

تمرين شامل في الهندسة الفراغية

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ النقط : $A(1;0;-1)$ ، $B(2;2;3)$ ، $C(3;1;-2)$ ، $D(-4;2;1)$

1. بين أن النقط A ، B ، C تعين مستويا
2. عين شعاعا ناظميا للمستوي (ABC)
3. استنتج معادلة ديكرتية للمستوي (ABC)
4. أثبت أن المثلث ABC قائم
5. أحسب مساحة المثلث ABC
6. عين بعد النقطة D عن المستوي (ABC) ، ثم احسب حجم رباعي الوجوه $DABC$
7. عين ω مركز سطح الكرة (S) الذي معادلته $x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 6z - 15 = 0$
8. أحسب بعد النقطة ω عن المستوي (ABC)
9. اعط التمثيل الوسيطى للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة ω و يعامد المستوي (ABC)
10. عيّن طبيعة و خصائص تقاطع المستوي (ABC) و سطح الكرة (S)
11. ليكن (P) المستوي الذي معادلته: $x + y + z - 1 = 0$. بين أنّ المستويين (P) و (ABC) متعامدان
12. اعط التمثيل الوسيطى للمستقيم (Δ') تقاطع (P) و (ABC)
13. عين بعد النقطة D عن المستوي (P) ، ثم استنتج المسافة بين D و (Δ')
14. لتكن $M_{t'}$ نقطة من المستقيم (Δ')
 - أ. عبّر عن المسافة $DM_{t'}$ بدلالة t'
 - ب. أدرس اتجاه تغيّر الدالة $f(t') = DM_{t'}$
 - ج. استنتج بطريقة ثانية المسافة بين D و (Δ')
15. ادرس الوضع النسبي للمستقيمين (Δ) و (Δ')
16. اعط المعادلة الديكرتية لـ (Q) المستوي المحوري للقطعة $[MN]$ حيث $M(1;0;0)$ و $N(-1;0;2)$
17. عيّن تقاطع المستويات الثلاث (P) ، (Q) و (ABC)
18. عين إحداثيات النقطتين G و G' حيث G مركز ثقل المثلث ABC و G' مرجح الجملة $\{(A;3), (B;-1), (C;1)\}$
19. عيّن في كل حالة من الحالات التالية مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق :

$$أ. \quad \|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\| = 6$$

$$ب. \quad \|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\| = \|3\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC}\|$$

$$ج. \quad \|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\| = \|2\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC}\|$$

$$د. \quad (\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC})(3\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC}) = 0$$

$$هـ. \quad (3\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC})(\vec{MA} - \vec{MB}) = 0$$

$$و. \quad MA^2 + MB^2 + MC^2 = 30$$

تصحيح الموضوع

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$: النقطة $D(-4;2;1)$ ، $C(3;1;-2)$ ، $B(2;2;3)$ ، $A(1;0;-1)$

1- بين أن النقط C ، B ، A تعين مستويا

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} ; \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} ; \frac{1}{2} \neq \frac{2}{1} ; \overrightarrow{AB} \# \overrightarrow{AC} ;$$

2- عين شعاعا ناظميا للمستوي (ABC)

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} ; \begin{cases} a + 2b + 4c = 0 \\ 2a + b - c = 0 \end{cases} ; \begin{cases} a + 2b + 4c = 0 \\ 8a + 4b - 4c = 0 \end{cases} ; 9a + 6b = 0 ; b = -\frac{3}{2}a$$

$$2a - \frac{3}{2}a - c = 0 ; c = \frac{1}{2}a ; a = 2 ; \vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3- استنتج معادلة ديكارتية للمستوي (ABC)

$$(ABC): 2x - 3y + z + d = 0 ; A \in (ABC): 2 - 1 + d = 0 ; d = -1$$

$$(ABC): 2x - 3y + z - 1 = 0$$

4- أثبت أن المثلث ABC قائم

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 2 + 2 - 4 = 0 ; \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$$

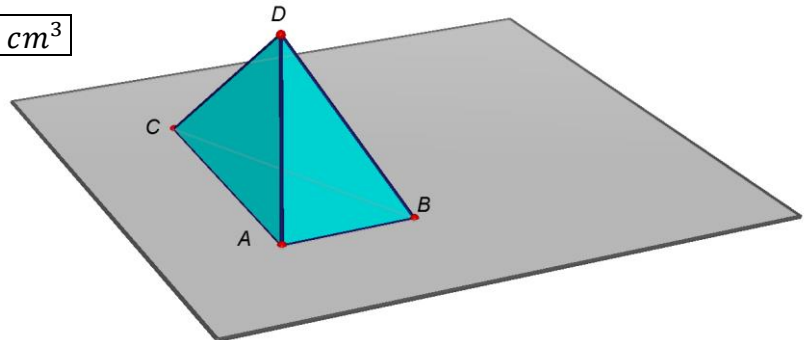
5- أحسب مساحة المثلث ABC

$$S = \frac{AB \times AC}{2} = \frac{\sqrt{1^2 + 2^2 + 4^2} \times \sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}}{2} = \frac{\sqrt{21} \times \sqrt{6}}{2} = \frac{3}{2} \sqrt{14} \text{ cm}^2$$

