

اختبار الثلاثي الأول في مادة الرياضيات

المدة: ساعتان

المستوى: ثالثة رياضيات، تقني رياضيات

التمرين الأول: (6 نقاط)

(1) نعتبر المعادلة (E) $11x - 7y = 5$ حيث x و y عدنان صحيحان نسبياً.

(أ) حل في \mathbb{Z}^2 المعادلة (E).

(ب) في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس (O, \vec{i}, \vec{j}) ، نعتبر المستقيم (D) ذو المعادلة الديكارتيّة $11x - 7y - 5 = 0$. نرسم Δ لمجموعة النقط $M(x, y)$ من المستوي حيث $0 \leq x \leq 50$ و $0 \leq y \leq 70$.

عين عدد النقط من (D) التي تنتمي إلى Δ والتي تكون إحداثياتها أعداداً صحيحة نسبياً.

(2) نعتبر المعادلة (F) $11x^2 - 7y^2 = 5$ حيث x و y عدنان صحيحان نسبياً.

(أ) أثبت أنه إذا كانت الثنائيتّة (x, y) حلاً للمعادلة (F) فإن $x^2 \equiv 2y^2 [5]$.

(ب) ليكن x و y عددين صحيحين نسبياً. أنقل ثم أتمم الجدولين الآتيين

x	0	1	2	3	4	$\equiv [5]$
x^2						$\equiv [5]$

y	0	1	2	3	4	$\equiv [5]$
$2y^2$						$\equiv [5]$

(ج) استنتج أنه إذا كانت الثنائيتّة (x, y) حلاً للمعادلة (F) فإن كل من x و y مضاعف لـ 5.

(3) أثبت أنه إذا كان كل من x و y مضاعف لـ 5 فإن الثنائيتّة (x, y) ليست حلاً للمعادلة (F).

التمرين الثاني: (14 نقطة)

I. الجدول الآتي يمثّل جدول تغييرات الدالّة h المعرّفة على \mathbb{R} بـ $h(x) = x^3 - x^2 - x - 1$.

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	1	$+\infty$	
$h'(x)$	+	0	-	0	+
$h(x)$	$-\infty$	$-\frac{22}{27}$	-2	$+\infty$	

(1) أحسب $h(1, 84)$. (تُعطي النتيجة مدوّرة إلى 10^{-2})

(2) استنتج إشارة $h(x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x .

II. نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ بـ $g(x) = \frac{2x}{x^2 - 1} + \ln(x^2 - 1)$.

(1) أحسب نهايات الدالة g بجوار أطراف مجموعة تعريفها.

(2) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون $g'(x) = \frac{2}{(x^2 - 1)^2} h(x)$ ، استنتج اتجاه تغير الدالة g ثم

شكل جدول تغيراتها. (تُعطى $g(1,84) \simeq 2,41$)

(3) أثبت أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $-2,11 \leq \alpha \leq -2,10$.

(4) استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x .

III. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ بـ $f(x) = e^x \ln(x^2 - 1)$ وليكن (C_f)

تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى معلم متعامد (O, \vec{i}, \vec{j}) . (الوحدة على محور الفواصل: 1 cm، الوحدة على محور الترتيب: 6 cm).

(1) أحسب نهايات الدالة f بجوار أطراف مجموعة تعريفها. فسّر هندسياً النتائج.

(2) أثبت أن $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ ، واستنتج اتجاه تغير الدالة f .

(3) شكل جدول تغيرات الدالة f .

(4) أثبت أن $f(\alpha) = \frac{2\alpha e^\alpha}{1 - \alpha^2}$ ثم عيّن حصرًا لـ $f(\alpha)$.

(5) أثبت أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين β و λ حيث $-1,42 \leq \beta \leq -1,41$ و $1,41 \leq \lambda \leq 1,42$.

(6) أرسم المنحنى (C_f) .

