حل الموضوع الثاني في الرياضيات

التمرين الأول:

1. كتابة تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D_3):

كتابة x و y بدلالة z (z وسيط).

لدينا: $\begin{cases} x-y-2z=0 \\ 2x+3y+5=5 \end{cases}$ ومنه: $\begin{cases} x-y=2z \\ 2x+3y=0 \end{cases}$ وعليه $\begin{cases} 3x-3y=6z \\ 2x+3y=0 \end{cases}$

بجمع المعادلتين نجد: $5x=6z$ ومنه: $x=\frac{6}{5}z$

وبالتعويض في المعادلة $\begin{cases} x-y=2z \\ 2x+3y=0 \end{cases}$ نجد: $y=x-2z=\frac{6}{5}z-2z=-\frac{4}{5}z$

إذن التمثيل الوسيطي للمستقيم (D_3) هو:

$$(D_3): \begin{cases} x=\frac{5}{6}\lambda \\ y=-\frac{4}{5}\lambda \quad ; \quad \lambda \in R \\ z=\lambda \end{cases}$$

2. بيان أن المستقيمين (D_1) و (D_2) متطابقان:

* لدينا شعاع توجيه المستقيم (D_1) هو $\overrightarrow{n_1}(2,1,-1)$ وشعاع توجيه المستقيم (D_2) هو $\overrightarrow{n_2}(-4,-2,2)$

نلاحظ أن: $\overrightarrow{n_2}=-2\overrightarrow{n_1}$ وعليه فإن المستقيمين (D_1) و (D_2) متوازيان.

* من جهة أخرى النقطة $A(1,-2,1)$ تنتمي إلى (D_1) من أجل $t=0$ وتنتمي إلى (D_2) من أجل $t'=1$ وبالتالي المستقيمين (D_1) و (D_2) متوازيان ولهما نقطة مشتركة وبالتالي فإن المستقيمين (D_1) و (D_2) متطابقان.

3. بيان أن المستقيمين (D_1) و (D_3) ليس من نفس المستوي:

* لدينا شعاع توجيه المستقيم (D_1) هو $\overrightarrow{n_1}(2,1,-1)$ وشعاع توجيه المستقيم (D_3) هو $\overrightarrow{n_3}\left(\frac{6}{5},-\frac{4}{5},1\right)$

نلاحظ أن: $\overrightarrow{n_3}\neq.\overrightarrow{n_1}$ وعليه فإن المستقيمين (D_1) و (D_3) غير متوازيان أي أنهما إما متقاطعان أو ليس من نفس المستوي.

* بالتعويض في المعادلة (1) نجد: $-4=+6-$ أي أن الجملة تقبل حلا وحيدا هو $\alpha=-2$ و $t=-1$.

وبالتالي فإن المستقيمين (D_1) و (Δ) يتقاطعان في نقطة واحدة هي:

من أجل $\alpha=-2$: $\begin{cases} x=3(-2)+5=-1 \\ y=-2-1=-3 \\ z=-2+4=2 \end{cases}$

* إذن: $(D_1)\cap(\Delta)=\{(-1,-3,2)\}$

التمرين الثاني:

1. التعبير عن z' بدلالة z:

$S(M)=M'$ يعني $z'=az+b$

لدينا $a=\sqrt{2}\left(\cos\frac{-}{4}+i\sin\frac{-\pi}{4}\right)=1-i$

وبما أن A ذات اللاحقة $2+i$ مركز فإن $s(A)=A$ ومنه: $z_A=az_A+b$

أي: $\begin{matrix} b=z_A(1+i) \\ b=-1+2i \end{matrix}$ ومنه: $z'=(1-i)z-1+2i$

2. التعبير عن الإحداثيتين x' و y' للنقطة M' بدلالة الإحداثيتين x و y للنقطة M:

* لدينا:

$$x'+iy'=(1-i)(x+iy)-1+2i$$
$$x'+iy'=x+iy-xi+y-1+2i$$
$$x'+iy'=(x-1-y)+i(y-x+2)$$

وبالتالي: بالمطابقة نجد: $\begin{cases} x'=x+y-1 \\ '=y-x+2 \end{cases}$

3. كتابة معادلة ديكارتية للمستقيم (D') المحول بالتشابه S للمستقيم (D) ذي المعادلة $y=2x+1$:

* لدينا: $\begin{cases} x=\frac{1}{2}(x'-y'+1) \\ y=\frac{1}{2}(x'+y'+1) \end{cases}$ وبتعويض قيمة x، y في معادلة المستقيم نجد:

$$(\Delta'): y'=\frac{1}{3}x'+1$$

4. حساب الإحداثيتين x_G، y_G بدلالة x و y للنقطة G:

* لدينا: $1+2+3\neq 0$ إذن G موجود ووحيد ويحقق $\overrightarrow{}+2\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GM'}=0$

$$\begin{cases} \frac{6}{5}\lambda - 2t = 1 \dots (1) \\ -\frac{4}{5}\lambda - t = -2 \dots (2) \\ \lambda + t = 1 \dots (3) \end{cases} \quad \text{ومنه:} \quad \begin{cases} \frac{6}{5}\lambda = 1 + 2t \\ -\frac{4}{5}\lambda = -2 + t \; ; t \in R \\ \lambda = 1 - t \end{cases}$$

* من (2) و(3) نجد: $-\frac{4}{5}\lambda + \lambda = -1$ ومنه $\frac{1}{5}\lambda = -1$.

وعليه فإن: $\lambda = -5$ ومنه: $t = 6$.

* بالتعويض في المعادلة (1) نجد:

$$\frac{6}{5}(-5) - 2 \times 6 = -6 - 12 = -18 \neq 1$$

بما أن الجملة ليست لها حل وبالتالي فإن المستقيمين (D_1) و (D_3) غير مقاطعان يعني أنهما ليس من نفس المستوي.

4. بيان أن المستقيمين (D_1) و (Δ) يتقاطعان في نقطة واحدة يطلب تعيينها:

* التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ):

بما أن المستقيم (Δ) يمر من النقطة $A(5, -1, 4)$ وشعاع توجيهه $\vec{u}(3,1,1)$، ولتكن $M(x, y, z)$ نقطة من (Δ) معناه $\overrightarrow{AM} = \alpha\vec{u}$

لدينا: $\overrightarrow{AM}(x-5 \,; y+1 \,; z-4)$

$$\text{وعليه} \begin{cases} x - 5 = 3\alpha \\ y + 1 = \alpha \; ; \; \alpha \in R \\ z - 4 = \alpha \end{cases} \quad \text{أي:} \quad \begin{cases} x = 3\alpha + 5 \\ y = \alpha - 1 \; ; \; \alpha \in R \\ z = \alpha + 4 \end{cases}$$

* إثبات أن المستقيمين (D_1) و (Δ) يتقاطعان:

لدينا شعاع توجيه المستقيم (D_1) هو $\overrightarrow{n_1}(2, 1, -1)$ وشعاع توجيه المستقيم (Δ) هو $\vec{u}(3, 1, 1)$.

نلاحظ أن $\overrightarrow{} \neq K.\overrightarrow{n_1}$ وعليه فإن (D_1) و (D_2) غير متوازيان، وبالتالي عما إما متقاطعان أو ليس من نفس المستوي.

* دراسة تقاطع المستقيمين (D_1) و (Δ):

$$\begin{cases} 3\alpha - 2t = -4 \dots (1) \\ \alpha - t = -1 \dots (2) \\ \alpha + t = 3 \dots (3) \end{cases} \quad \text{ومنه:} \quad \begin{cases} 5 + 3\alpha = 1 + 2t \\ -1 + \alpha = -2 + t \; ; t \in R \\ 4 + \alpha = 1 - t \end{cases}$$

* من (2) و(3) نجد: $2\alpha = -4$ ومنه $\alpha = -2$

وعليه فإن: $-2 + t = -3$ ومنه: $t = -1$.

و: $y_G = \frac{\dots}{6} = \frac{\dots}{6} = \frac{\dots}{6}$

التمرين الثالث:

I. لدينا g الدالة العددية المعرفة على المجال $]1, +\infty[$ بـ:

$$g(x) = x2 - 2x - 4\, ln(x-1)$$

1) بالقراءة البيانية عدد حلول المعادلة $g(x) = 0$ هو 2.

