

الموضوع الرابع:التمرين الأول:

(1) متتالية عددية معرفة كما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = 3u_n + 1 \end{cases}$$

(1) أحسب كلا من u_1 , u_2 و u_3 .(2) نضع من أجل كل n من \mathbb{N} :

$$v_n = u_n + \frac{1}{2}$$

أ- برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.ب- عين عبارة الحد العام v_n بدلالة n , ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .(3) أ- أحسب المجموع S_n بدلالة n , حيث:

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$$

ب- استنتج المجموع S'_n بدلالة n , حيث:

$$S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$

التمرين الثاني:

(1) أ- ما هو باقي قسمة 1434 على 7؟

ب- ما هو باقي قسمة 2013 على 7؟

(2) ليكن العدد الطبيعي a حيث: $a \equiv 6 [7]$.أ- عين باقي قسمة a^3 على 7.ب- بين أن: $a^3 + 1 \equiv 0 [7]$.(3) b عدد طبيعي حيث: $b \equiv 4 [7]$.- بين أن: $b^3 - 1 \equiv 0 [7]$.(4) بين دون حساب أن العدد $[1434^3 + 2013^3]$ يقبل القسمة على 7.التمرين الثالث:(I) نعتبر الدالة g المعرفة على \mathbb{R} كما يلي:

$$g(x) = x^3 + ax^2 + b$$

حيث a و b عدنان حقيقيان.و (C) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.(1) عين العددين الحقيقيين x و y اللذين يحققان الجملة التالية:

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 4x + y = 13 \end{cases}$$

(2) عين العددين الحقيقيين a و b حتى يمر المنحنى (C) بالنقطتين $A(-1; 3)$ و $B(-2; 5)$, ثم احسب $g'(0)$ و $g'(-2)$.

حيث:

 g' هي الدالة المشتقة للدالة g .(II) نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} بـ:

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$$

 (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.(1) أ- أحسب: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.ب- أحسب $f'(x)$ مشتق الدالة f , ثم ادرس اشارته.ج- شكل جدول تغيرات الدالة f .(2) بين أن النقطة A نقطة انعطاف للمنحنى (C_f) .(3) عين معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) عند النقطة A .(4) أرسم المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) .(5) باستعمال التمثيل البياني للدالة f حدد مجموعة قيم x التي تحقق:

$$f(x) > 5$$



تصحيح الموضوع الرابع:التمرين الأول:(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = 3u_n + 1 \end{cases}$$

(1) نحسب كلا من u₁, u₂ و u₃:• حساب u₁:

لدينا:

بالتعويض نجد:

$$u_1 = 16$$

• حساب u₂:

لدينا:

بالتعويض نجد:

$$u_2 = 49$$

• حساب u₃:

لدينا:

بالتعويض نجد:

$$u_3 = 148$$

(2) نضع من أجل كل n من \mathbb{N} :

$$v_n = u_n + \frac{1}{2}$$

أ- نبرهن أن (v_n) متتالية هندسية ونعين أساسها وحدها الأول:(v_n) متتالية هندسية أساسها q إذا كان:

$$v_{n+1} = q \times v_n$$

لدينا:

ومنه:

ولدينا:

ومنه:

أي:

ونكتب:

ومنه نجد:

$$v_{n+1} = 3 \times v_n$$

إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها:

$$q = 3$$

• حساب الحد الأول v₀:

لدينا:

ومنه نجد:

$$v_0 = \frac{11}{2}$$

ب- نعين عبارة الحد العام v_n بدلالة n، ثم نستنتج عبارة u_n

بدلالة n:

• نعين عبارة الحد العام v_n بدلالة n:تعطى عبارة الحد العام v_n لمتتالية هندسية أساسها q وحدها الأول v₀ بالعلاقة التالية:

$$v_n = v_0 \times q^n$$

ومنه نجد:

$$v_n = \frac{11}{2} \times 3^n$$

• استنتاج عبارة u_n بدلالة n:

$$v_n = u_n + \frac{1}{2}$$

لدينا:

$$u_n = v_n - \frac{1}{2}$$

ومنه:

$$u_n = \frac{11}{2} \times 3^n - \frac{1}{2}$$

بالتعويض ينتج:

ومنه نجد:

$$u_n = \frac{1}{2}(11 \times 3^n - 1)$$

(3) أ- نحسب المجموع S_n بدلالة n، حيث:

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$$

يجب مجموع حدود متتابعة من متتالية هندسية بالعلاقة التالية:

$$S_n = \frac{\text{عدد الحدود} - 1}{\text{الأساس} - 1} \times \text{الحد الأول في المجموع}$$

ويحسب عدد الحدود بالعلاقة التالية:

$$+ 1 \text{ دليل الحد الأول في المجموع} - \text{دليل الحد الأخير في المجموع} = \text{عدد الحدود}$$

حيث:

- الأساس هو q.