6- عين بعد النقطة D عن المستوي (ABC) ، ثم احسب حجم رباعي الوجوه $DABC$

$$d(D, (ABC)) = \frac{|2(-4) - 3(2) + 1 - 1|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2}} = \frac{14}{\sqrt{14}} = \sqrt{14}$$

$$V = \frac{1}{3} S \times h = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} \sqrt{14} \cdot \sqrt{14} = \frac{14}{2} = 7 \text{ cm}^3$$



7- عين w مركز سطح الكرة (S) الذي معادلته $x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 6z - 15 = 0$

$$x^2 + (y + 1)^2 - 1^2 + (z - 3)^2 - 3^2 - 15 = 0$$

$$x^2 + (y + 1)^2 + (z - 3)^2 = 25; \boxed{w(0; -1; 3); r = \sqrt{25} = 5}$$

8- أحسب بعد النقطة w عن المستوي (ABC)

$$d(w, (ABC)) = \frac{|2(0) - 3(-1) + 3 - 1|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2}} = \frac{5}{\sqrt{14}} = \boxed{\frac{5\sqrt{14}}{14}}$$

9- اعط التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة w و يعامد المستوي (ABC)

$$M(x; y; z) \in (\Delta); \overrightarrow{wM} = t \cdot \vec{n}; \begin{cases} x = 2t \\ y = -1 - 3t; t \in R \\ z = 3 + t \end{cases}$$

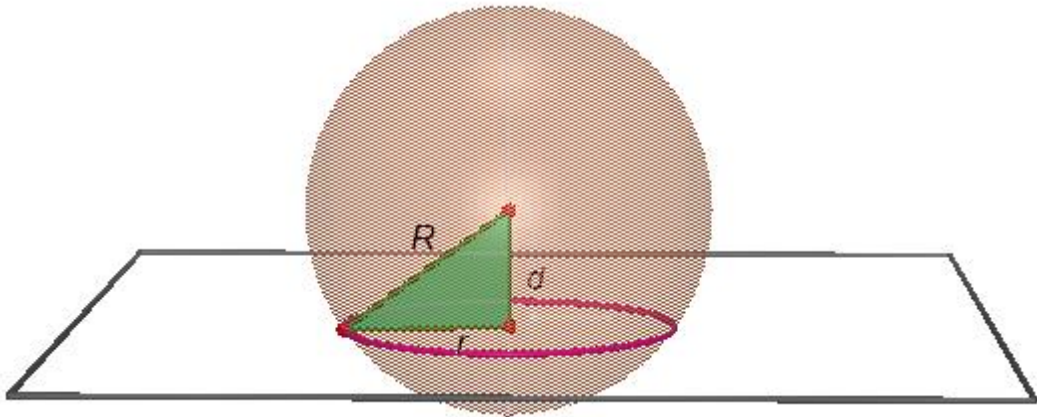
10- عيّن طبيعة و خصائص تقاطع المستوي (ABC) و سطح الكرة (S)

$$d(w, (ABC)) < r; (S) \cap (ABC) = (C')$$

$$2(2t) - 3(-1 - 3t) + 3 + t - 1 = 0; 14t = -5; t = -\frac{5}{14};$$

$$\boxed{w' \left(-\frac{5}{7}; +\frac{1}{14}; \frac{37}{14} \right)}$$

$$R^2 = d^2 + r^2; r^2 = R^2 - d^2 = 5^2 - \frac{25}{14}; \boxed{r = 5\sqrt{\frac{13}{14}}}$$



11- ليكن (P) المستوي الذي معادلته: $x + y + z - 1 = 0$. بيّن أنّ المستويين (P) و (ABC) متعامدان

$$\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{n}' \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 - 3 + 1 = 0; \vec{n} \perp \vec{n}'; (ABC) \perp (P)$$

12- اعط التمثيل الوسيطى للمستقيم (Δ') تقاطع (P) و (ABC)