2) حساب $g(2)$:

$$g(2) = 2^2 - 2 \times 2 - 4\, ln\,(2-1) = 4 - 4 - 0 = 0$$

x	1	2	α	$+\infty$
$g(x)$	+	−	+	

II. لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $]1, +\infty[$ بـ:

$$f(x) = x - 3 + 4\frac{\ln(x-1)}{x-1} + \frac{5}{x-1}$$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد المتجانس $(0, \vec{i}, \vec{j})$

1. أ) إيجاد نهاية الدالة f عند $+\infty$:

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[x - 3 + 4\frac{\ln(x-1)}{x-1} + \frac{5}{x-1}\right] = +\infty$ لأن: $\lim_{x\to+\infty}\frac{5}{x-1} = 0$

وبما أن: $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0$ فإن: $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x-1)}{x-1} = 0$

$\lim_{x\to+\infty}(x-3) = +\infty$

ب) حساب $\lim_{\substack{> \\ x\to1}} f(x)$:

$$\lim_{\substack{> \\ x\to1}} f(x) = \lim_{\substack{> \\ x\to1}}\left[x - 3 + 4\frac{\ln(x-1)}{x-1} + \frac{5}{x-1}\right] = -\infty$$

لأن: $\lim_{\substack{> \\ x\to1}}\left[\frac{4\ln(x-1)+5}{x-1}\right] = -\infty$

التفسير الهندسي:

$x = 1$ مستقيم مقارب عمودي باتجاه $-\infty$.

ج) إثبات أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x - 3$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (Cf) بجوار $+\infty$:

بما أن: $\lim_{x\to+\infty}(x) = +\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}[f(x) - (x-3)] = \lim_{x\to+\infty}\left[4\frac{\ln(x-1)}{x-1} + \frac{5}{x-1}\right] = 0$

لأن: $\lim_{x\to+\infty}\frac{5}{x-1} = 0$ و: $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x-1)}{x-1} = 0$ فإن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x - 3$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

د) إيجاد فاصلة نقطة تقاطع (Δ) مع (C_f):

فاصلة نقطة تقاطع (Δ) مع (C_f) هي حل المعادلة $f(x)=y$:

$f(x)=x-3$

$x-3+4\frac{\ln(x-1)}{x-1}+\frac{5}{x-1}=x-3$

$\frac{4\ln(x-1)+5}{x-1}=0$

$4\ln(x-1)=-5$

$\ln(x-1)=-\frac{5}{4}$

يعني أن $x-1=e^{-\frac{4}{5}}$ وعليه: $x=e^{-\frac{4}{5}}+1$

هـ) دراسة الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ).

* لدينا:

$f(x)-y=x-3+4\frac{\ln(x-1)}{x-1}+\frac{5}{x-1}-x+3$

$f(x)-x=\frac{4\ln(x-1)+5}{x-1}$

بما أن $x-1>0$ وعليه فإن إشارة $f(x)-y$ من إشارة البسط عليه:

لما $x\in\left]1;1+e^{-\frac{4}{5}}\right[$: $f(x)-y<0$ وعليه المنحنى (C_f) يقع تحت المستقيم (Δ).

لما $x\in\left]1+e^{-\frac{4}{5}};+\infty\right[$: $f(x)-y>0$ وعليه المنحنى (C_f) يقع فوق المستقيم (Δ).

2. أ) إثبات أنه من أجل كل عدد x من المجال $]1;+\infty[$:

* لدينا: $f'(x)=\frac{g(x)}{(x-1)^2}$ ، (f' هي الدالة المشتقة للدالة f).

لدينا f دالة قابلة للاشتقاق على المجال $]1;+\infty[$ ودالتها المشتقة:

$f'(x)=1+4\frac{1-\ln(x-1)}{(x-1)^2}-\frac{5}{(x-1)^2}$

$f'(x)=\frac{(x-1)^2+4-4\ln(x-1)-5}{(x-1)^2}$

$f'(x)=\frac{x^2-2x-4\ln(x-1)}{(x-1)^2}$

$f'(x)=\frac{g(x)}{(x-1)^2}$

ب) استنتاج اتجاه تغير الدالة f وتشكيل جدول تغيراتها:

بما أن $f'(x)=\frac{g(x)}{(x-1)^2}$ فإن إشارة الدالة المشتقة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ لأنه من أجل كل عدد حقيقي $(x-1)^2$ مما سبق لدينا:

$[\ln(x-1)^2]'=2\left(\frac{1}{x-1}\right)\ln(x-1)=\frac{2\ln(x-1)}{x-1}$

وعليه الدالة الأصلية للدالة f على المجال $]1;+\infty[$ هي:

$x\to\frac{1}{2}x^2-3x+2[\ln(x-1)^2]+5\ln(x-1)$

ب) حساب $\int_2^5 f(x)\,dx$:

$\int_2^5 f(x)\,dx=\left[\frac{1}{2}x^2-3x+2[\ln(x-1)^2]+5\ln(x-1)\right]_2^5$

التمرين الرابع:

1. تعيين قيمة U_0 حتى تكون المتتالية (U_n) ثابتة:

حتى تكون المتتالية (U_n) ثابتة يجب أن يكون من أجل كل عدد طبيعي n:

$U_{n+1}=U_n=U_{n-1}=\dots\dots=U_1=U_0$

وعليه فإن:

$U_{n+1}=\frac{1}{2}U_n-1$

$U_0=\frac{1}{2}U_0-1$

$U_0-\frac{1}{2}U_n=1$

$\frac{1}{2}U_0=1$

$U_0=2$

2. نفرض $U_0=6$

أ) حساب U_1 و U_2:

• من أجل $n=0$: $U_1=\frac{1}{2}U_0-1=\frac{1}{2}(6)-1=2$

• من أجل $n=1$: $U_2=\frac{1}{2}U_1-1=\frac{1}{2}(2)-1=0$

ب) تعيين قيمة العدد α حتى تكون المتتالية (V_n) هندسية:

حتى تكون المتتالية (V_n) هندسية يجب من أجل كل عدد طبيعي n يوجد عدد حقيقي r حيث:

$V_{n+1}=V_n\times r$.

* لدينا:

$V_{n+1}=\alpha U_{n+1}-2$

$=\alpha\left(\frac{1}{2}U_n-1\right)-2$

$f'(x)$	+	-	+

وبالتالي: الدالة f متزايدة تماما على كل من $]1\,;2[$ و $]\alpha\,;+\infty[$

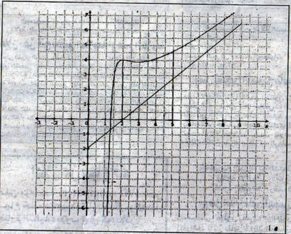
الدالة f متناقصة تماما على المجال $]2\,;\alpha[$.

* جدول تغيرات f:

لدينا: $f(2)=2-3+4\frac{\ln(2-1)}{2-1}+\frac{5}{2-1}=4$

x	1		2		α		$+\infty$
$f'(x)$		+		-		+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	4	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

3. رسم المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f):



4. أ) تعيين مشتقة الدالة: $x\to[\ln(x-1)^2]$ ، ثم استنتاج دالة أصلية للدالة f على المجال $]1\,;+\infty[$:

من جهة أخرى:

بالمطابقة نجد أن: $r=\frac{1}{2}$ و $-\alpha-2=-2r$

* بالتعويض نجد: $-\alpha-2=-2\frac{1}{2}$

$-\alpha=2-1$

$-\alpha=1$

$\alpha=-1$

وعليه تكون المتتالية (V_n) هندسية أساسها $r=\frac{1}{2}$ في حالة $\alpha=-1$

ج) نضع $\alpha=-1$:

* التعبير بدلالة n عن كل من V_n و U_n:

من أجل $\alpha=-1$ لدينا: $V_n=-U_n-2$

(V_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الأول $V_0=-U_0-2$ أي: $V_0=-8$.

وعليه فإن:

$V_n=V_0\times r^n$

$V_n=-8\times 2^n$

$V_n=-2^{n+3}$

* من جهة أخرى لدينا: $V_n=U_n-2$

أي: $U_n=-V_n-2$

وعليه فإن: $U_n=2^{n+3}-2$

* حساب بدلالة n المجموع S_n:

$S_n=U_0+U_1+U_2+\ldots+U_n$

$S_n=(-V_0-2)+(-V_1-2)+(-V_2-2)+\ldots+(-V_n-2)$

$S_n=-(V_0+V_1+V_2+\ldots+V_2)-2(n+1)$

$S_n=-V_0\frac{1-r^{n+1}}{1-r}-2(n+1)$

$S_n=8\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}-2(n+1)$

$S_n=16\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]2(n+1)$