التصحيح النموذجي

التمرين الأول:

(1) (أ) لدينا (E) تكافئ $11x = 7y + 5$ ومنه $11x \equiv 5[7]$ ومنه $4x \equiv 5[7]$ ومنه $4x \equiv 12[7]$ ومنه $x \equiv 3[7]$ لأن $\text{pgcd}(4,12)$ أولي مع 7) ومنه $x = 7k + 3$ حيث k عدد صحيح نسبي، وبالتعويض عن قيمة x في المعادلة (E) نجد أن $y = 11k + 4$ ، ومنه حلول المعادلة (E) هي الثنائيات $(7k + 3, 11k + 4)$.

(ب) لدينا $0 \leq x \leq 50$ ومنه $0 \leq 7k + 3 \leq 50$ ومنه $-0,43 \leq k \leq 6,71$ إذن $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ، كذلك $0 \leq y \leq 70$ ومنه $0 \leq 11k + 4 \leq 70$ ومنه $-0,36 \leq k \leq 6$ إذن $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ، ومنه عدد نقاط المستقيم (D) التي تنتمي إلى (Δ) هو 7 نقاط.

(2) (أ) إذا كانت الثنائية (x, y) حلاً للمعادلة (F) فإن $11x^2 - 7y^2 = 5$ ومنه $11x^2 = 7y^2 + 5$ ومنه $x^2 \equiv 2y^2[5]$.

(ب) لدينا الجدولان:

x	0	1	2	3	4	$\equiv [5]$
x^2	0	1	4	4	1	$\equiv [5]$

y	0	1	2	3	4	$\equiv [5]$
$2y^2$	0	2	3	3	2	$\equiv [5]$

(ج) لدينا $x^2 \equiv 2y^2[5]$ تكافئ $x^2 - 2y^2 \equiv 0[5]$ ، وعليه يكون لدينا الجدول الآتي

		بواقي قسمة $2y^2$ على 5						
		y	0	1	2	3	4	$\equiv [5]$
		$2y^2$	0	2	3	3	2	$\equiv [5]$
بواقي قسمة x^2 على 5	x	x^2						
	0	0	0	3	2	2	3	$\equiv [5]$
	1	1	1	4	3	3	4	$\equiv [5]$
	2	4	4	2	1	1	2	$\equiv [5]$
	3	4	4	2	1	1	2	$\equiv [5]$
	4	1	1	4	3	3	4	$\equiv [5]$
	$\equiv [5]$	$\equiv [5]$						

من خلال الجدول نجد أن $x \equiv 0[5]$ و $y \equiv 0[5]$ ، وعليه يكون كل من x و y مضاعف للعدد 5.

(3) نرض أن كل من x و y مضاعف للعدد 5، أي أنه يوجد عدنان صحيحان α و β حيث $x = 5\alpha$ و $y = 5\beta$ ، ومنه بالتعويض في المعادلة (F) نجد أن $5(11\alpha^2 - 7\beta^2) = 1$ وهي معادلة لا تقبل حلولاً في \mathbb{Z}^2 ، إذن الثنائية (x, y) ليست حلاً للمعادلة (F) عندما يكون كل من x و y مضاعف للعدد 5.

التمرين الثاني:

I. (1) لدينا $h(1,84) = 0$

(2) إشارة $h(x)$ موضحة في الجدول

x	$-\infty$	1,84	$+\infty$
$h(x)$	-	0	+

II. (1) نهاية الدالة g بجوار $-\infty$ هي $+\infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x^2 - 1} + \ln(x^2 - 1) = +\infty$

نهاية الدالة g بجوار $+\infty$ هي $+\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x^2 - 1} + \ln(x^2 - 1) = +\infty$

نهاية الدالة g بجوار -1 هي $-\infty$ $\lim_{x \rightarrow -1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x + (x^2 - 1)\ln(x^2 - 1)}{x^2 - 1} = -\infty$

نهاية الدالة g بجوار 1 هي $+\infty$ $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x + (x^2 - 1)\ln(x^2 - 1)}{x^2 - 1} = +\infty$

(2) الدالة g قابلة للإشتقاق على $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ ودالتها المشتقة

$$g'(x) = \frac{2(x^2 - 1) - 2x(2x)}{(x^2 - 1)^2} + \frac{2x}{x^2 - 1} = \frac{2(x^3 - x^2 - x - 1)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2}{(x^2 - 1)^2} h(x)$$

أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 1 و -1 فإن إشارة $g'(x)$ من إشارة $h(x)$ ، ومنه الدالة g متزايدة تماماً على

$]-\infty, -1[\cup]1, 82[$ وتناقصة تماماً على $]-\infty, -1[\cup]1, 82[$ ، وجدول تغيراتها هو

x	$-\infty$	-1	1	1,82	$+\infty$
$g'(x)$	-			-	+
$g(x)$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	2,41	$+\infty$

(3) الدالة g مستمرة ورتيبة تماماً على $[-2,11; -2,10]$ و $g(-2,10) \times g(-2,11) < 0$ ، إذن، حسب مبرهنة القيم

المتوسطة، المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $-2,11 \leq \alpha \leq -2,10$.

(4) إشارة $g(x)$ موضحة في الجدول

x	$-\infty$	α	-1	1	$+\infty$
$g(x)$	+	0	-		+

III. (1) نهاية الدالة f بجوار $-\infty$ هي 0 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \ln(x^2 - 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 1)e^x \times \frac{\ln(x^2 - 1)}{x^2 - 1} = 0$

المستقيم ذو المعادلة $y = 0$ مقارب أفقي للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

نهاية الدالة f بجوار $+\infty$ هي $+\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \ln(x^2 - 1) = +\infty$.

نهاية الدالة f بجوار -1 هي $-\infty$ $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} e^x \ln(x^2 - 1) = -\infty$.

المستقيم ذو المعادلة $x = -1$ مقارب عمودي للمنحنى (C_f) .

نهاية الدالة f بجوار 1 هي $-\infty$ $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} e^x \ln(x^2 - 1) = -\infty$.

المستقيم ذو المعادلة $x = 1$ مقارب عمودي للمنحنى (C_f) .

(2) الدالة f قابلة للإشتقاق على $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ ودالتها المشتقة هي $f'(x) = g(x) \times e^x$. بما أن $e^x > 0$ من

أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 1 و -1 فإن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ ، أي أن الدالة f متزايدة تماماً على $]-\infty, \alpha[\cup]1, +\infty[$ ومتناقصة تماماً على $]-\infty, -1[$ و $]-1, \alpha[$.

(3) جدول تغيرات الدالة f هو

x	-2	α	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$+$
$f(x)$	0	$f(\alpha)$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

$$(4) \text{ لدينا } g(\alpha) = 0 \text{ ومنه } \ln(x^2 - 1) = \frac{2\alpha}{1 - \alpha^2} \text{ ومنه } f(\alpha) = e^\alpha \ln(\alpha^2 - 1) = \frac{2\alpha e^\alpha}{1 - \alpha^2}$$

لدينا، من جهة $-2,10 \leq \alpha \leq -2,11$ ومنه $-4,20 \leq 2\alpha \leq -4,22$ وكذلك $0,121 \leq e^\alpha \leq 0,122$ ومنه $-0,514 \leq 2\alpha e^\alpha \leq -0,508$ ومن جهة أخرى لدينا $-2,10 \leq \alpha \leq -2,11$ ومنه $4,45 \leq \alpha^2 \leq 4,41$ ومنه $-3,41 \leq 1 - \alpha^2 \leq -3,45$ ومنه $-0,289 \leq \frac{1}{1 - \alpha^2} \leq -0,293$ ، وعليه نجد أن $0,146 \leq \frac{2\alpha e^\alpha}{1 - \alpha^2} \leq 0,151$ ومنه $0,146 \leq f(\alpha) \leq 0,151$.