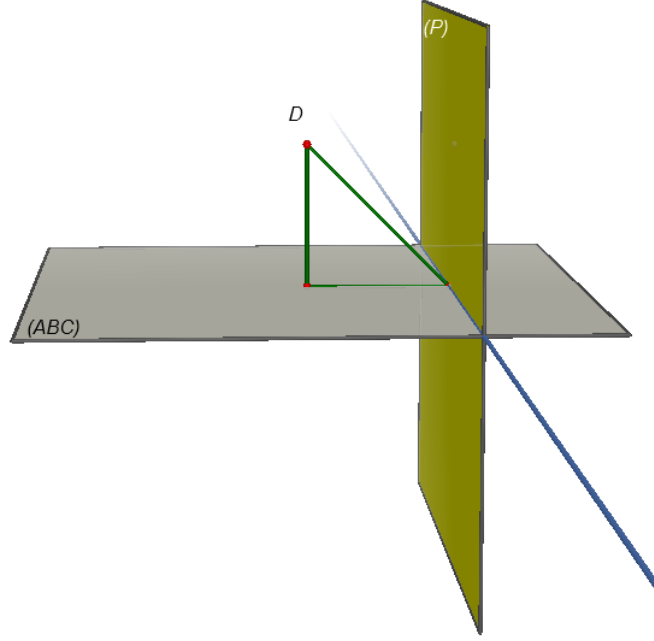
$$\begin{cases} 2x - 3y + z - 1 = 0 \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases}; x - 4y = 0; x = 4y; 4y + y + z - 1 = 0; z = -5y + 1$$

$$(\Delta') : \begin{cases} x = 4t' \\ y = t' \\ z = 1 - 5t' \end{cases}; t' \in R$$

13- عين بعد النقطة D عن المستوي (P) ، ثم استنتج المسافة بين D و (Δ')

$$d(D, (P)) = \frac{|-4 + 2 + 1 - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$d^2(D, (\Delta')) = d^2(D, (ABC)) + d^2(D, (P)) = 14 + \frac{4}{3} = \frac{46}{3}; d(D, (\Delta')) = \sqrt{\frac{46}{3}} = \frac{\sqrt{138}}{3}$$



14- $M_{t'}$ نقطة من المستقيم (Δ') ، أي $M_{t'}(4t', t', 1 - 5t')$

$$DM_{t'} = \sqrt{(4t' + 4)^2 + (t' - 2)^2 + (-5t')^2} = \sqrt{42t'^2 + 28t' + 20} \quad \text{أ.}$$

$$f'(t') = 0 \Rightarrow 21t' + 7 = 0 \Rightarrow t' = -\frac{1}{3}, f'(t') = \frac{84t' + 28}{2\sqrt{42t'^2 + 28t' + 20}} = \frac{2(21t' + 7)}{\sqrt{42t'^2 + 28t' + 20}} \quad \text{ب.}$$

$$t' \in]-\infty; -\frac{1}{3}[: f'(t') < 0 \Rightarrow f' \text{ متناقصة}; t' \in]-\frac{1}{3}; +\infty[: f'(t') \geq 0 \Rightarrow f' \text{ متزايدة}$$

$$d(D, (\Delta')) = f\left(-\frac{1}{3}\right) = \sqrt{\frac{42}{9} - \frac{28}{3} + 20} = \frac{\sqrt{138}}{3} \quad \text{ج. مما سبق نستنتج أن المسافة بين } D \text{ و } (\Delta') \text{ هي:}$$

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}; \vec{u}' \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}; \frac{2}{4} \neq -\frac{3}{1}; \vec{u} \neq \vec{u}';$$

$$\begin{cases} 2t = 4t' \\ -1 - 3t = t' \end{cases}; \begin{cases} 2t = 4(-1 - 3t) \\ -1 - 3t = t' \end{cases}; \begin{cases} t = -\frac{2}{7} \\ t' = -\frac{1}{7} \end{cases}$$

$$M_{(\Delta)} \left(-\frac{4}{7}; -\frac{1}{7}; \frac{19}{7} \right); M'_{(\Delta')} \left(-\frac{4}{7}; -\frac{1}{7}; \frac{12}{7} \right); \boxed{\text{(\Delta) و (\Delta') لا ينتميان إلى نفس المستوي}}$$

