

❖ الأعداد المركبة ❖ شعبة العلوم التجريبية ❖ دورة جوان 2018 ❖ الموضوع الأول ❖

ومنه:

$$z_1 = \frac{\sqrt{3} - i}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}$$

$$z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}$$

$$z_2 = \frac{\sqrt{3} + i}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$$

$$z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$$

مجموعة حلول المعادلة (\*) هي:

$$S = \left\{ \left( \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2} \right); \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \right) \right\}$$

(2) كتابة  $z_A$  و  $z_B$  على الشكل الأسّي ثم تعيين قيم العدد الطبيعي  $n$

بحيث يكون:

$$\left( \frac{z_A}{z_B} \right)^n = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$$

كتابة  $z_A$  على الشكل الأسّي:

$$z_A = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$|z_A| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$$

$$|z_A| = 1$$

لتكن  $\theta_A$  عمدة العدد المركب  $z_A$  حيث:

$$\begin{cases} \cos \theta_A = \frac{1}{2} \\ \sin \theta_A = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\theta_A \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$$

ومنه:

$$z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

### التمرين رقم 03

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة  $\mathbb{C}$  المعادلة ذات المجهول  $z$  التالية:

$$z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0$$

(2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس  $(0; \vec{u}, \vec{v})$ .

$A, B$  و  $C$  ثلاث نقط من المستوي لاحتقاتها على الترتيب  $z_A, z_B$  و  $z_C$

حيث:

$$z_C = \overline{z_B} \text{ و } z_B = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}, \quad z_A = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(يرمز بـ  $\overline{z_B}$  لمرافق  $z_B$ ).

أكتب  $z_B$  و  $z_A$  على الشكل الأسّي ثم عين قيم العدد الطبيعي  $n$  بحيث

يكون:

$$\left( \frac{z_A}{z_B} \right)^n = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$$

(3) أ- تحقق أن:  $\frac{z_B}{z_C} = e^{i\frac{\pi}{3}}$  وحدد طبيعة المثلث  $OBC$ .

ب- استنتج أن  $B$  هي صورة  $C$  بدوران  $r$  يطلب تعيين عناصره

المميزة.

(4) نسمي  $(\gamma)$  مجموعة النقط  $M$  من المستوي ذات اللاحقة  $z$  التي

تحقق:

$$|z| = \left| \overline{z} - \frac{\sqrt{3} + i}{2} \right|$$

عين طبيعة المجموعة  $(\gamma)$  ثم عين صورتها بالدوران  $r$ .

### حل التمرين رقم 03

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة  $\mathbb{C}$  المعادلة ذات المجهول  $z$  التالية:

$$z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0 \dots (*)$$

نحسب المميز  $\Delta$ :

$$\Delta = (-\sqrt{3})^2 - 4 = 3 - 4 = -1 = i^2$$

$$\Delta = i^2$$

## ❖ الأعداد المركبة ❖ شعبة العلوم التجريبية ❖ دورة جوان 2018 ❖ الموضوع الأول

حيث:

$$\frac{1 + i\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = z_A = e^{i\frac{\pi}{3}} = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$$

ومنه:

$$e^{i\frac{n\pi}{6}} = \cos \frac{n\pi}{6} + i \sin \frac{n\pi}{6}$$

$$\cos \frac{n\pi}{6} + i \sin \frac{n\pi}{6} = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{n\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$\frac{n}{6} = \frac{1}{3} + 2k$$

$$n = 2 + 12k ; (k \in \mathbb{Z})$$

(3) أ- التحقق أن:  $\frac{z_B}{z_C} = e^{i\frac{\pi}{3}}$  وتحديد طبيعة المثلث  $OBC$ :

$$\frac{z_B}{z_C} = e^{i\frac{\pi}{3}} \quad \text{التحقق أن:}$$

$$\frac{z_B}{z_C} = \frac{z_B}{z_B} = \frac{e^{i\frac{\pi}{6}}}{e^{-i\frac{\pi}{6}}} = e^{i\frac{\pi}{6}} \times e^{i\frac{\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{6} + i\frac{\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$\frac{z_B}{z_C} = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

تحديد طبيعة المثلث  $OBC$ :