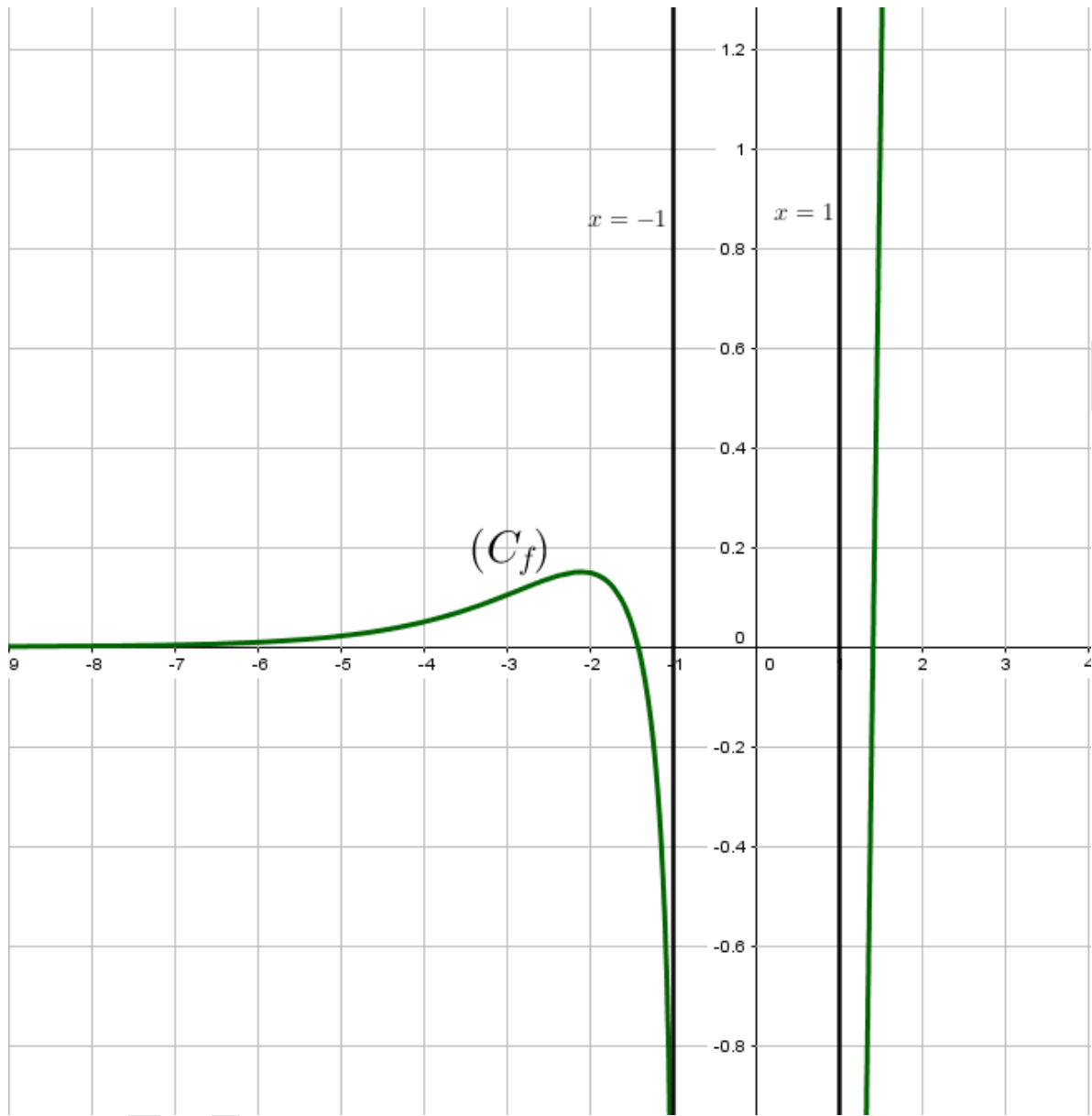
(5) الدالة f مستمرة ورتيبة تماماً على المجال $]-1, 42; -1, 41[$ و $f(-1, 42) \times f(-1, 41) < 0$ ، إذن حسب مبرهنة

القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً β ينتمي إلى المجال $]-1, 42; -1, 41[$.

الدالة f مستمرة ورتيبة تماماً على المجال $]-1, 41; 1, 42[$ و $f(1, 42) \times f(1, 41) < 0$ ، إذن حسب مبرهنة القيم

المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً λ ينتمي إلى المجال $]-1, 41; 1, 42[$.

(6) التمثيل البياني للدالة f موضح في الرسم المرفق



عقونبي