الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

مديرية التربية لولاية تيارت ثانوية:الشهيدة جبار عائشة -تيارت-

المستوى : الثالثة علوم تجريبية السنة الدراسية: 2023 / 2024

اختبار الفصل الثاني في مادّة الرياضيات المدة :03 ساو 30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأوّل :

التمرين الأول: (04 نقاط)

(u_n) متتالية عددية معرفة بحدها الأول $u_0 = \frac{3}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{2u_n}{2u_n + 5}$

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $u_n > 0$.

2) أ/ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$.

ب/استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) هل هي متقاربة ؟ -برر- .

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \frac{4u_n}{2u_n + 3}$.

أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{5}$ ثم اكتب عبارة (v_n) بدلالة n

ب- استنتج عبارة (U_n) بدلالة n ثم احسب $\lim_{n \to +\infty} u_n$.

4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = \frac{3}{u_0} + \frac{3}{u_1} + \frac{3}{u_2} + ... + \frac{3}{u_n}$

احسب بدلالة n المجموع S_n .

التمرين الثاني: (04 نقاط)

صندوق به 7 كرات متماثلة ولانفرق بينها باللمس منها 3 مرقمة بـ:0 ، 0 ، 0 وكرتان مرقمتان بـ: 1 ، 1

وكرتان مرقمتان بـ: 2 ، 2 نسحب من الصندوق 3 كرات على التوالي وبارجاع الكرة المسحوبة الى الصندوق

1) احسب احتمال الحوادث التالية :

الحدث A : الكرات الثلاث تحمل نفس الرقم ، الحدث B : الكرات الثلاث تحمل ارقاما مختلفة مثنى مثنى

الحدث C : الحصول على ثلاث كرات جداء أرقامها معدوم

الحدث D : الحصول على ثلاث كرات مجموع أرقامها هو 2 .

2) احسب $p(A \cap C)$ ثم استنتج $p(A \cup C)$.

نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكرات المسحوبة التي تحمل الرقم 0 .

3) عين قيم المتغير العشوائي Xوعرف قانون احتماله .

4) احسب الامل الرياضي $E(X)$.

التمرين الثالث: (05 نقاط) **أجب بصح أو خطأ مع التبرير:**

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(x^2+5x+1\right) - x = -\infty$

2) لتكن المتتالية الهندسية المعرفة بـ $v_n = \frac{1}{2}(3)^n$ من أجل كل عدد طبيعي n فإن :

$$S_n = \frac{1}{v_0} + \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \dots + \frac{1}{v_n} = \frac{4}{3} - \frac{4}{3^n}$$

3) $\int_0^{\pi} x.\cos(x)\,dx = 2$

4) (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ $u_n = \int_{\ln 2}^{n} \frac{e^x}{e^x+2}dx$ ومنه قيمة الحد الثالث هي $u_2 = \ln\left(\frac{e^n+2}{4}\right)$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

$\boxed{\text{I}}$ نعتبر دالة g معرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $g(x) = x^2 - \ln x^2$.

1) احسب نهايات الدالة g عند أطراف مجموعة تعريفها .

2) ادرس اتجاه تغير الدالة g وشكل جدول تغيراتها .

3) استنتج أنه من أجل كل حقيقي غير معدوم يكون : $g(x) > 0$

$\boxed{\text{II}}$ نعتبر دالة f معرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x) = \frac{2}{x} + x + \frac{\ln x^2}{x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o; \vec{i}; \vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\| = 2cm$

1) احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

2) احسب $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} f(x)$ ، $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)$ - فسر النتائج بيانيا -.

3) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}^*$ فإن : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

4) أدرس إتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

5) أ/ بين أن المنحنى (C_f) يقبل (Δ)المنصف الأول كمقارب مائل له .

ب / ادرس الوضع النسبي بينهما .

6) من أجل كل $x \in \mathbb{R}^*$ و $-x \in \mathbb{R}^*$ بين أن : $f(x) + f(-x) = 0$ ،فسر هذه النتيجة بيانيا .

7) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا α حيث $0,3 < \alpha < 0,4$

-استنتج أنها تقبل حلا آخر β يطلب تعيين حصر له .

8) بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسين (T_1) و (T_2) موازيين للمستقيم (Δ)

9) أنشئ كلا من (Δ) ، (T_1) ، (T_2) والمنحنى (C_f) .

10) عين القيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة $\ln(x^2) = mx - 2$ ثلاثة حلول .

$\boxed{\text{III}}$ احسب بوحدة المساحة S مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ)والمستقيمين اللذين معادلتهما $x = e$ و $x = 1$.

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثّاني :

التمرين الأول : (5نقاط)

المتتالية (u_n) معرفة بحدها الاول $u_1 = \frac{1}{2}$ ومن اجل كل n من $\mathbb{N}^*$: $u_{n+1} = \frac{n+1}{2n}u_n$.

1) احسب الحدود u_2 و u_3 .

2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن : $u_n > 0$.

3) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج انها متقاربة .

4) المتتالية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ: $v_n = \frac{u_n}{n}$.

أ)بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول v_1 .

ب) اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_n = \frac{n}{2^n}$.

5) أ) احسب النهاية $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x - x\ln 2$.

ب) استنتج $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

6) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث $S_n = \frac{1}{u_1} + \frac{2}{u_2} + \dots + \frac{n}{u_n}$.

التمرين الثاني: (4نقاط)

يحتوي صندوق على 11 كرية متماثلة لا نفرق بينها باللمس ،منها اربع كريات بيضاء مرقمة: 1، 1،1 ، 3 ، وخمس كريات حمراء مرقمة 1 ، 2 ، 2 ، 2 ، 2 وكريتين سوداوين مرقمة 3 و 3 .

نسحب عشوائيا وفي ان واحد ثلاث كريات من هذا الصندوق .

1) نعتبر الحوادث: A " سحب 3 كريات من نفس اللون " B "سحب 3 كريات من نفس الرقم"

C "سحب على الأقل كرية بيضاء "

أ) احسب $P(A)$ و $P(C)$ و $P(B)$.

ب) بين $P(A \cap B) = \frac{1}{33}$ ثم استنتج $P(A \cup B)$.

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الأرقام الفردية المسحوبة .

أ) عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم احسب $E(x)$ أمله الرياضي

التمرين الثالث: (4 نقاط)

لكل سؤال جواب واحد صحيح عينه مع التبرير:

1) منحنى الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ ب $f(x) = x + 2 + \frac{3}{e^x + 3}$ يقبل مستقيم مقارب مائل بجوار $-\infty$ معادلته :

أ) $y = x + 2$ ب) $y = x + 3$ ج) $y = x + \frac{6}{3}$

2) حل المعادلة ذات المجهول a في $\mathbb{R}$ حيث $\int_0^{\ln 2} e^{2x+a}dx = \ln 2$ هو :

أ) $a = \ln\left(\frac{\ln 4}{3}\right)$ ب) $a = \ln\left(\frac{\ln 2}{e-1}\right)$ ج) $a = \frac{e^2}{2}$

3) A و B حادثتان من فضاء احتمالي حيث $P(A) = 0,4$ ، $P(B) = 0,5$ و $P(\overline{A \cup B}) = 0,35$

قيمة الاحتمال $P(A \cap B)$ هي :

أ) $0,1$ ب) $0,25$ ج) المعطيات غير كافية للجواب

4) المتتالية (U_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ ب: $U_n = 1 + 6\left(\dfrac{2\alpha - 1}{5}\right)^n$ ، قيم α حتى تكون (U_n) متقاربة هي :

أ) $-2 < \alpha < 3$ ب) $0 < \alpha < 3$ ج) $-2 < \alpha < 0$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

الجزء الأول :

نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ ب : $g(x) = e^{-2x} - 4x - 2$.

1) بين أن الدالة g متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

2) أ/ بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0,16 < \alpha < -0,15$.

ب/ استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

الجزء الثاني :

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ ب : $f(x) = x + 3 - 2xe^{2x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o; \vec{i}; \vec{j})$ ، $\|\vec{i}\| = 2cm$.

1) بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ ثم أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2) أ/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $f'(x) = e^{2x} g(x)$.

ب / استنتج إتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

3) أ/ احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - x]$ ثم استنتج أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا (Δ) يطلب تعيين معادلته .

ب / ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) .

4) بين أن (C_f) يقبل مستقيما مماسا (T) موازي لـ (Δ) يطلب تعيين معادلته .

5) أنشئ (T) ، (Δ) و (C_f) . (نأخذ $f(\alpha) \simeq 3.1$ و $f(0,5) \simeq 0$)

6) عين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة $2xe^{2x} + m - 3 = 0$ حلين متمايزين .

7) λ عدد حقيقي سالب تماما

أ/ باستعمال المكاملة بالتجزئة جد بدلالة λ العدد : $\int_{\lambda}^{0} 2xe^{2x} dx$.

ب/ استنتج بوحدة المساحة وبدلالة λ المساحة S مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) و المستقيمين اللذين معادلتهما $x = 0$ و $x = \lambda$.

ج/ ثم احسب: $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} S$.

انتهى الموضوع الثاني

الموضوع I :

* التمرين الأول :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{3}{2} \\ U_{n+1} = \frac{2U_n}{2U_n+5} \end{cases}$$

① البرهان بالتراجع أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ فإن: $U_n > 0$ ... $P(n)$.

أ- نبرهن صحة $P(0)$:

لدينا: $U_0 = \frac{3}{2}$ ومنه $U_0 > 0$

ومنه $P(0)$ صحيحة .

0,25

ب) من أجل n من $\mathbb{N}$ نفرض صحة $P(n)$ أي: $U_n > 0$

ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي: $U_{n+1} > 0$

لدينا: $U_n > 0$ ومنه: $2U_n > 0$

و $2U_n + 5 > 0$

0,75

ومنه: $\frac{2U_n}{2U_n+5} > 0$

أي: $U_{n+1} > 0$

ومنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن:

$U_n > 0$

② أ- إثبات أن: $\frac{U_{n+1}}{U_n} < 1$

لدينا:

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\frac{2U_n}{2U_n+5}}{U_n}$$

0,5

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{2}{2U_n+5}$$

لدينا: $U_n > 0$

ومنه: $2U_n + 5 > 5$

ومنه $\frac{1}{2U_n+5} < \frac{1}{5}$

$$\frac{2}{2U_n+5} < \frac{2}{5} < 1$$

ومنه: $\frac{U_{n+1}}{U_n} < 1$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$

ب) بما أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ فإن $\frac{U_{n+1}}{U_n} < 1$ ومنه: $U_{n+1} < U_n$

0,5

نستنتج أن المتتالية (U_n) متناقصة تماما

ومنه: بما أنها متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة

③ أ- نبرهن أن (V_n) متتالية هندسية

لدينا:

$$V_{n+1} = \frac{4U_{n+1}}{2U_{n+1}+3}$$

$$= \frac{\frac{8U_n}{2U_n+5}}{\frac{4U_n}{2U_n+5}+3}$$

0,5

$$= \frac{8U_n}{\cancel{2U_n+5}} \times \frac{\cancel{2U_n+5}}{10U_n+15}$$

$$= \frac{8U_n}{10U_n+15} = \frac{2(4U_n)}{5(2U_n+3)}$$

$$V_{n+1} = \frac{2}{5} \cdot V_n$$

ومنه المتتالية (V_n) هندسية أساسها $\boxed{q = \frac{2}{5}}$

- عبارة (V_n) بدلالة n :

$V_n = V_0 \cdot q^n$; $V_0 = \frac{4\left(\frac{3}{2}\right)}{2\left(\frac{3}{2}\right)+3}$

$V_0 = 1$

$$\boxed{V_n = \left(\frac{2}{5}\right)^n}$$

0,25

صفحة "01"

3) ب) إستنتاج عبارة (U_n) بدلالة n :

لدينا :

$$V_n = \frac{2U_n}{2U_n+3}$$

ومنه : $V_n(2U_n+3) = 2U_n$

ومنه : $2V_n U_n + 3V_n - 2U_n = 0$

ومنه : $2U_n(V_n - 1) = -3V_n$

$$U_n = \frac{-3V_n}{2(V_n-1)}$$

$$U_n = \frac{-3\left(\frac{2}{5}\right)^n}{2\left(\left(\frac{2}{5}\right)^n - 1\right)}$$

0,5

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{-3\left(\frac{2}{5}\right)^n}{2\left(\left(\frac{2}{5}\right)^n - 1\right)}$$

$$= \boxed{0}$$

0,25

لأن : $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$ وذلك لأن : $-1 < \frac{2}{5} < 1$

4) حساب المجموع S_n :

$$S_n = \frac{3}{U_0} + \frac{3}{U_1} + \frac{3}{U_2} + \cdots + \frac{3}{U_n}$$

لدينا :

$$U_n = \frac{-3V_n}{2(V_n-1)}$$

ومنه : $\frac{1}{U_n} = \frac{2V_n-2}{-3V_n}$

ومنه : $\frac{3}{U_n} = \frac{-2V_n+2}{V_n}$

$$\frac{3}{U_n} = -2 + \frac{2}{\left(\frac{2}{5}\right)^n}$$

$$\boxed{\frac{3}{U_n} = -2 + 2\left(\frac{5}{2}\right)^n}$$

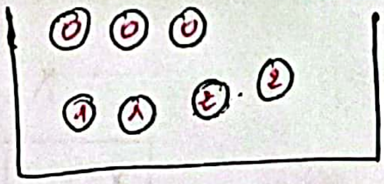
$$S_n = -2 + 2\left(\frac{5}{2}\right)^0 + (-2) + 2\left(\frac{5}{2}\right)^1 + \cdots + -2 + 2\left(\frac{5}{2}\right)^n$$

$$S_n = (\underbrace{-2-2-2-\cdots-2}_{(n+1)\ \text{مرة}}) + 2\left(\underbrace{\left(\frac{5}{2}\right)^0 + \left(\frac{5}{2}\right)^1 + \cdots + \left(\frac{5}{2}\right)^n}_{\text{مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية}}\right)$$

$$\boxed{S_n = -2(n+1) + 2\left(\frac{1-\left(\frac{5}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{5}{2}}\right)}$$

0,5

التمرين "02"



نسحب 3 كرات على التوالي وبإرجاع الكرة المسحوبة إلى الصندوق.

لدينا:

$Card\,\Omega = 7^3 = 343$

① حساب احتمال الحوادث:

الحدث A: سحب ثلاث تحمل نفس الرقم.

$Card\,A = \underbrace{3^3}_{\text{ثلاثة تحمل الرقم 0}} + \underbrace{2^3}_{\text{أو ثلاثة تحمل الرقم 1}} + \underbrace{2^3}_{\text{أو ثلاثة تحمل الرقم 2}}$

$= 43$ 0,25

$\boxed{P(A) = \frac{43}{343}}$

ومنه:

الحدث B: الكرات الثلاث تحمل أرقاما مختلفة مثنى مثنى

$Card\,B = (\underbrace{3^1}_{\text{كرة بها 0}} \times \underbrace{2^1}_{\text{و كرة بها الرقم 2}} \times \underbrace{2^1}_{\text{و كرة بها الرقم 1}}) \times 6$

$Card\,B = 72$

لاحظ أن الترتيب مهم:

$\alpha = \frac{(1+1+1)!}{1! \times 1! \times 1!} = 6$

$\boxed{P(B) = \frac{72}{343}}$ 0,25

$P(A \cap C) = \frac{3^3}{343} = \frac{27}{343}$ 0,25

$P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C)$ 0,25

$= \frac{43}{343} + \frac{261}{343} - \frac{27}{343} = \frac{277}{343}$

الحدث C: الحصول على ثلاث كرات جداء أرقامها معدوم يعني الحصول على كرة تحمل الرقم "0" واحدة على الأقل

$Card\,C = (3^1 \times 4^2) \times 3 + (3^2 \times 4^1) \times 3 + (3^3 \times 4^0) . 1$

$= 261$

$\boxed{P(C) = \frac{261}{343}}$ 0,25

الحدث D: الحصول على ثلاث كرات مجموع أرقامها هو: 2

معناه: كرة بها الرقم "2" وكرتان بهما الرقم "0" أو كرتان بهما الرقم "1" وكرة بها الرقم "0"

$Card\,D = (2^1 \times 3^2) \times 3 + (2^2 \times 3^1) \times 3$

$Card\,D = 54 + 36 = 90$

$\boxed{P(D) = \frac{90}{343}}$ 0,25

② المتغير العشوائي X يرفق بكل عملية سحب عدد الكرات التي تحمل الرقم 0:

$X(\Omega) = \{0; 1; 2; 3\}$ 0,25

$P(X=0) = \frac{3^0 \times 4^3}{343} = \boxed{\frac{64}{343}}$

$P(X=1) = \frac{(3^1 \times 4^2) . 3}{343} = \boxed{\frac{144}{343}}$

$P(X=2) = \frac{(3^2 \times 4^1) \times 3}{343} = \boxed{\frac{108}{343}}$

$P(X=3) = \frac{3^3 \times 4^0}{343} = \boxed{\frac{27}{343}}$

صفحة "03"

قانون الإحتمال المتغير العشوائي X :

$X=x_i$	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{64}{343}$	$\frac{144}{343}$	$\frac{108}{343}$	$\frac{27}{343}$

0,25

④ حساب الأمل الرياضي :

$$E(X)=\sum_{i=1}^{4} x_i P_i = \frac{441}{343} = \frac{9}{7}$$

0,25

ت 03:

①

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x^2+5x+1)-x$$

$$=\lim_{x\to+\infty} \ln(x^2+5x+1)-\ln e^x$$

$$=\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x^2+5x+1}{e^x}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty} \ln\left[\frac{x^2}{e^x}+\frac{5x}{e^x}+\frac{1}{e^x}\right]$$

$$=\boxed{-\infty}$$

1

① ⟵ صح

② حساب المجموع S_n : $V_n=\left(\frac{1}{2}\right)\cdot 3^n$

$$S_n=\frac{1}{V_0}+\frac{1}{V_1}+\dots+\frac{1}{V_n}$$

لدينا :

$$\frac{1}{V_n}=\frac{1}{\frac{1}{2}\cdot 3^n}$$

$$=2\cdot 3^{-n}=2\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

ومنه S_n هو عبارة عن مجموع حدود متتالية هندسية ذات أساس $q=\frac{1}{3}$ ، وحد أول 2 :

$$S_n=2\left[\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{1}{3}\right)}\right]$$

$$S_n=2\left[\frac{1-3^{-n-1}}{\frac{2}{3}}\right]$$

$$S_n=2\times\frac{3}{2}\left(1-3^{-n-1}\right)$$

$$\boxed{S_n=3-3^{-n}}$$

1

② ⟵ خطأ .

③ حساب I حيث : $I=\int_0^{\pi} x\cdot\cos x\,dx$

نستخدم التكامل بالتجزئة .

نعلم أن :

$$\int U(x)\cdot V'(x)\,dx=\left[U(x)\,V(x)\right]-\int U'(x)\cdot V(x)\,dx$$

نضع :

$$\begin{cases} U(x)=x & \Rightarrow U'(x)=1 \\ V'(x)=\cos x & \Rightarrow V(x)=\sin x \end{cases}$$

$$I=\left[x\sin x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sin x\,dx$$

$$=\left[x\sin x\right]_0^{\pi}-\left[-\cos x\right]_0^{\pi}$$

"الصفحة 04"

$= \lim_{x\to+\infty} x^2\left(1-\frac{\cancel{\ln x^2}}{x^2}\right) = +\infty$ 0,25

$\lim_{x\to-\infty} x^2\left(1-\frac{\cancel{\ln(x^2)}}{x^2}\right) = +\infty$

② دراسة اتجاه تغير الدالة g:

الدالة g قابلة للاشتقاق على ... ولدينا:

$g'(x) = 2x - \frac{2}{x}$

$g'(x) = \frac{2x^2-2}{x} = \frac{2(x^2-1)}{x}$

$g'(x) = \frac{2(x+1)(x-1)}{x}$ 0,25

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$2(x+1)(x-1)$	+	0 −	−	0 +	+
x	−	−	0 +	+	+
$g'(x)$	−	0 +	‖ −	0 +	
$g(x)$	$+\infty$ ↘ 1	↗ $+\infty$ ‖ $+\infty$	↘ 1	↗ $+\infty$	

③ من أجل كل $x\in\mathbb{R}^*$ نلاحظ أن $g(x)\geq 1$

ومنه نستنتج أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}^*$

فإن $g(x) > 0$ 0,25

II

$f(x) = \frac{2}{x} + x + \frac{\ln(x^2)}{x}$

① حساب النهايات:

$\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x} + x + \frac{2\ln(x)}{x} = \boxed{+\infty}$ 0,5

$\lim_{x\to-\infty} \frac{2}{x} + x - \frac{2\ln(-x)}{-x} = \boxed{-\infty}$

لأن: $\lim_{t\to+\infty} \frac{\ln(t)}{t} = 0$

$I = [x\sin x + \cos x]_0^{\pi}$

$= (\pi\sin\pi + \cos\pi) - (0\sin 0 + \cos(0))$

$= -1 - 1 = \boxed{-2}$ 1,5

③ ← خطأ

④ $U_n = \int_{\ln(2)}^{n} \frac{e^x}{e^x+2}\,dx$

$U_2 = \int_{\ln(2)}^{2} \frac{e^x}{e^x+2}\,dx$

$U_2 = [\ln(e^x+2)]_{\ln(2)}^{2}$

$U_2 = (\ln(e^2+2)) - (\ln(e^{\ln(2)}+2))$

$U_2 = \ln(e^2+2) - \ln(2+2)$

$U_2 = \ln\left(\frac{e^2+2}{4}\right)$ 1,5

④ ← خطأ

التمرين الرابع:

I

$g(x) = x^2 - \ln(x^2)$

① حساب النهايات:

$\lim_{x\to0^>} x^2 - \underbrace{\ln(x^2)}_{-\infty} = +\infty$

$\lim_{x\to0^<} x^2 - \underbrace{\ln(x^2)}_{-\infty} = +\infty$ 0,25

$\lim_{x\to+\infty} x^2 - \ln(x^2) = +\infty-\infty$ (ح.ع)

2) حساب النهايات عند 0:

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \underbrace{\frac{2}{x}}_{+\infty} + x + \underbrace{\frac{\ln(x^2)}{x}}_{-\infty}$$

$$= +\infty - \infty \ (\text{ح ع})$$

$$= \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \underbrace{\frac{1}{x}}_{+\infty} \big[\underbrace{2 + x^2 + \ln(x^2)}_{-\infty}\big]$$

$$= \boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} \underbrace{\frac{1}{x}}_{-\infty} \big[\underbrace{2 + x^2 + \ln(x^2)}_{-\infty}\big] = \boxed{+\infty}$$

$\boxed{x=0}$ معادلة مستقيم مقارب عمودي لـ (C_f).

3) حساب $f'(x)$:

f ق.إ و لدينا:

$$f'(x) = \frac{-2}{x^2} + 1 + \frac{\frac{2}{x}\times x - \ln(x^2)}{x^2}$$

$$= \frac{-2 + x^2 + 2 - \ln(x^2)}{x^2}$$

$$= \frac{x^2 - \ln(x^2)}{x^2} = \boxed{\frac{g(x)}{x^2}}$$

4) اتجاه تغير الدالة f:

لدينا: $x^2 > 0$ و $g(x) > 0$

ومنه $f'(x) > 0 \Leftarrow$ الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}^*$.

- جدول تغيرات الدالة f:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

5) أ) لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2}{x} + \frac{\ln(x^2)}{x}\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\underbrace{\frac{2}{x}}_{0} + 2\underbrace{\frac{\ln(x)}{x}}_{0}\right] = 0$$

و لدينا:

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-x\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{2}{x} + \frac{\ln(x^2)}{x}\right]$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left[\underbrace{\frac{2}{x}}_{0} - 2\underbrace{\frac{\ln(-x)}{-x}}_{0}\right]$$

$$= 0$$

ومنه المستقيم $(\Delta): y = x$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $(+\infty)$ و $(-\infty)$

5) ب) دراسة الوضع النسبي:

ندرس إشارة الفرق:

$$f(x) - x = \frac{2}{x} + \frac{\ln(x^2)}{x}$$

$$= \frac{2+\ln(x^2)}{x}$$

إشارة $2+\ln(x^2)$:

لدينا: $2 + \ln(x^2) \geq 0$

ومنه: $\ln(x^2) \geq -2$

$x^2 \geq e^{-2}$

$|x| \geq \sqrt{e^{-2}}$

$|x| \geq e^{-1}$

ومنه $x \geq e^{-1} \Leftarrow x \in [e^{-1}; +\infty[$

أو $x \leq -e^{-1} \Leftarrow x \in]-\infty; -e^{-1}]$

ومنه:

x	$-\infty$		$-e^{-1}$		0		e^{-1}		$+\infty$
$2+\ln(x^2)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)-x$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	
الوضع النسبي		(C_f) يقع تحت (Δ)	(C_f) يقطع المستقيم (Δ)	(C_f) يقع فوق (Δ)		(C_f) يقع تحت (Δ)	(C_f) يقطع المستقيم (Δ)	(C_f) يقع فوق (Δ)	

6) نبرهن أن: $f(x) + f(-x) = 0$

لدينا:

$$f(x)+f(-x) = \frac{2}{x} + x + \frac{\ln(x^2)}{x} + \frac{2}{-x} - x + \frac{\ln((-x)^2)}{-x}$$

ومنه:

$$= \frac{2}{x} + x + \frac{\ln(x^2)}{x} - \frac{2}{x} - x - \frac{\ln(x^2)}{x}$$

$$= \boxed{0}$$

بما أن: $f(x) + f(-x) = 0$

أي $\boxed{f(-x) = -f(x)}$

نستنتج أن الدالة f دالة فردية

التفسير البياني: (C_f) متناظر بالنسبة للمبدأ O.

7 بين أن المعادلة $f(x)=0$

تقبل حلا وحيدا: $0{,}3 < \alpha < 0{,}4$

لدينا الدالة f مستمرة و متزايدة

تماما على المجال: $]0{,}3;0{,}4[$

و (ب)

$f(0{,}3) \simeq$

$f(0{,}4) \simeq$

أي أن $f(0{,}3) \times f(0{,}4) < 0$

من (أ) و(ب) وحسب مبرهنة

القيم المتوسطة فإن المعادلة

0,25

$f(x)=0$ تقبل حلا

وحيدا α في المجال $]0{,}3;0{,}4[$

يحقق $f(\alpha)=0$

- استنتاج الحل الآخر β.

بما أن f دالة فردية

0,25

فإن $f(-x)=-f(x)$

ومنه: $-f(\alpha)=f(-\alpha)=0$

إذا قيمة الحل الآخر: $\boxed{\beta=-\alpha}$

$-0{,}4 < \beta < -0{,}3$

8 نبين أنه يوجد مماسين

(T_1) و (T_2) موازيين

لـ (Δ): نعلم أن (T_1) و (T_2)

موازيان لـ (Δ)

معناه:

$$f'(x)=1$$

$$\frac{g(x)}{x^2}=1$$

$$g(x)=x^2$$

$$x^2-\ln(x^2)=x^2$$

$$-\ln(x^2)=0$$

$$\ln(x^2)=0$$

0,5

$$x^2=e^0$$

$$|x|=\sqrt{e^0}=\sqrt{1}=1$$

$\boxed{x=1}$ أو $-x=1$

أي $\boxed{x=-1}$

إذا كماسان الموازيان لـ (Δ)

(T_1) و (T_2) هما عند النقطتين

ذات الفاصلتين $x=-1$, $x=1$

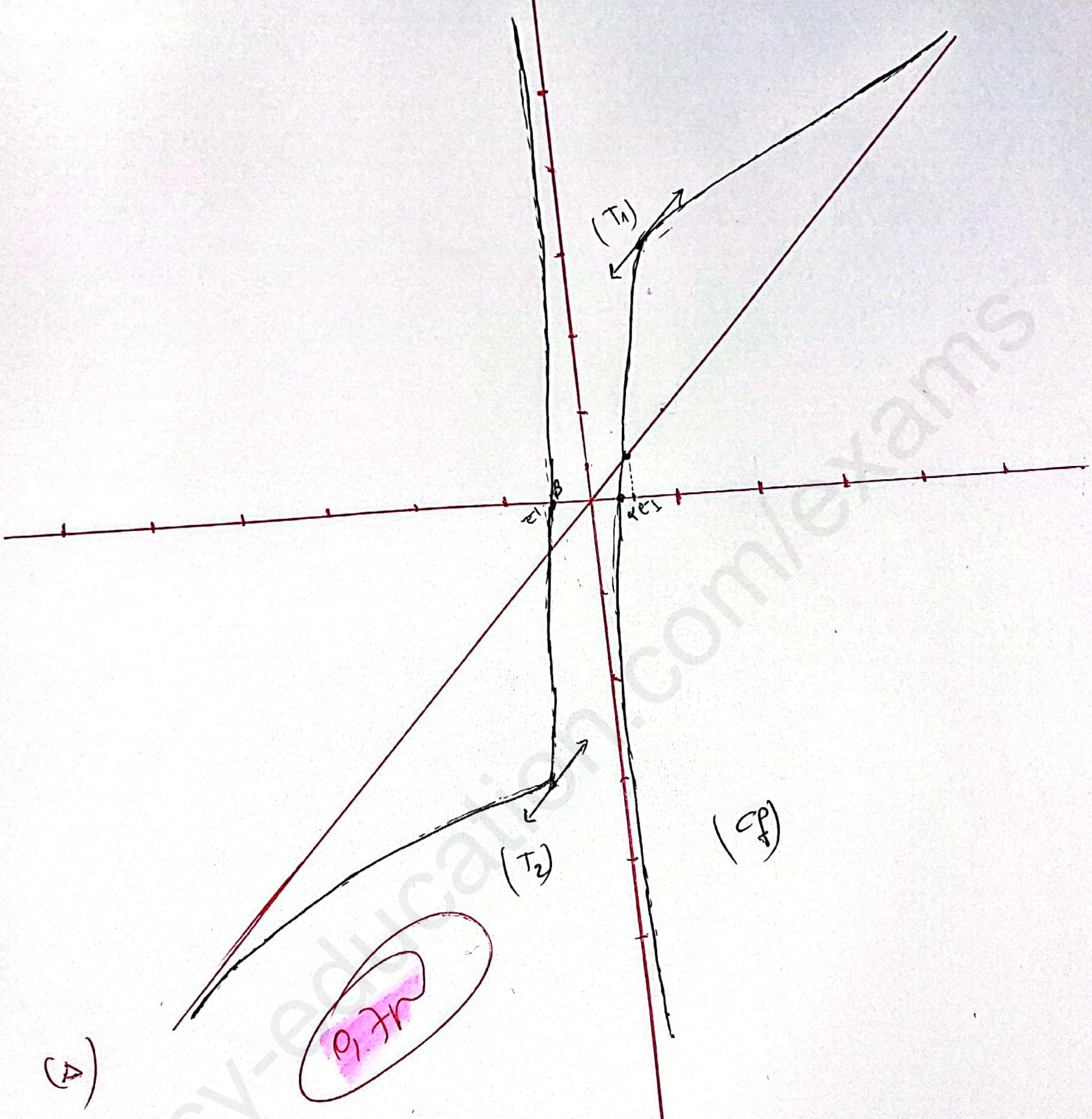
ملاحظة:

(T_1) يشمل النقطة $A_1(1;3)$

(T_2) " النقطة $A_2(-1;-3)$

صفحة "07"

⑨ الإنشاء



صفحة "08"

$$S = \int_1^e f(x) - x \, dx$$

$$= \int_1^e \frac{2}{x} + \frac{\ln(x^2)}{x} \, dx$$

بما أن $x>0$ فإن $\ln(x^2) = 2\ln(x)$

ومنه

$$S = \int_1^e \frac{2}{x} + \frac{2\ln(x)}{x} \, dx$$

$$S = \Big[2\ln(x) + 2\left(\frac{1}{2}(\ln(x))^2\right) \Big]_1^e$$

$$S = \Big[2\ln(x) + (\ln(x))^2 \Big]_1^e$$

$$= \left(2\ln(e) + (\ln(e))^2\right) - \left(2\ln(1) + (\ln(1))^2\right)$$

0,25

$$S = 2 \times (1) + 1$$

$$S = 3 \ u.a$$

أما بال cm^2

$$S = (3) \times \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$$

0,25

$$S = 3 \times 2 \times 2 = \boxed{12 \ cm^2}$$

يتبع

(10)

تعيين قيم m حتى

تقبل المعادلة : $\ln(x^2) = mx - 2$

ثلاث حلول :

لدينا : $\ln(x^2) = mx - 2$

$x \neq 0$ فإن

$$\frac{\ln(x^2)}{x} = m - \frac{2}{x}$$

ومنه

$$\frac{2}{x} + \frac{\ln(x^2)}{x} = m$$

ومنه :

$$\frac{2}{x} + x + \frac{\ln(x^2)}{x} = x + m$$

ومنه :

$$\boxed{f(x) = x + m} \dots (*)$$

مناقشة بيانية مائلة موازية

ل (Δ) المقارب المائل ل (C_f)

و (T_1) و (T_2) مماسي المنحنى (C_f)

المعادلة $(*)$ تقبل ثلاث حلول

إذا وفقط إذا كانت :

0,25

$m \in]-2;0[\cup]0;2[$

---

(11) حساب مساحة

الحيز المحدد ب (C_f) و (Δ)

والمستقيمان اللذان معادلتهما : $x = 1$

و $x = e$

التمرين الأول : (5نقاط)

1) حساب الحدود

• $u_2=\frac{1+1}{2\times 1}u_1=\frac{1}{2}$

• $u_3=\frac{2+1}{2\times 2}u_2=\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$

0.5

2)

البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن : $u_n>0$:

1

(*) من أجل $n=1$ لدينا $u_1=\frac{1}{2}>0$

ومنه الخاصية محققة من أجل $n=1$.

(**) نفرض أن $u_n>0$ من أجل عدد طبيعي غير معدوم n ونبرهن أن $u_{n+1}>0$.

لدينا $u_n>0$ و $\frac{n+1}{2n}>0$ ومنه $\frac{n+1}{2n}u_n>0$ ومنه $u_{n+1}>0$

من (*) و (**) نستنتج حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع أنه

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n: $u_n>0$.

1

3) دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n)

ليكن $n\in\mathbb{N}^*$، ومنه $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n+1}{2n}=\frac{n+1}{n+n}\leqslant 1$.

وبما أن $u_n>0$ نستنتج $u_{n+1}\leqslant u_n$ ومنه المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

بما أن (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل ب 0 فهي متقاربة .

1

4) أ) تبيان أن (v_n) متتالية هندسية :

ليكن $n\in\mathbb{N}^*$ ، ومنه : $v_{n+1}=\frac{u_{n+1}}{n+1}=\frac{\frac{n+1}{2n}u_n}{n+1}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{n}u_n=\frac{1}{2}v_n$

ومنه المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الأول $v_1=u_1=\frac{1}{2}$.

ب) عبارة الحد العام لمتتالية هندسية من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$:

$v_n=v_1\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{2^n}$ وبما أن $v_n=\frac{u_n}{n}$ فإن $u_n=\frac{n}{2^n}$.

0.25

5) أ) حساب النهاية :

$$\lim_{x\to+\infty}\ln x-x\ln 2=\lim_{x\to+\infty}x\left(\frac{\ln x}{x}-\ln 2\right)=-\infty$$

لأن $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

ب) استنتاج $\lim_{n\to+\infty}u_n$. لدينا $u_n=\left(\frac{n}{2^n}\right)=\frac{e^{\ln n}}{e^{n\ln 2}}=e^{\ln n-n\ln 2}$

0.25

وبما أن : $\lim_{x\to+\infty}\ln n-n\ln 2=-\infty$

، وباستعمال نهاية مركب دالتين نجد : $\lim_{n\to+\infty}u_n=0$.

6) حساب المجموع S_n :

1

$$S_n=\frac{1}{u_1}+\frac{2}{u_2}+\dots+\frac{n}{u_n}$$

ولدينا $v_n=\frac{u_n}{n}$ ومنه $\frac{n}{u_n}=\frac{1}{v_n}$

ومنه $S_n=\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}+\dots+\frac{1}{v_n}$

ونعلم أن $2^n=\frac{1}{\frac{1}{2^n}}=\frac{1}{v_n}$ بالتعويض نجد

$$S_n=2^1+2^2+\dots+2^n$$

S_n هو مجموع متتالية هندسية أساسها 2 وحدها الأول 1

$$S_n=1\left(\frac{2^n-1}{2-1}\right)=2^n-1$$

التمرين الثاني: (4نقاط)

1) سحب 3 كريات من نفس اللون "BBB ، "RRR "

$P(A)=\frac{C_4^3+C_5^3}{C_{11}^3}=\frac{4+10}{84}=\frac{14}{165}$ 0.5

B سحب 3 كريات من نفس الرقم "111،222،333 " 0.5

$P(B)=\frac{C_4^3+C_4^3+C_3^3}{C_{11}^3}=\frac{4+4+1}{165}=\frac{9}{165}=\frac{3}{55}$.

C سحب على الأقل كرية بيضاء ، 0.5

الحادثة العكسية $\overline{C}$ هي عدم سحب اي كرية بيضاء:

$P(C)=1-P(\overline{C})=1-\frac{C_7^3}{C_{11}^3}=\frac{165-35}{165}=\frac{130}{165}=\frac{26}{33}$.

$P(A\cap B)=\frac{C_3^3+C_4^3}{C_{11}^3}=\frac{5}{165}=\frac{1}{33}$ 0.5

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ 0.5

$=\frac{14}{165}+\frac{9}{165}-\frac{5}{165}=\frac{18}{165}=\frac{6}{55}$

$P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{5}{165}}{\frac{9}{165}}=\frac{5}{9}$ 0.25

0.25

ج) لدينا

$$P(A)\times P(B) = \frac{14}{165}\times\frac{3}{55}$$

$$= \frac{42}{9075} = \frac{14}{3025} \neq P(A\cap B)$$

ومنه الحادثتان A و B ليستا مستقلتان

---

3) تعيين قيم المتغير العشوائي X . $X=\{0;1;2;3\}$

0.25

0 سحب 3كرات تحمل أرقاما زوجية

1 سحب كرة تحمل رقم فردي و وكرتين تحملان رقمين زوجيين

2 سحب كرتين تحملان رقمين فرديين و كرة تحمل رقم زوجي

3 سحب 3 كرات تحمل أرقاما فردية

0.5

$$P(X=0)=\frac{C_4^3}{C_{11}^3}=\frac{4}{165}$$

$$P(X=1)=\frac{C_7^1C_4^2}{C_{11}^3}=\frac{42}{165}$$

$$P(X=2)=\frac{C_7^2C_4^1}{C_{11}^3}=\frac{84}{165}$$

$$P(X=3)=\frac{C_7^3}{C_{11}^3}=\frac{35}{165}$$

0.25

X_i	0	1	2	3
$p(X=X_i)$	$\frac{4}{165}$	$\frac{42}{165}$	$\frac{84}{165}$	$\frac{35}{165}$

حساب الأمل الرياضي :

$$E(x)=0\frac{4}{165}+1\frac{42}{165}+2\frac{84}{165}+3\frac{35}{165}=\frac{315}{165}.$$

التمرين الثالث: (4 نقاط)

1) الاجابة ب) $y=x+3$

1

التبرير : لدينا $f(x)=x+2+\frac{3}{e^x+3}$

وبما أن $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3}{e^x+3}=\frac{3}{0+3}=1$ فإن

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)-(x+2)-1=0$$

ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(x+3)=0$

ومنه المستقيم ذو المعادلة $y=x+3$ مقارب مائل ل (C_f)

بجوار $-\infty$

1

2) الجواب ب) 0.25

لدينا $P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=0.35$

ومنه $P(A\cup B)=1-0.35=0.65$

ومنه $P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$

$$=0.4+0.5-0.65=0.25$$

1

3) الاجابة أ) $\ln\left(\frac{\ln 4}{3}\right)$

التبرير : $\int_0^{\ln 2} e^{2x+a}dx=\ln 2$

ومنه $\left[\frac{1}{2}e^{2x+a}\right]_0^{\ln 2}=\ln 2$

ومنه $\left(\frac{1}{2}e^{2\ln 2+a}\right)-\left(\frac{1}{2}e^{2(0)+a}\right)=\ln 2$

$$\left(\frac{1}{2}e^{\ln 4+a}\right)-\left(\frac{1}{2}e^{a}\right)=\ln 2$$

$$e^{\ln 4}e^a-e^a=2\ln 2$$

$$e^a(4-1)=\ln(2^2)$$

$$e^a=\frac{\ln 4}{3}$$

$$a=\ln\left(\frac{\ln 4}{3}\right)$$

1

4) الاجابة أ) $-2<\alpha<3$

التبرير :المتتالية (U_n) متقاربة معناه

$-1<\frac{2\alpha-1}{5}<1$ ومنه $-5<2\alpha-1<5$

ومنه $\frac{-4}{2}<\alpha<\frac{6}{2}$ ومنه $-2<\alpha<3$

0.5

التمرين الرابع: (07 نقاط)

نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ ب : $g(x)=e^{-2x}-4x-2$.

1) المشتقة من أجل كل عدد حقيقي x لدينا :

$g'(x)=-2e^{-2x}-4<0$ ومنه g متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

0.5

2) الدالة g مستمرة و متناقصة تماما و $g(-0.16)=$

و $g(-0.15)=+0.$ ومنه $g(-0.15).g(-0.16)<0$

فانه حسب مبرهنة القيم المتوسطة والرتابة المعادلة

$g(x)=0$ تقبلا حلا وحيدا α حيث $-0.16<\alpha<-0.15$

0.5

3) اشارة $g(x)$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

الجزء الثاني :

0.25

1) $f(x) = x + 3 - 2xe^{2x}$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x + 3 - 2xe^{2x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} e^{2x}\left(\frac{x+3}{e^{2x}} - 2x\right)$$

بما أن $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} -2x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+3}{e^{2x}} = 0 \end{cases}$ فان $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

0.25

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} 2xe^{2x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} x + 3 = -\infty \end{cases}$ ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

0.5

2) أ) المشتقة: من أجل كل عدد حقيقي x فإن :

$$f'(x) = 1 - (2e^{2x}) + (2x(2e^{2x})) = 1 - (2e^{2x}) - (4xe^{2x})$$

$$.= e^{-2x}e^{2x} - (2e^{2x}) - (4xe^{2x}) = e^{2x}\left(e^{-2x} - 2 - 4x\right)$$

$$= e^{2x}g(x)$$

0.25

ب) اشارة المشتقة من اشارة $g(x)$ لأن $e^{2x} > 0$ ومنه :

الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-\infty; \alpha]$

الدالة f متناقصة تماما على المجال $[\alpha; +\infty[$

0.5

جدول التغيرات .

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	$-\infty$

0.5

3) أ)

$$\lim_{x\to-\infty} [f(x) - x] = \lim_{x\to-\infty} [x + 3 - 2xe^{2x} - x]$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \Big[\,3 - \underbrace{2xe^{2x}}_{0}\,\Big] = 3$$

استنتاج أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا (Δ)

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - x] = 3$ ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - (x+3)] = 0$

ومنه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x + 3$

مقارب مائل ل (C_f) بجوار $-\infty$.

0.5

ب) دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) :

$$f(x) - y = f(x) - x - 3 = -2x\ e^{2x}$$

اشارة الفرق من إشارة $-2x$ ومنه :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x) - y$		$+$	0	$-$	
الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ)		(C_f)فوق(Δ)	(C_f)يقطع(Δ)	(C_f)تحت(Δ)	

4) تبيان أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) موازي ل(Δ)

أي لهما نفس معامل التوجيه : لتكن x_0 فاصلة نقطة التماس ومنه

$f'(x_0) = 1$ ومنه $1 - (2 + 4x_0)e^{2x_0} = 1$

ومنه $-(2 + 4x_0)e^{2x_0} = 0$ بما أن $e^{2x_0} \neq 0$ فان

ومنه $-2 - 4x_0 = 0$. $x_0 = -\dfrac{1}{2}$

معادلة المماس عند $x_0 = -\dfrac{1}{2}$ هي :

0.5

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

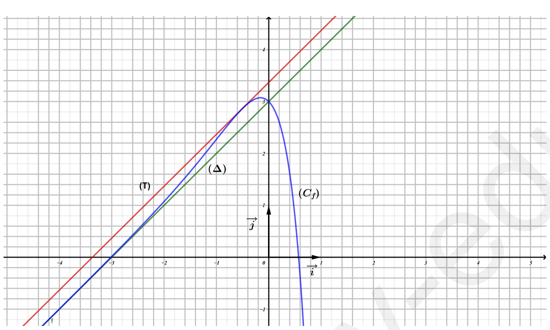
$$y = 1\left(x + \frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{-1}{2}\right)$$

$$y = x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 3 + e^{-1}$$

$$y = x + 3 + e^{-1}$$

5) الانشاء

1



6) قيم m

$$2xe^{2x} + m - 3 = 0$$

$$2xe^{2x} - 3 = -m$$

$$x - 2xe^{2x} + 3 = m + x$$

$$f(x) = x + m$$

المعادلة تقبل حلين متمايزين معناه المستقيمات التي معادلتها

$y = x + m$ (موازية للمستقيمين (Δ) و (T))

تقطع المنحنى (C_f) في نقطتين مختلفتين ومنه :

. $1 < m < 3 + e^{-1}$

0.25

0.5

7) λ عدد حقيقي سالب تماما

أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة جد بدلالة λ العدد : $\int_{\lambda}^{0} 2xe^{2x}dx$.

بفرض $\begin{cases} u(x) = 2x & u'(x) = 2 \\ v'(x) = e^{2x} & v(x) = \frac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$

$$\int_{\lambda}^{0} 2xe^{2x}dx = \left[\frac{2x}{2}e^{2x}\right]_{\lambda}^{0} - \int_{\lambda}^{0}\left(\frac{2}{2}e^{2x}\right)dx$$
$$= \left[0 - \lambda e^{2\lambda}\right] - \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_{\lambda}^{0}$$
$$= -\lambda e^{2\lambda} - \left(\frac{1}{2}e^{2(0)} - \frac{1}{2}e^{2\lambda}\right)$$
$$= (\frac{1}{2} - \lambda)e^{2\lambda} - \frac{1}{2}$$

ب) مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) و المستقيمين $x = 0$ و $x = \lambda$.

0.25

$$S = \int_{\lambda}^{0}(f(x) - y)\,dx$$
$$= \int_{\lambda}^{0}\left((x - 2xe^{2x} + 3) - (x + 3)\right)dx$$
$$= \int_{\lambda}^{0}(-2xe^{2x})dx$$
$$= -((-\lambda)e^{2\lambda} + \frac{1}{2}e^{2\lambda} - \frac{1}{2})$$
$$= \lambda\ e^{2\lambda} - \frac{1}{2}e^{2\lambda} + \frac{1}{2}\ \text{U.a}$$

ج)حساب النهاية

$$\lim_{\lambda \to -\infty} S = \lim_{\lambda \to -\infty} \lambda\ e^{2\lambda} - \frac{1}{2}e^{2\lambda} + \frac{1}{2}$$

. بما أن $\lambda < 0$ فان $\begin{cases} \lim_{x \to -\infty} \lambda\ e^{2\lambda} = 0 \\ \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{2}e^{2\lambda} = 0 \end{cases}$ ومنه $\lim_{\lambda \to -\infty} S = \frac{1}{2}$

0.25

التمرين الأول: (5نقاط)

1) حساب الحدود **0.5**

- $u_2=\dfrac{1+1}{2\times 1}u_1=\dfrac{1}{2}$
- $u_3=\dfrac{2+1}{2\times 2}u_2=\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{8}$

2)

البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن: $u_n>0$: **1**

(*) من أجل $n=1$ لدينا $u_1=\dfrac{1}{2}>0$

ومنه الخاصية محققة من أجل $n=1$.

(**) نفرض أن $u_n>0$ من أجل عدد طبيعي غير معدوم n ونبرهن أن $u_{n+1}>0$.

لدينا $u_n>0$ و $\dfrac{n+1}{2n}>0$ ومنه $\dfrac{n+1}{2n}u_n>0$ ومنه $u_{n+1}>0$

من (*) و (**) نستنتج حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n: $u_n>0$.

1

3) دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n)

ليكن $n\in\mathbb{N}^*$، ومنه $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{n+1}{2n}=\dfrac{n+1}{n+n}\leqslant 1$.

وبما أن $u_n>0$ نستنتج $u_{n+1}\leqslant u_n$ ومنه المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

بما أن (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل ب 0 فهي متقاربة .

1

4) أ) تبيان أن (v_n) متتالية هندسية :

ليكن $n\in\mathbb{N}^*$ ، ومنه: $v_{n+1}=\dfrac{u_{n+1}}{n+1}=\dfrac{\frac{n+1}{2n}u_n}{n+1}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{n}u_n=\dfrac{1}{2}v_n$

ومنه المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها $\dfrac{1}{2}$ وحدها الأول $v_1=u_1=\dfrac{1}{2}$.

ب) عبارة الحد العام لمتتالية هندسية من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$:

$v_n=v_1\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=\dfrac{1}{2^n}$ وبما أن $v_n=\dfrac{u_n}{n}$ فإن $u_n=\dfrac{n}{2^n}$.

0.25

5) أ) حساب النهاية :

$$\lim_{x\to+\infty}\ln x-x\ln 2=\lim_{x\to+\infty}x\left(\frac{\ln x}{x}-\ln 2\right)=-\infty$$

لأن $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

ب) استنتاج $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}u_n$. لدينا $u_n=\left(\dfrac{n}{2^n}\right)=\dfrac{e^{\ln n}}{e^{n\ln 2}}=e^{\ln n-n\ln 2}$

0.25

وبما أن: $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\ln n-n\ln 2=-\infty$

، وباستعمال نهاية مركب دالتين نجد : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}u_n=0$.

6) حساب المجموع S_n : **1**

$$S_n=\frac{1}{u_1}+\frac{2}{u_2}+\dots+\frac{n}{u_n}$$

ولدينا $v_n=\dfrac{u_n}{n}$ ومنه $\dfrac{n}{u_n}=\dfrac{1}{v_n}$

ومنه $S_n=\dfrac{1}{v_1}+\dfrac{1}{v_2}+\dots+\dfrac{1}{v_n}$

ونعلم أن $\dfrac{1}{v_n}=\dfrac{1}{\frac{1}{2^n}}=2^n$ بالتعويض نجد

$$S_n=2^1+2^2+\dots+2^n$$

S_n هو مجموع متتالية هندسية أساسها 2 وحدها الأول 1

$$S_n=1\left(\frac{2^n-1}{2-1}\right)=2^n-1$$

التمرين الثاني: (4نقاط)

1) سحب 3 كريات من نفس اللون "BBB ، RRR "

$$P(A)=\frac{C_4^3+C_5^3}{C_{11}^3}=\frac{4+10}{84}=\frac{14}{165}$$ **0.5**

B سحب 3 كريات من نفس الرقم "111،222،333 " **0.5**

$$P(B)=\frac{C_4^3+C_4^3+C_3^3}{C_{11}^3}=\frac{4+4+1}{165}=\frac{9}{165}=\frac{3}{55}\ .$$

C سحب على الأقل كرية بيضاء ، **0.5**

الحادثة العكسية $\overline{C}$ هي عدم سحب اي كرية بيضاء:

$$P(C)=1-P(\overline{C})=1-\frac{C_7^3}{C_{11}^3}=\frac{165-35}{165}=\frac{130}{165}=\frac{26}{33}\ .$$

$$P(A\cap B)=\frac{C_3^3+C_4^3}{C_{11}^3}=\frac{5}{165}=\frac{1}{33}$$ **0.5**

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B).$ **0.5**

$$=\frac{14}{165}+\frac{9}{165}-\frac{5}{165}=\frac{18}{165}=\frac{6}{55}$$

$$P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{5}{165}}{\frac{9}{165}}=\frac{5}{9}$$ **0.25**

0.25

ج) لدينا

$$P(A)\times P(B)=\frac{14}{165}\times\frac{3}{55}$$

$$=\frac{42}{9075}=\frac{14}{3025}\neq P(A\cap B)$$

ومنه الحادثتان A و B ليستا مستقلتان

3) تعيين قيم المتغير العشوائي X . $X=\{0;1;2;3\}$

0 سحب 3كرات تحمل أرقاما زوجية 0.25

1 سحب كرة تحمل رقم فردي و وكرتين تحملان رقمين زوجيين

2 سحب كرتين تحملان رقمين فرديين و كرة تحمل رقم زوجي

3 سحب 3 كرات تحمل أرقاما فردية

0.5

$$P(X=0)=\frac{C_4^3}{C_{11}^3}=\frac{4}{165}$$

$$P(X=1)=\frac{C_7^1C_4^2}{C_{11}^3}=\frac{42}{165}$$

$$P(X=2)=\frac{C_7^2C_4^1}{C_{11}^3}=\frac{84}{165}$$

$$P(X=3)=\frac{C_7^3}{C_{11}^3}=\frac{35}{165}$$

0.25

X_i	0	1	2	3
$p(X=X_i)$	$\frac{4}{165}$	$\frac{42}{165}$	$\frac{84}{165}$	$\frac{35}{165}$

حساب الأمل الرياضي :

$E(x)=0\frac{4}{165}+1\frac{42}{165}+2\frac{84}{165}+3\frac{35}{165}=\frac{315}{165}=\frac{21}{11}$.

التمرين الثالث: (4 نقاط)

1

1) الاجابة ب) $y=x+3$

التبرير : لدينا $f(x)=x+2+\frac{3}{e^x+3}$

وبما أن $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3}{e^x+3}=\frac{3}{0+3}=1$ فإن

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)-(x+2)-1=0$$

ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)-(x+3)=0$

ومنه المستقيم ذو المعادلة $y=x+3$ مقارب مائل ل (C_f)

بجوار $-\infty$

1

2) الجواب ب) 0.25

لدينا $P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=0.35$

ومنه $P(A\cup B)=1-0.35=0.65$

ومنه $P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$

$=0.4+0.5-0.65=0.25$

1

3) الاجابة أ) $\ln\left(\frac{\ln 4}{3}\right)$

التبرير : $\int_0^{\ln 2}e^{2x+a}dx=\ln 2$

ومنه $\left[\frac{1}{2}e^{2x+a}\right]_0^{\ln 2}=\ln 2$

ومنه $(\frac{1}{2}e^{2\ln 2+a})-(\frac{1}{2}e^{2(0)+a})=\ln 2$

$(\frac{1}{2}e^{\ln 4+a})-(\frac{1}{2}e^{a})=\ln 2$

$e^{\ln 4}e^a-e^a=2\ln 2$

$e^a(4-1)=\ln(2^2)$

$e^a=\frac{\ln 4}{3}$

$a=\ln\left(\frac{\ln 4}{3}\right)$

1

4) الاجابة أ) $-2<\alpha<3$

التبرير: المتتالية (U_n) متقاربة معناه

$-1<\frac{2\alpha-1}{5}<1$ ومنه $-5<2\alpha-1<5$

ومنه $\frac{-4}{2}<\alpha<\frac{6}{2}$ ومنه $-2<\alpha<3$

0.5

التمرين الرابع: (07 نقاط)

نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ ب : $g(x)=e^{-2x}-4x-2$.

1) المشتقة من أجل كل عدد حقيقي x لدينا :

$g'(x)=-2e^{-2x}-4<0$ ومنه g متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

0.5

2) الدالة g مستمرة و متناقصة تماما و$g(-0.16)=0.02$

و $g(-0.15)=-0.05$ ومنه $g(-0.15).g(-0.16)<0$

فانه حسب مبرهنة القيم المتوسطة والرتابة المعادلة

$g(x)=0$ تقبلا حلا وحيدا α حيث $-0.16<\alpha<-0.15$

0.5

3) اشارة $g(x)$:

x	$-\infty$ α $+\infty$
$g(x)$	$+$ 0 $-$

الجزء الثاني : 0.25

$f(x) = x + 3 - 2xe^{2x}$.

(1

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x + 3 - 2xe^{2x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} e^{2x}\left(\frac{x+3}{e^{2x}} - 2x\right)$$

بما أن $\begin{cases} \lim_{x\to+\infty} e^{2x} = +\infty \\ \lim_{x\to+\infty} -2x = -\infty \\ \lim_{x\to+\infty} \frac{x+3}{e^{2x}} = 0 \end{cases}$ فان $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

0.25

$\begin{cases} \lim_{x\to-\infty} 2xe^{2x} = 0 \\ \lim_{x\to-\infty} x + 3 = -\infty \end{cases}$ ومنه $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

0.5

2) أ) المشتقة: من أجل كل عدد حقيقي x فإن :

$$f'(x) = 1 - (2e^{2x}) + (2x(2e^{2x})) = 1 - (2e^{2x}) - (4xe^{2x})$$

$$.= e^{-2x}e^{2x} - (2e^{2x}) - (4xe^{2x}) = e^{2x}\left(e^{-2x} - 2 - 4x\right)$$

$$= e^{2x} g(x)$$

0.25

ب) اشارة المشتقة من اشارة $g(x)$ لأن $e^{2x} > 0$ ومنه:

الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-\infty; \alpha]$

الدالة f متناقصة تماما على المجال $[\alpha; +\infty[$

0.5

جدول التغيرات .

x	$-\infty$ α $+\infty$
$f'(x)$	$+$ 0 $-$
$f(x)$	$-\infty$ ↗ $f(\alpha)$ ↘ $-\infty$

0.5

3) أ)

$$\lim_{x\to-\infty} [f(x) - x] = \lim_{x\to-\infty} [x + 3 - 2xe^{2x} - x]$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \left[3 - \underbrace{2xe^{2x}}_{0}\right] = 3$$

استنتاج أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا (Δ)

لدينا $\lim_{x\to-\infty} [f(x) - x] = 3$ ومنه $\lim_{x\to-\infty} [f(x) - (x+3)] = 0$

ومنه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x + 3$

مقارب مائل ل (C_f) بجوار $-\infty$.

0.5

ب) دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) :

$$f(x) - y = f(x) - x - 3 = -2x\ e^{2x}$$

اشارة الفرق من إشارة $-2x$ ومنه :

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
$f(x) - y$	$+$ 0 $-$
الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ)	(C_f) فوق (Δ) ، (C_f) يقطع (Δ) ، (C_f) تحت (Δ)

4) تبيان أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) موازي ل (Δ)

أي لهما نفس معامل التوجيه : لتكن x_0 فاصلة نقطة التماس ومنه

$f'(x_0) = 1$ ومنه $1 - (2 + 4x_0)e^{2x_0} = 1$

ومنه $-(2 + 4x_0)e^{2x_0} = 0$ بما أن $e^{2x_0} \neq 0$ فان

ومنه $-2 - 4x_0 = 0$. $x_0 = -\frac{1}{2}$

معادلة المماس عند $x_0 = -\frac{1}{2}$ هي :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

0.5

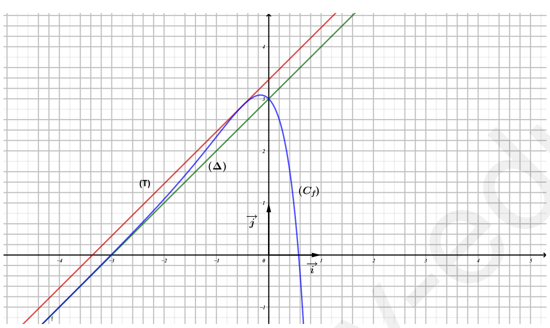
$$y = 1\left(x + \frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{-1}{2}\right)$$

$$y = x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 3 + e^{-1}$$

$$y = x + 3 + e^{-1}$$

5) الانشاء

1



6) قيم m

$$2xe^{2x} + m - 3 = 0$$
$$2xe^{2x} - 3 = -m$$
$$x - 2xe^{2x} + 3 = m + x$$
$$f(x) = x + m$$

المعادلة تقبل حلين متمايزين معناه المستقيمات التي معادلتها

$y = x + m$ (موازية للمستقيمين (Δ) و (T))

تقطع المنحنى (C_f) في نقطتين مختلفتين ومنه :

$1 < m < 3 + e^{-1}$.

0.25

0.5

7) λ عدد حقيقي سالب تماما

أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة جد بدلالة العدد λ : $\int_{\lambda}^{0} 2xe^{2x}dx$.

بفرض
$$\begin{cases} u(x)=2x & u'(x)=2 \\ v'(x)=e^{2x} & v(x)=\frac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$$

$$\int_{\lambda}^{0} 2xe^{2x}dx = \left[\frac{2x}{2}e^{2x}\right]_{\lambda}^{0} - \int_{\lambda}^{0}\left(\frac{2}{2}e^{2x}\right)dx$$
$$= \left[0-\lambda e^{2\lambda}\right] - \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_{\lambda}^{0}$$
$$= -\lambda e^{2\lambda} - \left(\frac{1}{2}e^{2(0)} - \frac{1}{2}e^{2\lambda}\right)$$
$$= (\frac{1}{2}-\lambda)e^{2\lambda} - \frac{1}{2}$$

ب) مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) و المستقيمين $x=0$ و $x=\lambda$.

0.25

$$S = \int_{\lambda}^{0}(f(x)-y)\,dx$$
$$= \int_{\lambda}^{0}((x-2xe^{2x}+3)-(x+3))\,dx$$
$$= \int_{\lambda}^{0}(-2xe^{2x})dx$$
$$= -((-\lambda)e^{2\lambda} + \frac{1}{2}e^{2\lambda} - \frac{1}{2})$$
$$= \lambda\ e^{2\lambda} - \frac{1}{2}e^{2\lambda} + \frac{1}{2}\ \text{U.a}$$

ج)حساب النهاية

$$\lim_{\lambda\to-\infty} S = \lim_{\lambda\to-\infty} \lambda\ e^{2\lambda} - \frac{1}{2}e^{2\lambda} + \frac{1}{2}$$

بما أن $\lambda < 0$ فان . $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} \lambda\ e^{2\lambda} = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{2}e^{2\lambda} = 0 \end{cases}$ ومنه $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} S = \frac{1}{2}$

0.25

facebook

pdf

MATH
Djellouli Djelloul