- الحد الأول في المجموع هو v₀.

- دليل الحد الأخير في المجموع هو n.

- دليل الحد الأول في المجموع هو 0.

- عدد الحدود هو n + 1.

$$S_n = v_0 \times \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

بالتعويض ينتج:

$$S_n = \frac{11}{2} \times \frac{3^{n+1} - 1}{3 - 1}$$

أي:

ومنه نجد:

$$S_n = \frac{11}{4}(3^{n+1} - 1)$$

ب- استنتاج المجموع S'_n بدلالة n، حيث:

$$S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$

$$S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$

لدينا:

نعوض فينتج:

$$S'_n = \left(v_0 - \frac{1}{2}\right) + \left(v_1 - \frac{1}{2}\right) + \dots + \left(v_n - \frac{1}{2}\right)$$

ونكتب أيضا:

$$S'_n = (v_0 + v_1 + \dots + v_n) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2}\right)$$

أي:

$$S'_n = S_n - \frac{1}{2} \times (n + 1)$$

ومنه نجد:

$$S'_n = \frac{11}{4}(3^{n+1} - 1) - \frac{1}{2}(n + 1)$$

التمرين الثاني:

(1) أ- نبحث عن باقي قسمة 1434 على 7:

$$1434 = 7 \times 204 + 6$$

لدينا:

$$1434 \equiv 6 [7]$$

ونكتب:

إذن باقي قسمة 1434 على 7 هو 6.

ب- نبحث عن باقي قسمة 2013 على 7:

$$2013 = 7 \times 287 + 4$$

لدينا:

$$2013 \equiv 4 [7]$$

ونكتب:

إذن باقي قسمة 1434 على 7 هو 4.

(2) ليكن العدد الطبيعي a حيث: $a \equiv 6 [7]$.أ- نعين باقي قسمة a^3 على 7:

$$a \equiv 6 [7]$$

لدينا:

$$a + 1 \equiv 7 [7]$$

نضيف العدد (1) لطرفي الموافقة ينتج:

$$7 \equiv 0 [7]$$

وبما أن:

$$a + 1 \equiv 0 [7]$$

فإن (حسب خاصية التعدي):

$$a \equiv -1 [7]$$

نضيف العدد (-1) لطرفي الموافقة ينتج:

$$a^3 \equiv (-1)^3 [7]$$

وحسب خواص الموافقات:

$$(-1)^3 \equiv -1 [7]$$

وبما أن:

$$a^3 \equiv -1 [7]$$

فإن (حسب خاصية التعدي):

$$a^3 \equiv 6 [7]$$

ونكتب أيضا:

إذن باقي قسمة a^3 على 7 هو 6.ب- نبين أن: $a^3 + 1 \equiv 0 [7]$.

$$a^3 \equiv 6 [7]$$

لدينا مما سبق أن:

$$a^3 \equiv -1 [7]$$

ونكتب أيضا:

نضيف العدد (1) لطرفي الموافقة ينتج: $a^3 + 1 \equiv -1 + 1 [7]$

ومنه نجد:

$$a^3 + 1 \equiv 0 [7]$$

(3) b عدد طبيعي حيث: $b \equiv 4 [7]$.- نبين أن: $b^3 - 1 \equiv 0 [7]$.

$$b \equiv 4 [7]$$

لدينا:

$$b^3 \equiv 4^3 [7]$$

حسب خواص الموافقات:

$$4^3 \equiv 1 [7]$$

وبما أن:

$$b^3 \equiv 1 [7]$$

فإن (حسب خاصية التعدي):

نضيف العدد (-1) لطرفي الموافقة ينتج: $b^3 - 1 \equiv 1 - 1 [7]$

ومنه نجد:

$$b^3 - 1 \equiv 0 [7]$$

(4) نبين دون حساب أن العدد $[1434^3 + 2013^3]$ يقبل القسمة

على 7:

لدينا:

$$\begin{cases} a^3 + 1 \equiv 0 [7] \\ b^3 - 1 \equiv 0 [7] \end{cases}$$

بجمع الموافقتين طرف طرف ينتج:

$$a^3 + b^3 \equiv 0 [7] \dots (1)$$

• ولدينا:

$$\begin{cases} a \equiv 6 [7] \\ 1434 \equiv 6 [7] \end{cases}$$

ومنه:

$$a \equiv 1434 [7]$$

وحسب خواص الموافقات:

$$a^3 \equiv 1434^3 [7] \dots (2)$$

• ولدينا:

$$\begin{cases} b \equiv 4 [7] \\ 2013 \equiv 4 [7] \end{cases}$$

ومنه:

$$b \equiv 2013 [7]$$

وحسب خواص الموافقات:

$$b^3 \equiv 2013^3 [7] \dots (3)$$

نعوض (2) و (3) في (1) نجد:

$$1434^3 + 2013^3 \equiv 0 [7]$$

إذن العدد $1434^3 + 2013^3$ يقبل القسمة على 7.التمرين الثالث:(I) نعتبر الدالة g المعرفة على \mathbb{R} كما يلي:

$$g(x) = x^3 + ax^2 + b$$

حيث a و b عدنان حقيقيان.

و (C) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس

$$.(O; \vec{i}, \vec{j})$$

(1) نعين العددين الحقيقيين x و y اللذين يحققان الجملة التالية:

$$\begin{cases} x + y = 4 \dots (1) \\ 4x + y = 13 \dots (2) \end{cases}$$

ب طرح (1) من (2) ينتج: $(4x - x) + (y - y) = (13 - 4)$

$$3x = 9$$

أي:

ومنه نجد:

$$x = 3$$

نعوض قيمة x في المعادلة (1) فنجد:

$$y = 1$$

(2) نعين العددين الحقيقيين a و b حتى يمر المنحنى (C) بالنقطتين

$$A(-1; 3) \text{ و } B(-2; 5), \text{ ثم نحسب } g'(0) \text{ و } g'(-2).$$

• نعين العددين الحقيقيين a و b حتى يمر المنحنى (C) بالنقطتين

$$:B(-2; 5) \text{ و } A(-1; 3)$$

المنحنى (C) يمر بالنقطتين $A(-1; 3)$ و $B(-2; 5)$ يعني:

$$\begin{cases} g(-1) = 3 \\ g(-2) = 5 \end{cases}$$

نلخص إشارة $f'(x)$ في الجدول التالي:

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$3x$	-	-	0	+
$x+2$	-	0	+	+
$3x(x+2)$	+	0	-	+
$f'(x)$	+	0	-	+

الدالة f متزايدة تماما من أجل: $x \in]-\infty; -2[\cup]0; +\infty[$
 الدالة f متناقصة تماما من أجل: $x \in]-2; 0[$

ج- شكل جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$		5	1	$+\infty$

(2) نبين أن النقطة $A(-1; 3)$ نقطة انعطاف للمنحنى (C_f) :
 الدالة المشتقة الثانية للدالة f هي:

$$f''(x) = 6x + 6$$

ونكتب أيضا:

$$f''(x) = 6(x + 1)$$

نحل في \mathbb{R} المعادلة $f''(x) = 0$ فنجد:

$$x = -1$$

ولدينا:

$$f(-1) = 3$$

إذن النقطة $A(-1; 3)$ هي نقطة انعطاف للمنحنى (C_f) .

(3) نعين معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) عند النقطة A :

تعرف معادلة المماس (Δ) بالعلاقة التالية:

$$(\Delta) : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

حيث:

$$x_0 = -1$$

ومنه:

$$(\Delta) : y = f'(-1)(x + 1) + f(-1)$$

حيث:

$$\begin{cases} f'(-1) = -3 \\ f(-1) = 3 \end{cases}$$

بالتعويض ينتج:

$$(\Delta) : y = -3(x + 1) + 3$$

ومنه نجد:

$$(\Delta) : y = -3x$$

(4) نرسم المماس (Δ) والمنحنى (C_f) :

• لرسم المماس (Δ) يكفي تعيين نقطتين اعتبارا من المعادلة:

$$(\Delta) : y = -3x$$

أي:

$$\begin{cases} a + b = 4 \\ 4a + b = 13 \end{cases}$$

سبق حل هذه الجملة بالمجهولين x و y .

ومنه نجد:

$$\begin{cases} a = 3 \\ b = 1 \end{cases}$$

فنكتب:

$$g(x) = x^3 + 3x^2 + 1$$

• نحسب $g'(0)$ و $g'(-2)$:

$$g'(x) = 3x^2 + 6x$$

الدالة المشتقة للدالة g هي:

ونكتب أيضا:

$$g'(x) = 3x(x + 2)$$

ومنه نجد:

$$\begin{cases} g'(0) = 0 \\ g'(-2) = 0 \end{cases}$$

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} بـ:

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$$

(C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) - نحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

• نحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 3x^2 + 1)$$

لدينا:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3)$$

باعتبار نهاية أكبر أس ينتج:

ومنه نجد:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

• نحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + 3x^2 + 1)$$

لدينا:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3)$$

باعتبار نهاية أكبر أس ينتج:

ومنه نجد:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

ب- نحسب $f'(x)$ مشتق الدالة f ، ثم ندرس اشارته:

• نحسب $f'(x)$ مشتق الدالة f :

الدالة المشتقة للدالة f هي:

$$f'(x) = 3x^2 + 6x + 0$$

ومنه نجد:

$$f'(x) = 3x(x + 2)$$

• ندرس إشارة $f'(x)$:

$$f'(x) = 0$$

نحل في \mathbb{R} المعادلة:

$$3x(x + 2) = 0$$

أي:

ومنه نجد:

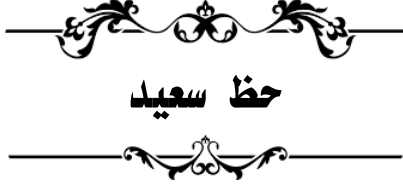
$$\begin{cases} x = -2 \\ \text{أو} \\ x = 0 \end{cases}$$

من التمثيل البياني للدالة f نلاحظ أن:
جميع المستقيمات التي تحقق $y > 5$ تقطع المنحنى (C_f) في نقطة
وحيدة x حيث:

$$x > 1$$

ومنه مجموعة قيم x التي تحقق $f(x) > 5$ هي:

$$x \in]1; +\infty[$$



x	0	-1
y	0	3

فيصبح المماس (Δ) معرف بالنقطتين $O(0; 0)$ و $A(-1; 3)$.

• لرسم المنحنى (C_f) نأخذ بعين الاعتبار ما يلي:

- المنحنى (C_f) يمر بالنقطتين:

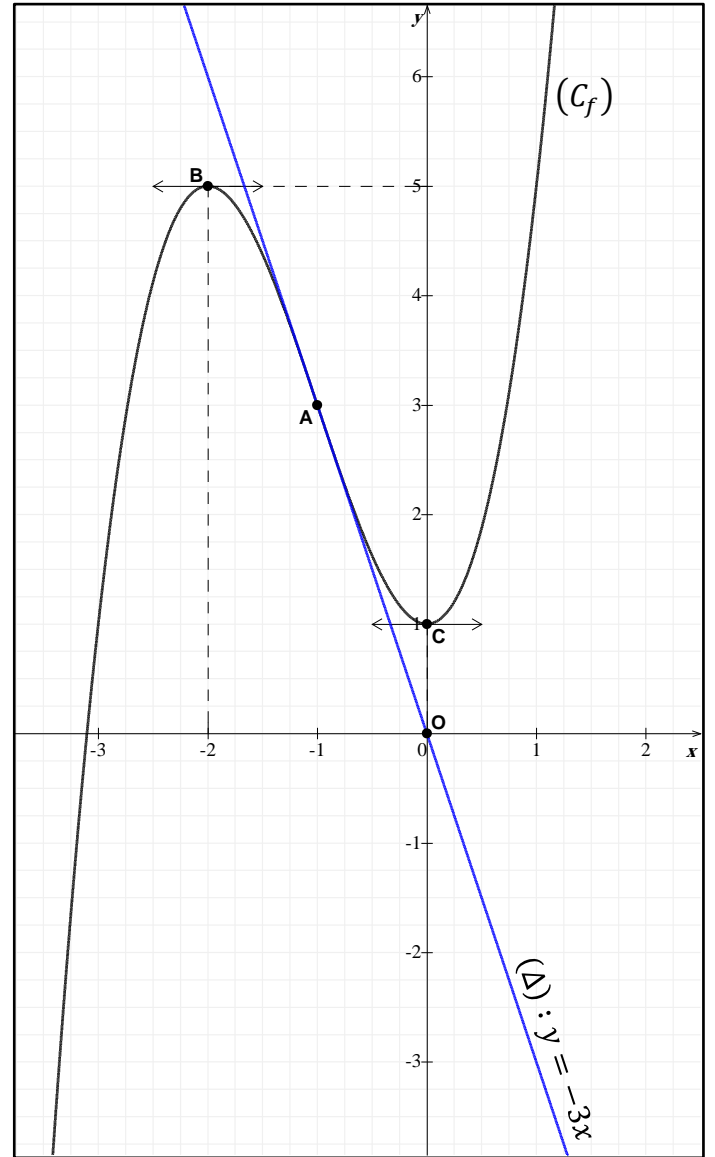
$B(-2; 5)$ و $A(-1; 3)$

- نقطة انعطاف المنحنى (C_f) :

$A(-1; 3)$

- القيم الحدية للمنحنى (C_f) :

$C(0; 1)$ و $B(-2; 5)$



التمثيل البياني للدالة f

(5) باستعمال التمثيل البياني للدالة f نحدد مجموعة قيم x التي تحقق:

$$f(x) > 5$$

مجموعة قيم x هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) والمستقيمات التي تحقق:

$$y > 5$$