\alpha)$ ثمّ استنتج حصرا للعدد $\mathcal{A}(\alpha)$

التمرين الرّابع: (05 نقاط)

الفضاء مزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

(Δ) مستقيم من الفضاء تمثيله الوسيطي معطى بالجملة التالية: $\begin{cases}x=2t-1\\y=-t+2\\z=t+1\end{cases}$; $t\in\mathbb{R}$

P مستو معرّف بالمعادلة $x+3y+z+1=0$

عيّن في كل حالة من الحالات التالية الاقتراح أو الاقتراحات الصحيحة مع التعليل

1	A_1: النقطة $A(1,1,2)$ تنتمي إلى (Δ)	B_1: النقطة $B(-1,0,2)$ تنتمي إلى (Δ)	C_1: النقطة $C\left(0,\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$ تنتمي إلى (Δ)
2	A_2: $\vec{u}\left(-1,\frac{1}{2},\frac{-1}{2}\right)$ شعاع توجيه (Δ)	B_2: $\vec{u'}(1,3,1)$ شعاع توجيه (Δ)	C_2: $\vec{u''}(3,1,0)$ شعاع توجيه (Δ)
3	A_3: (Δ) محتوى في P	B_3: (Δ) يقطع P	C_3: (Δ) يوازي P
4	A_4: المستوي Q_1 ذو المعادلة $x+3y+z-3=0$ يعامد P	B_4: المستوي Q_2 ذو المعادلة $2x-y+\frac{1}{2}z=0$ يعامد P	C_4: المستوي Q_3 ذو المعادلة $x-y+2z+5=0$ يعامد P
5	A_5: المسافة بين النقطة $D(1,1,1)$ والمستوي P هي $\frac{6}{\sqrt{11}}$	B_5: المسافة بين النقطة $O(0,0,0)$ والمستوي P هي $\frac{\sqrt{11}}{11}$	C_5: المسافة بين النقطة $E(1,3,0)$ والمستوي P هي $\sqrt{11}$

الموضوع الثاني : (20 نقطة)

التمرين الأوّل: (04 نقاط)

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2-6z+18=0$ .....(1)

2. ليكن العدد المركب z_1 حيث $z_1=3-3i$

(i هو العدد المركب الذي طويلته 1 و $\frac{\pi}{2}$ عمدة له)

أ) اكتب z_1 على الشكل الأسي.

ب) احسب طويلة العدد z_3 وعمدة له حيث $z_1\times z_3=6(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12})$

استنتج قيمتي $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$.

3. نعتبر في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقط A، B، C ذات اللاحقات $3+3i$، $3-3i$، $\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2}$ على الترتيب

أ) عيّن قيم العدد الحقيقي α حتى تقبل الجملة المثقلة $\{(A;1),(B;-1),(C;\alpha)\}$ مرجحا نرمز له بالرمز G_α

ب) عيّن مجموعة النقط G_α لمّا يتغيّر α في $\mathbb{R}^*$.

التمرين الثاني: (05 نقاط)

1. نعتبر في الفضاء المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقط $A(1,1,2)$، $B(-1,0,-2)$، $C(-1,0,-6)$

بيّن أنّ مجموعة النقط $M(x,y,z)$ التي تحقق $MA^2-MB^2=1$ هي مستو عمودي على المستقيم (AB) نرمز له بالرمز P يطلب تعيين معادلة له.

2. لتكن S مجموعة النقط $M(x,y,z)$ التي تحقق المعادلة $x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z-6=0$

برهن أنّ S هي سطح كرة يطلب تعيين مركزها Ω ونصف قطرها R

3. G نقطة من الفضاء معرّفة بالعلاقة: $\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

أ) عيّن إحداثيات G ثمّ تأكد أنّها تنتمي إلى S.

ب) اكتب معادلة المستوي Q الذي يمس سطح الكرة S في النقطة G.

التمرين الثالث: (07 نقاط)

1. g دالة معرّفة على $[1;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=2x+\ln x$

أ) احسب نهاية الدالة g عندما يؤول x إلى $+\infty$.

ب) ادرس اتجاه تغيّر الدّالة g.

ج) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[1;+\infty[$ فإن $g(x)\neq 0$.

2. لتكن f دالة معرّفة على $[1;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\frac{6\ln x}{2x+\ln x}$

أ) بيّن أنّه يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل $f(x)=\frac{6\frac{\ln x}{x}}{2+\frac{\ln x}{x}}$ من أجل $x\in[1,+\infty[$.

ب) احسب $\lim_{x\to+\infty}f(x)$، ماذا تستنتج؟

ج) ادرس اتجاه تغيّر الدّالة f

د) شكّل جدول تغيّرات f، ما هي قيم العدد الحقيقي k بحيث تقبل المعادلة $f(x)=k$ حلين متمايزين؟

هـ) جد معادلة للمماس (Δ_1) للمنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 1 حيث (C_f) يرمز إلى التمثيل البياني للدالة f في المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

3. نعتبر الدّالة h المعرّفة على $[1;+\infty[$ بالعبارة: $h(x)=f(e^x)$ و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ) شكّل جدول تغيّرات الدّالة h.

ب) جد معادلة للمماس (Δ_2) للمنحنى (C_h) عند النقطة التي فاصلتها 1.

ج) ارسم كلا من (Δ_1)، (Δ_2)، (C_f) و (C_h) في نفس المعلم السابق.

التمرين الرّابع: (04 نقاط)

1. حل المعادلة التفاضلية: $y'=(\ln 2)y$

2. نسمي f الحل الخاص لهذه المعادلة الذي يحقق $f(0)=1$، عيّن عبارة $f(x)$

3. n عدد طبيعي.

أ)ادرس بواقي القسمة الإقليدية على 7 للعدد 2^n.

ب) استنتج باقي القسمة الإقليدية على 7 للعدد $f(2009)-4$.

4. أ) احسب، بدلالة n، المجموع S_n حيث $S_n=f(0)+f(1)+...+f(n)$.

ب) عيّن قيم العدد الطبيعي n التي يقبل من أجلها S_n القسمة على 7.