﴿ بسم الله الرحمن الرحيم ﴾

(1) دورة جوان 2008 – رياضيات – الموضوع الأول:

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[1\,;+\infty[$ بالعبارة:

$$f(x)=3+\sqrt{x-1}$$

يرمز (C) إلى منحنى f في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

(الوحدة على المحورين $2\ cm$)

1) أحسب $\lim\limits_{x\to 1^{>}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ وفسر النتيجة هندسيا.

- أدرس تغيرات الدالة f.

- باستعمال منحنى دالة الجذر التربيعي، أنشئ المنحنى (C).

- أرسم في نفس المعلم، المستقيم (D) الذي معادلته:

$$y=x$$

2) نعرف المتتالية (u_n) على المجموعة $\mathbb{N}$ كالتالي:

$$\begin{cases}u_0=2\\ u_{n+1}=f(u_n)\end{cases}$$

أ- باستعمال (D) و (C)، مثل الحدود u_0، u_1، u_2 على محور الفواصل.

ب- ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

3) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا:

$2\le u_n\le 5$ و $u_{n+1}>u_n$.

ب- استنتج أن (u_n) متقاربة. أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

(2) دورة جوان 2008 – رياضيات – الموضوع الثاني:

(u_n) المتتالية المعرفة بحدها الأول $u_0=2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n:

$$u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+1$$

1) أحسب u_1 و u_2 و u_3.

2) (v_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ:

$$v_n=u_n+\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

- برهن بالتراجع أن (v_n) متتالية ثابتة.

- استنتج عبارة v_n بدلالة n.

- أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

3) (w_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ:

$$w_n=\frac{2}{3}n-\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

- أحسب المجموع S حيث:

$$S=w_0+w_1+w_2+\cdots+w_n$$

(3) دورة جوان 2009 – رياضيات – الموضوع الأول:

1) نعرف الدالة العددية f على المجال $[1\,;5]$ بالعبارة:

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{5}{x}\right)$$

ليكن (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

الوحدة على المحورين $3\ cm$.

أ- أدرس تغيرات الدالة f.

ب- أنشئ، في نفس المعلم، المنحنى البياني (C) والمستقيم (Δ) الذي معادلته:

$$y=x$$

2) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0=5$ وبالعبارة:

$$u_{n+1}=\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{5}{u_n}\right)$$

أ- أحسب u_1 و u_2.

ب- استعمل المنحنى (C) والمستقيم (Δ) لتمثيل الحدود u_0، u_1 و u_2 على محور الفواصل.

3) أ- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n\ge\sqrt{5}$.

ب- بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

- ماذا تستنتج بالنسبة إلى تقارب (u_n)؟

4) أ- برهن أنه مهما يكن العدد الطبيعي n فإن:

$$\left(u_{n+1}-\sqrt{5}\right)\le\frac{1}{2}\left(u_n-\sqrt{5}\right)$$

ب- استنتج أن:

$$\left(u_{n+1}-\sqrt{5}\right)\le\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(u_0-\sqrt{5}\right)$$

- ماهي $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$؟

(4) دورة جوان 2009 – رياضيات – الموضوع الثاني:

(u_n) المتتالية المعرفة بحدها الأول $u_0=0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n:

$$u_{n+1}=3u_n+2n+1$$

(v_n) المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي:

$$v_n=u_n+\alpha n+\beta$$

حيث α و β عددان حقيقيان.

1) عين α و β بحيث تكون (v_n) متتالية هندسية، يطلب حساب أساسها وحدها الأول.

2) أحسب كلا من v_n و u_n بدلالة n.

3) أحسب المجموعين S و S' حيث:

$$S=v_0+v_1+v_2+\cdots+v_n$$
$$S'=u_0+u_1+u_2+\cdots+u_n$$

4) أ- عين حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 5.

ب- عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها u_n مضاعفا للعدد 5.

(5) دورة جوان 2011 – رياضيات – الموضوع الأول:

(u_n) متتالية حسابية متزايدة تماما حدودها أعداد طبيعية تحقق:

$$\begin{cases} u_4 = 15 \\ m + d = 42 \end{cases}$$

حيث:

$$\begin{cases} m = PPCM(u_3\,, u_5) \\ d = PGCD(u_3\,, u_5) \end{cases}$$

1) عين الحدين u_3 و u_5 ثم استنتج u_0.

2) أكتب u_n بدلالة n، ثم بين أن 2010 حد من حدود (u_n) وعين رتبته.

3) عين الحد الذي ابتداء منه يكون مجموع 5 حدود متعاقبة من (u_n) يساوي 10080.

4) n عدد طبيعي غير معدوم.

أ- أحسب بدلالة n المجموع S حيث:

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{2n}$$

ب- استنتج بدلالة n المجموعين S_1 و S_2 حيث:

$$S_1 = u_0 + u_2 + u_4 + \cdots + u_{2n}$$
$$S_2 = u_1 + u_3 + u_5 + \cdots + u_{2n-1}$$

(6) دورة جوان 2012 – رياضيات – الموضوع الثاني:

(u_n) هي المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$u_0 = 16$$

ومن أجل كل عدد طبيعي n:

$$u_{n+1} = 6u_n - 9$$

1) أ- أحسب بواقي قسمة كل من الحدود u_0، u_1، u_2، u_3 و u_4 على 7.

ب- خمن قيمة للعدد a وقيمة للعدد b بحيث:

$$\begin{cases} u_{2k} \equiv a\ [7] \\ \text{و} \\ u_{2k+1} \equiv b\ [7] \end{cases}$$

2) أ- برهن أنه، من أجل كل عدد طبيعي n:

$$u_{n+2} \equiv u_n\ [7]$$

ب- برهن بالتراجع أنه، من أجل كل عدد طبيعي k:

$$u_{2k} \equiv 2\ [7]$$

ثم استنتج أن:

$$u_{2k+1} \equiv 3\ [7]$$

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n:

$$v_n = u_n - \frac{9}{5}$$

أ- بين أن المتتالية (v_n) هندسية، يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب- أحسب، بدلالة n، كلا من u_n و S_n حيث:

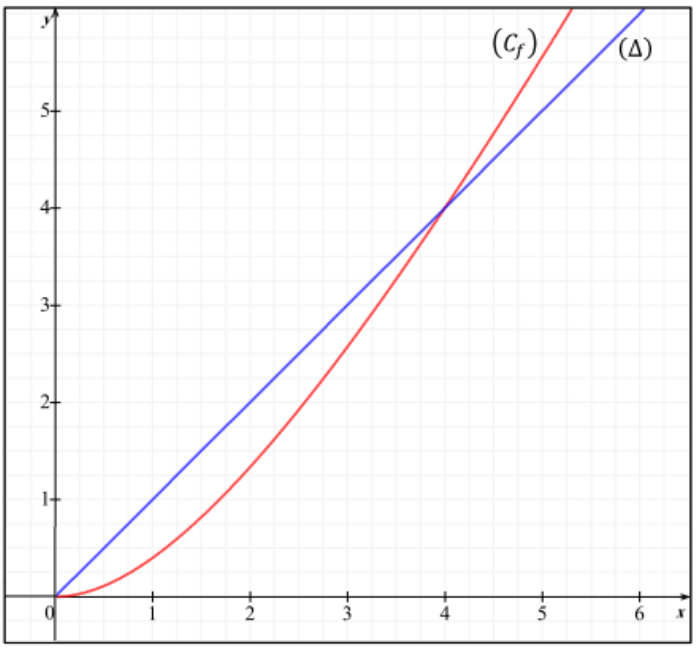
$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$

(7) دورة جوان 2014 – رياضيات – الموضوع الثاني:

الدالة العددية f معرفة على $[0\,;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{2x^2}{x+4}$$

(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ كما هو مبين في الشكل:



1) بين أن الدالة f متزايدة تماما.

2) (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = 3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n:

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

(Δ) المستقيم الذي معادلته:

$$y = x$$

أ- باستعمال المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ)، مثل على حامل محور الفواصل، الحدود: u_0، u_1، u_2، u_3 و u_4 دون حسابها.

ب- ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

3) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n:

$$0 \le u_n \le 3$$

ب- بين أن المتتالية (u_n) متناقصة.

جـ- استنتج أن (u_n) متقاربة.

4) أ- أدرس إشارة العدد:

$$7u_{n+1} - 6u_n$$

واستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n:

$$0 \le u_{n+1} \le \frac{6}{7}u_n$$

ب- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n:

$$0 \le u_n \le 3\left(\frac{6}{7}\right)^n$$

جـ- أحسب نهاية المتتالية (u_n) عندما يؤول n إلى $+\infty$.

(8) دورة جوان 2015 – تقني رياضي – الموضوع الثاني:

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول:

$$u_0 = 0$$

ومن أجل كل عدد طبيعي n:

$$u_{n+1} = \sqrt{6u_n + 16}$$

1) h الدالة المعرفة على المجال $\left[-\frac{8}{3}\,;+\infty\right[$ بما يلي:

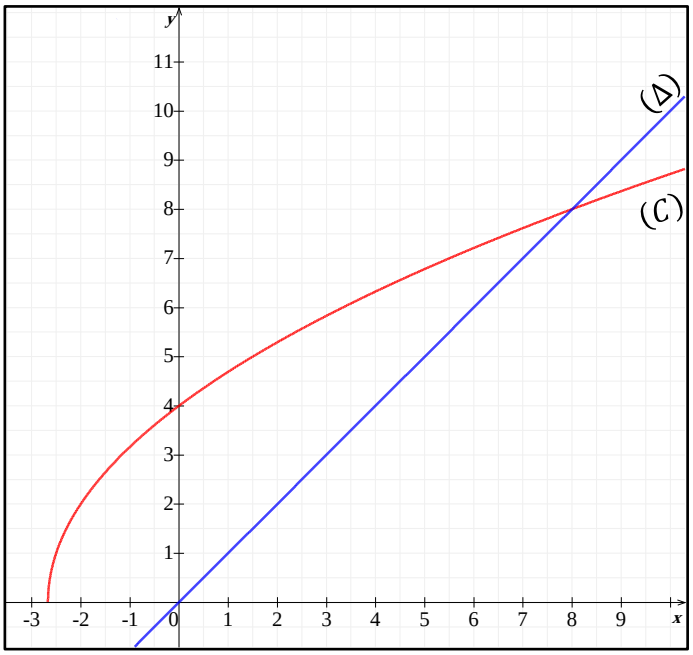
$$h(x) = \sqrt{6x + 16}$$

و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

و (Δ) المستقيم ذو المعادلة:

$$y = x$$

أنظر الشكل:



أ- مثل على حامل محور الفواصل الحدود: u_0، u_1، u_2 و u_3 دون حسابها مبرزا خطوط الإنشاء.

ب- ضع تخمينا حول اتجاه تغير (u_n) وتقاربها.

2) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n:

$$0 \le u_n \le 8$$

ب- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(8-u_n)(u_n+2)}{\sqrt{6u_n+16}+u_n}$$

جـ- استنتج اتجاه تغير (u_n).

3) أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n:

$$0 < 8 - u_{n+1} \le \frac{1}{2}(8-u_n)$$

ب- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n:

$$0 < 8 - u_n \le 8\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

ثم استنتج: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

(9) تمرين:

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة ب:

$$u_0 = \frac{1}{5}$$

ومن أجل كل عدد طبيعي n:

$$u_{n+1} = \frac{2u_n}{2u_n+1}$$

1) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n:

$$u_{n+1} = 1 - \frac{1}{2u_n+1}$$

2) أ- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n:

$$0 < u_n < \frac{1}{2}$$

ب- تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(1-2u_n)}{2u_n+1}$$

ثم بين أن المتتالية (u_n) متزايدة.

جـ- هل (u_n) متقاربة؟ عين نهايتها.

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n:

$$v_n = \frac{3^n \times u_n}{2u_n - 1}$$

أ- أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = 6$.

ب- أحسب عبارة v_n بدلالة n.

ثم استنتج أن:

$$u_n = \frac{2^n}{3+2^{n+1}}$$

جـ- أحسب: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

حظ سعيد

bouguetof.hamid@yahoo.fr