لدينا:

$$\frac{z_B}{z_C} = e^{i\frac{\pi}{3}} = z_A$$

ونكتب:

$$\frac{z_B - z_O}{z_C - z_O} = z_A$$

حسب خواص الطويلة نكتب:

$$\left| \frac{z_B - z_O}{z_C - z_O} \right| = |z_A|$$

$$\frac{|z_B - z_O|}{|z_C - z_O|} = 1$$

$$|z_B - z_O| = |z_C - z_O|$$

$$OB = OC \dots \textcircled{1}$$

كتابة  $z_B$  على الشكل الأسّي:

$$z_B = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$$

$$|z_B| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1$$

$$|z_B| = 1$$

لتكن  $\theta_B$  عمدة العدد المركب  $z_B$  حيث:

$$\begin{cases} \cos \theta_B = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta_B = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\theta_B \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$$

ومنه:

$$z_B = e^{i\frac{\pi}{6}}$$

تعيين قيم العدد الطبيعي  $n$  بحيث يكون:  $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$

لدينا:

$$\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$$

بالتعويض نكتب:

$$\left(\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{6}}}\right)^n = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$$

$$\left(e^{i\frac{\pi}{3}} \times e^{-i\frac{\pi}{6}}\right)^n = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$$

$$\left(e^{i\frac{\pi}{3} - i\frac{\pi}{6}}\right)^n = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$$

$$\left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^n = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$$

$$e^{i\frac{n\pi}{6}} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$$

❖ الأعداد المركبة ❖ شعبة العلوم التجريبية ❖ دورة جوان 2018 ❖ الموضوع الأول

$$|z| = |\bar{z} - z_B|$$

$$|\bar{z}| = |\bar{\bar{z}} - \bar{z}_B|$$

$$|z| = |z - z_C|$$

$$|z - z_O| = |z - z_C|$$

تذكر أن:

$$|\bar{\bar{z}}| = |z| \text{ و } |\bar{z}| = |z|$$

ونكتب:

$$OM = CM$$

ومنه:

المجموعة  $(\gamma)$  هي محور القطعة  $[OC]$ .

تعيين  $(\gamma')$  صورة  $(\gamma)$  بالدوران  $r$ :

بما أن:

- صورة النقطة  $O$  بالدوران  $r$  هي النقطة  $O$  (نقطة صامدة).

- صورة النقطة  $C$  بالدوران  $r$  هي النقطة  $B$ .

فإن:

صورة المجموعة  $(\gamma)$  بالدوران  $r$  هي المجموعة  $(\gamma')$  محور القطعة  $[OB]$ .



جميع الحقوق محفوظة

- BAC -

عبد الحميد

حسب خواص العمدة نكتب:

$$\arg\left(\frac{z_B - z_O}{z_C - z_O}\right) = \arg(z_A)$$

$$\arg\left(\frac{z_B - z_O}{z_C - z_O}\right) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$$

$$(\overrightarrow{OC}; \overrightarrow{OB}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi] \dots \textcircled{2}$$

من ① و ②: المثلث  $OBC$  متقايس الأضلاع.

ب- استنتاج أن  $B$  هي صورة  $C$  بدوران  $r$  يطلب تعيين عناصره المميزة:

لدينا:

$$\frac{z_B - z_O}{z_C - z_O} = z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

ومنه:

$$z_B - z_O = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_C - z_O)$$

هذه الكتابة هي الصيغة المختصرة للدوران  $r$  (لأن:  $|z_A| = 1$ ) الذي

مركزه المبدأ  $O$  وزاويته  $\frac{\pi}{3}$  (لأن:  $\arg(z_A) = \frac{\pi}{3}$ ) ويحول النقطة  $C$  إلى

النقطة  $B$ .

نستنتج أن:

$B$  هي صورة  $C$  بدوران  $r$  مركزه المبدأ  $O$  وزاويته  $\frac{\pi}{3}$ .

4) تعيين طبيعة المجموعة  $(\gamma)$  ثم تعيين صورتها بالدوران  $r$ :

تعيين طبيعة المجموعة  $(\gamma)$ :

لدينا:

$$|z| = \left| \bar{z} - \frac{\sqrt{3} + i}{2} \right|$$

$$|z| = \left| \bar{z} - \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) \right|$$

$$|z| = |\bar{z} - z_B|$$

$$|z| = |\bar{z} - z_B|$$

حسب خواص الطويلة نكتب: