الجمهورية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — مديرية التربية لولاية سيدي بلعباس

امتحان التعليم الثانوي — ثانوية العقيد سي الحواس

الشعبة: تسيير وإقتصاد — يوم :2024/02/04

اختبار الفصل الثاني :في مادة الرياضيات — المدة:2ساو30د

على المترشح حل الموضوع :

التمرين الأول: (04نقاط)

إختر الإجابة الصحيحة مع التعليل.

1) $u_n=\frac{1}{2}n+3-n$ متتالية حسابية من أجل كل عدد طبيعي n أساسها: $(1p)$

أ- $\frac{1}{2}$.　　ب- -1.　　ج- $-\frac{1}{2}$.

2)القيمة المتوسطة للدالة $f(x)=e^{2x}$ على المجال $[0;\ln 3]$: $(1p)$

أ- e^4.　　ب- $\frac{4}{\ln 3}$.　　ج- e^2.

3)الكلفة المتوسطة $C_M(4)$ علما أن $C_T(x)=\ln x$ هي: $(1p)$

أ- $\frac{\ln 4}{4}$.　　ب- $\frac{\ln 5}{\ln 4}$.　　ج- $\ln 5\times\ln 4$.

4)قيم العدد الحقيقي β علما أن $c=\beta+1, b=\sqrt{3}, a=\beta-1$ ثلاثة حدود متتابعة لمتتالية هندسية هي: $(1p)$

أ- $\{-3;3\}$.　　ب- $\{-2;2\}$.　　ج- $\{-1;1\}$.

التمرين الثاني: (06نقاط)

I) المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $\begin{cases}9u_{n+1}=3u_n+4\\ u_0=1\end{cases}$.

1)أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n\succ\frac{2}{3}$. $(1p)$

ب-بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما. $(1p)$

2)نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n=u_n-\frac{2}{3}$.

أ-بين أن متتالية (v_n) هندسية يطلب تحديد أساسها وحدها الأول. $(1p)$

ب-اكتب عبارة v_n بدلالة n. $(0.5p)$

ج-استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n=\frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^n+2\right]$. $(1p)$

ج-ماهي نهاية المتتالية (u_n) ؟ $(0.5p)$

3)أحسب المجموع S_n بدلالة n حيث: $S_n=u_0+u_1+u_2+...+u_n$. $(1p)$

التمرين الثالث: (10نقاط)

I) نعتبر g دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=e^{2x}+2e^{x}-1$.

(C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أحسب: $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$. $(0.5p)$

2) أ-أدرس إتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها. $(0.5p)$

ب-بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]-1;-0.75[$. $(1p)$

ج-إستنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$. $(0.25p)$

II) نعتبر f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=-\dfrac{e^{2x}+1}{e^{x}+1}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. $(f(\alpha)=-0.83)$

1) أ- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا. $(0.75p)$

2) أ-بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=\dfrac{-e^{x}\times g(x)}{(e^{x}+1)^{2}}$. $(1p)$

ب-أدرس إتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها. $(1p)$

3) أكتب معادلة المماس (T) عند النقطة $B(0;-1)$. $(0.5p)$

4) أرسم في المعلم المتعامد والمتجانس المنحنى (C_f) والمماس (T). $(f(\alpha)=-0.83)$ $(1p)$

5) نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x)=\dfrac{1}{2}e^{2x}+2e^{x}-x+c$.

أ-بين أن الدالة h دالة أصلية للدالة g . $(1p)$

ب-أرسم (C_g) ثم أحسب مساحة الحيز المستوي المحصور بين المنحنى (C_g) والمستقيمات $y=0$ و $x=0$, $x=\ln 2$. $(1p)$

III) تنتج ورشة خياطة في اليوم 3 ألاف قميص.

تنمذج الكلفة الهامشية C_m (الوحدة 1000دينار) لإنتاج قطعة إضافية على المجال $[0;3]$ بالدالة g حيث: $C_m(x)=g(x)$.

نرمز بـ $C_T(x)$ للكلفة الإجمالية والتي تمثل الدالة الأصلية للدالة g .

1) أ-عبر عن الكلفة الإجمالية $C_T(x)$ بدلالة x علما أن الكلفة الإجمالية لإنتاج ألف قميص هي $\dfrac{1}{2}e-2e$. $(1p)$

2) قدر قيمة الكلفة الإجمالية لإنتاج ألفين قميص. $(0.5p)$

التمرين الأول: (04نقاط)

1) $u_n=\frac{1}{2}n+3-n$ متتالية حسابية أساسها:

الإختيار ج- $-\frac{1}{2}$. $(0.5p)$ لأن: $u_n=-\frac{1}{2}n+3$. $(0.5p)$

2) القيمة المتوسطة للدالة $f(x)=e^{2x}$ على المجال $[0;\ln 3]$:

الإختيار ب- $\frac{4}{\ln 3}$. $(0.5p)$ لأن:

$$m=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

$$m=\frac{1}{\ln 3-0}\int_0^{\ln 3} e^{2x}dx$$

$$m=\frac{1}{\ln 3}\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^{\ln 3}$$

$$m=\frac{1}{\ln 3}\left(\frac{1}{2}\left(e^{2\ln 3}-e^{2(0)}\right)\right)$$

$$m=\frac{1}{\ln 3}\left(\frac{1}{2}\left(e^{\ln 3^2}-1\right)\right)$$

$$m=\frac{1}{\ln 3}\left(\frac{1}{2}\left(e^{\ln 3^2}-1\right)\right)$$

$$m=\frac{1}{\ln 3}\left(\frac{1}{2}(9-1)\right)$$

$$m=\frac{4}{\ln 3}\quad(0.5p)$$

3) الكلفة المتوسطة $C_m(4)$ علما أن $C_T(x)=\ln x$ هي:

الإختيار أ- $\ln 5-\ln 4$. $(0.5p)$ لأن:

$$C_m(x)=C_T(x+1)-C_T(x)$$

$$C_m(x)=\ln(x+1)-\ln(x)$$

$$C_m(4)=\ln(4+1)-\ln(4)\quad(0.5p)$$

$$C_m(4)=\ln(5)-\ln(4)$$

4) قيم العدد الحقيقي β علما أن $c=\beta+1, b=\sqrt{3}, a=\beta-1$ ثلاثة حدود متتابعة لمتتالية هندسية هي:

الإختيار ب- $\{-2;2\}$. $(0.5p)$ لأن:

$$a\times c=b^2$$

$$(\beta-1)(\beta+1)=\left(\sqrt{3}\right)^2$$

$$\beta^2-1=3$$

$$\beta^2=4\quad(0.5p)$$

$$\beta^2=(\pm 2)^2$$

$$\begin{cases}\beta=2\\ \beta=-2\end{cases}$$

التمرين الثاني: (06نقاط)

المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $\begin{cases}9u_{n+1}=3u_n+4\\ u_0=1\end{cases}$.

1) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $P(n):u_n\succ\frac{2}{3}$.

التحقق من صحة $P(0)$ الخاصية:

$$P(0):u_0\succ\frac{2}{3}$$

$$P(0):1\succ\frac{2}{3}$$

إذن الخاصية $P(0)$ محققة. $(0.5p)$

نفرض صحة الخاصية $P(n)$ لكل n من $\mathbb{N}$.

نبرهن صحة الخاصية $P(n+1)$ لكل n من $\mathbb{N}$.

$$u_n \succ \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{3}u_n \succ \frac{2}{9}$$

$$\frac{1}{3}u_n + \frac{4}{9} \succ \frac{2}{9} + \frac{4}{9}$$

$$u_{n+1} \succ \frac{6}{9}$$

$$u_{n+1} \succ \frac{2}{3}$$

إذن صحة الخاصية $P(n+1)$ لكل n من $\mathbb{N}$. $(0.5p)$

ومنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n \succ \frac{2}{3}$.

ب-بين أن المتتالية (u_n) متناقصة.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}u_n + \frac{4}{9} - u_n$$

$$u_{n+1} - u_n = \left(\frac{1}{3} - 1\right)u_n + \frac{4}{9}$$

$(0.5p)$

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{2}{3}u_n + \frac{4}{9}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}\left(-u_n + \frac{2}{3}\right)$$

ونعلم أن:

$$u_n \succ \frac{2}{3}$$

$(0.5p)$ $$-u_n \prec -\frac{2}{3}$$

$$-u_n + \frac{2}{3} \prec 0$$

ومنه المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

2)نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n ب: $v_n = u_n - \frac{2}{3}$.

أ-بين أن متتالية (v_n) هندسية يطلب تحديد أساسها وحدها الأول.

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{2}{3}$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{4}{9} - \frac{2}{3}$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{4}{9} - \frac{6}{9}$$

$(0.5p)$

$$v_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - \frac{2}{9}$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{3}\left(u_n - \frac{2}{3}\right)$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n$$

ومنه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{3}$ وحدها الأول

$v_0 = u_0 - \frac{2}{3} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$. $(0.5p)$

ب-اكتب عبارة v_n بدلالة n.

$(0.5p)$ $v_n = v_0 \times q^n = \frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^n$

ج-استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n = \frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^n + 2\right]$.

$$v_n = u_n - \frac{2}{3}$$

$$v_n + \frac{2}{3} = u_n$$

$(1p)$ $u_n = v_n + \frac{2}{3}$

$$u_n = \frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{2}{3}$$

$$u_n = \frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^n + 2\right]$$

د-ماهي نهاية المتتالية (u_n) ؟

بما أن $-1 \prec \frac{1}{3} \prec 1$ فإن $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ ومنه $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{2}{3}$. $(0.5p)$

3)أحسب المجموع S_n بدلالة n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$.

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$$

$(1p)$ $S_n = u_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)$

$$S_n = 1\left(\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}\right)$$

$$S_n = 1\left(\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\frac{3}{3}-\frac{1}{3}}\right)$$

$$S_n = 1\left(\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\frac{2}{3}}\right)$$

$$S_n = \frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$$

التمرين الثالث: (10نقاط)

I)نعتبر g دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = e^{2x} + 2e^x - 1$.

1)أحسب: $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)$.

$\lim_{x\to-\infty} g(x) = -1$ لأن $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$. $(0.25p)$

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ لأن $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$. $(0.25p)$

2) أ-أدرس إتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

$g'(x)=2e^{2x}+2e^{x}$

$g'(x)=2e^{x+x}+2e^{x}$ $(0.25p)$

$g'(x)=2e^{x}e^{x}+2e^{x}$

$g'(x)=2e^{x}\left(e^{x}+1\right)$

بما أن $e^{x}\succ 0$ فإنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $g'(x)\succ 0$ إذن g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.
$(0.25p)$

ب-بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]-1;-0.75[$.

g دالة مستمرة ومتزايدة تماما على $]-1;-0.75[$.

وبما أن $\begin{cases} g(-1)\prec 0 \\ g(-1.75)\succ 0 \end{cases}$ فإن $g(-1)\times g(-1.75)\prec 0$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على $]-1;-0.75[$. $(1p)$

ج-إستنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$. $(0.25p)$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

II) نعتبر f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=-\dfrac{e^{2x}+1}{e^{x}+1}$.

1)أ- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}=0$. $(0.25p)$

$$(0.5p).\begin{cases} f(x)=-\dfrac{e^{x}\left(e^{x}+\dfrac{1}{e^{x}}\right)}{e^{x}\left(1+\dfrac{1}{e^{x}}\right)}=-\dfrac{\left(e^{x}+\dfrac{1}{e^{x}}\right)}{\left(1+\dfrac{1}{e^{x}}\right)} \text{ لأن } \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}=+\infty;\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^{x}}=0 \end{cases}$$

2)أ-بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=\dfrac{-e^{x}\times g(x)}{\left(e^{x}+1\right)^{2}}$.

$$f'(x)=-\frac{2e^{2x}\left(e^{x}+1\right)-e^{x}\left(e^{2x}+1\right)}{\left(e^{x}+1\right)^{2}}$$

$$f'(x)=-\frac{2e^{2x}e^{x}+2e^{2x}-e^{x}e^{2x}-e^{x}}{\left(e^{x}+1\right)^{2}}$$

$$f'(x)=-\frac{2e^{2x+x}+2e^{2x}-e^{x+2x}-e^{x}}{\left(e^{x}+1\right)^{2}}$$

$$f'(x)=-\frac{2e^{3x}+2e^{2x}-e^{3x}-e^{x}}{\left(e^{x}+1\right)^{2}}$$

$$f'(x)=-\frac{(2-1)e^{3x}+2e^{2x}-e^{x}}{\left(e^{x}+1\right)^{2}}$$

$$f'(x)=-\frac{e^{x}e^{2x}+2e^{x}e^{x}-e^{x}}{\left(e^{x}+1\right)^{2}}$$

$$(1p)\quad f'(x)=-\frac{e^{x}\left(e^{2x}+2e^{x}-1\right)}{\left(e^{x}+1\right)^{2}}$$

$$f'(x) = -\frac{e^x g(x)}{(e^x+1)^2}$$

ب-أدرس إتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

بما أن $e^x \succ 0$ و $(e^x+1)^2$ فإن إشارة $f'(x)$ من إشارة $-g(x)$. (1p)

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	-1	↗	$f(\alpha)$	↘	$-\infty$

3)أكتب معادلة الماس (T) عند النقطة $B(0;-1)$.

$(T): y = f'(a)(x-a) + f(a)$

$(T): y = f'(0)(x-0) + f(0)$

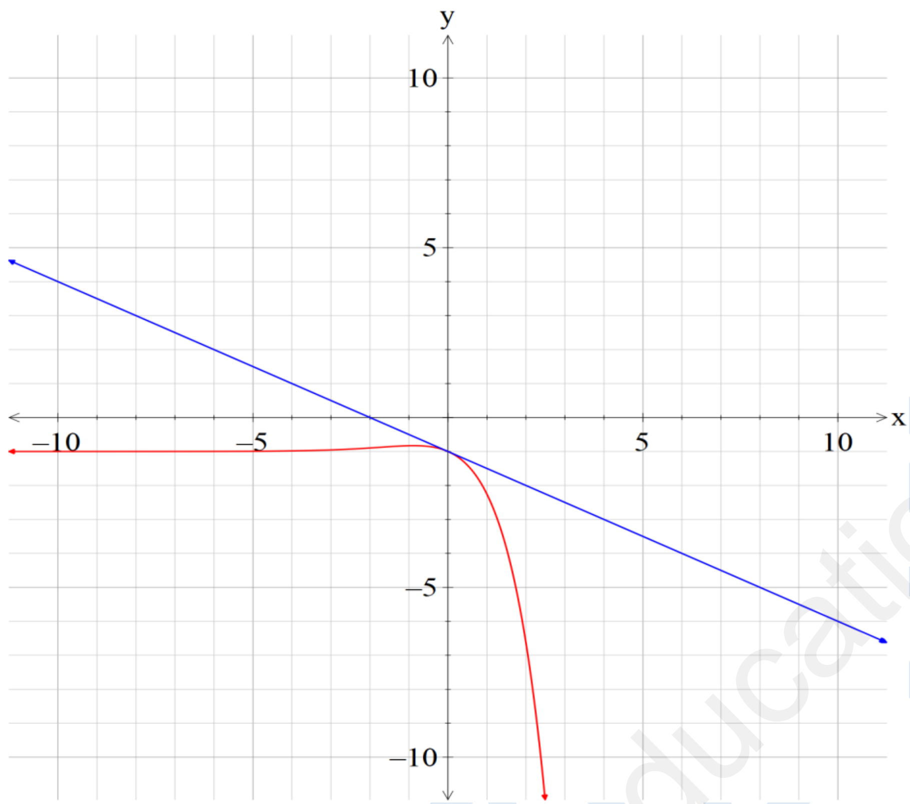
(0.5p) $(T): y = -\frac{1}{2}(x-0) - 1$

$(T): y = -\frac{1}{2}x - 1$

4)أرسم في المعلم المتعامد والمتجانس المنحنى (C_f) والمماس (T).

$(f(\alpha) = -0.83)$

(1p)



5)نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $h(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + 2e^x - x + c$.

أ-بين أن الدالة h دالة أصلية للدالة g .

(1p) $h'(x) = e^{2x} + 2e^x - 1 = g(x)$

ب-أرسم المنحنى (C_g) ثم أحسب مساحة الحيز المستوي المحصور بين المنحنى (C_g) والمستقيمات $y=0$ و $x=\ln 2, x=0$.

$$\alpha=\int_0^{\ln 2} g(x)\,dx=\int_0^{\ln 2} h'(x)\,dx=\left[h(x)\right]_0^{\ln 2}u.a$$

$$\alpha=h(\ln 2)-h(0)=\frac{1}{2}e^{2\ln 2}+2e^{\ln 2}-\ln 2-\frac{5}{2}u.a$$

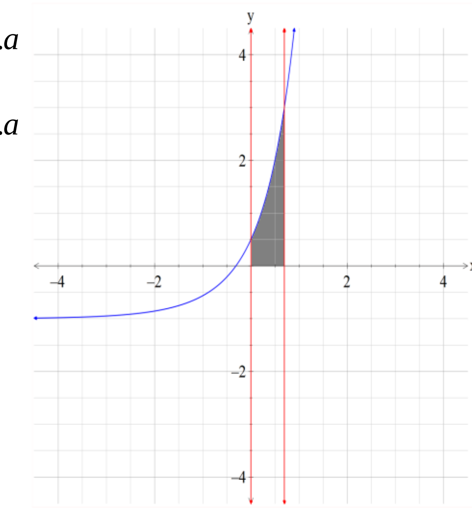
$$\alpha=\frac{1}{2}e^{\ln 2^2}+2e^{\ln 2}-\ln 2-\frac{5}{2}u.a$$

$(1p)$

$$\alpha=\frac{1}{2}e^{\ln 2^2}+2e^{\ln 2}-\ln 2-\frac{5}{2}u.a$$

$$\alpha=\frac{4}{2}+4-\ln 2-\frac{5}{2}u.a$$

$$\alpha=\frac{7}{2}-\ln 2u.a$$



III) تنتج ورشة خياطة في اليوم 3 ألاف قميص.

تنمدج الكلفة الهامشية C_m (الوحدة 1000 دينار) لإنتاج قطعة إضافية على المجال $[0;3]$ بالدالة g حيث: $C_m(x)=g(x)$.

نرمز ب $C_T(x)$ للكلفة الإجمالية والتي تمثل الدالة الأصلية للدالة g.

1)أ-عبر عن الكلفة الإجمالية $C_T(x)$ بدلالة x علما أن الكلفة الإجمالية لإنتاج ألف قميص هي $\frac{1}{2}e-2e$.

$$C_m(x)=C_T'(x)$$

$$\int C_m(x)dx=\int C_T'(x)dx$$

$(0.5p)$ $C_T(x)=\int C_m(x)dx$

$$C_T(x)=\int g(x)dx$$

$$C_T(x)=h(x)$$

ومنه

$$C_T(1)=\frac{1}{2}e-2e$$

$$h(1)=\frac{1}{2}e-2e$$

$(0.5p)$

$$\frac{1}{2}e^2+2e-1+c=\frac{1}{2}e-2e$$

$$c=-\frac{7}{2}e-\frac{1}{2}e^2+1$$

ومنه

$$C_T(x)=\frac{1}{2}e^{2x}+2e^x-x-\frac{1}{2}e^2-\frac{7}{2}e+1$$

2)قدر قيمة الكلفة الإجمالية لإنتاج ألفين قميص.

$(0.5p)$ $C_T(2)=27.86$