16- اعط المعادلة الديكارتيّة لـ (Q) المستوي المحوري للقطعة [MN] حيث $M(1; 0; 0)$ و $N(-1; 0; 2)$

$$\overrightarrow{MN} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}; H(0; 0; 1); (Q) : -2x + 2z + d = 0; H \in (Q) : 2 + d = 0; d = -2$$

$$\boxed{(Q) : -2x + 2z - 2 = 0}$$

17- عيّن تقاطع المستويات الثلاث (P)، (Q) و (ABC)

$$(Q) \cap (\Delta') : -2(4t') + 2(1 - 5t') - 2 = 0; -18t' = 0; t' = 0$$

$$\boxed{(Q) \cap (P) \cap (ABC) = \{(0; 0; 1)\} = \{H\}}$$

18- عين إحداثيات النقطتين G و G' حيث G مركز ثقل المثلث ABC و G' مرجح الجملة $\{(A; 3), (B; -1), (C; 1)\}$

$$G \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3} \right); \boxed{G(2; 1; 0)}$$

$$G' \left(\frac{3x_A - x_B + x_C}{3}; \frac{3y_A - y_B + y_C}{3}; \frac{3z_A - z_B + z_C}{3} \right); \boxed{G' \left(\frac{4}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{8}{3} \right)}$$

19- عيّن في كل حالة من الحالات التالية مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق :

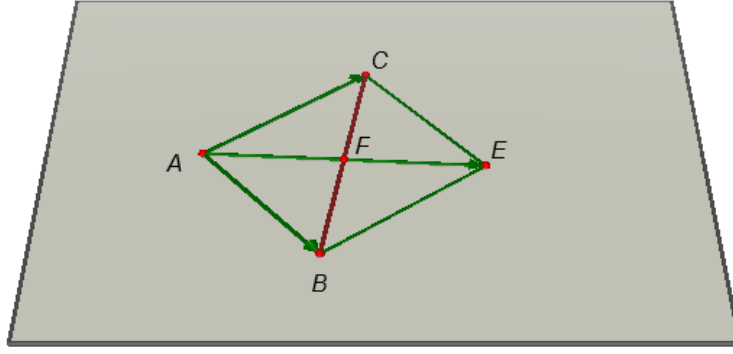
$$\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 6 \Rightarrow 3\|\overrightarrow{MG}\| = 6 \Rightarrow \|\overrightarrow{MG}\| = 2$$

مجموعة النقط M هي سطح كرة مركزها G و نصف قطرها 2

$$\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| \Rightarrow 3\|\overrightarrow{MG}\| = 3\|\overrightarrow{MG'}\| \Rightarrow \|\overrightarrow{MG}\| = \|\overrightarrow{MG'}\|$$

مجموعة النقط M هي المستوي المحوري للقطعة [GG']

$$\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| \Rightarrow 3\|\overrightarrow{MG}\| = \|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\|$$



$$3\|\overrightarrow{MG}\| = \|\overrightarrow{AE}\| = 2\|\overrightarrow{AF}\| \Rightarrow \|\overrightarrow{MG}\| = \frac{2}{3}\|\overrightarrow{AF}\|$$

بما أن الرباعي $ABEC$ متوازي الأضلاع ، فإن النقطة F هي تقاطع القطرين (AE) و (BC) ، أي F منتصف $[BC]$

$$F\left(\frac{5}{2}; \frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \|\overrightarrow{AF}\| = \sqrt{\left(\frac{5}{2}-1\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}+1\right)^2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{2}{3}\|\overrightarrow{AF}\| = \sqrt{3}$$

مجموعة النقط M هي سطح كرة مركزها G و نصف قطرها $\sqrt{3}$

$$(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})(3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0 \Rightarrow 3\overrightarrow{MG} \cdot 3\overrightarrow{MG}' = 0 \Rightarrow \overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{MG}' = 0$$

مجموعة النقط M هي سطح كرة قطرها $[GG']$

$$(3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}) = 0 \Rightarrow 3\overrightarrow{MG}' \cdot \overrightarrow{BA} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{MG}' \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

مجموعة النقط M هي المستوي الذي يشمل G' و يعامد \overrightarrow{AB}

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 30; \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2 = 30; (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})^2 = 30$$

$$3\overrightarrow{MG}^2 + \overrightarrow{GA}^2 + \overrightarrow{GB}^2 + \overrightarrow{GC}^2 + 2\overrightarrow{MG}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) = 30$$

$$3\overrightarrow{MG}^2 = 30 - \overrightarrow{GA}^2 - \overrightarrow{GB}^2 - \overrightarrow{GC}^2$$

$$\overrightarrow{GA}^2 = 3; \overrightarrow{GB}^2 = 10; \overrightarrow{GC}^2 = 5$$

$$3\overrightarrow{MG}^2 = 12 \Rightarrow \overrightarrow{MG}^2 = 4$$

مجموعة النقط M هي سطح كرة مركزها G و نصف قطرها 2

