الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

مديرية التربية لولاية الجلفة — وزارة التربية الوطنية — الخليل للرياضيات

امتحان بكالوريا تجريبي

الشعبة: رياضيات — الأستاذ: قويسم الخليل

المدة: 04 سا و30 د — يوم: 15 ماي 2023

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين

الموضوع الأول

يحتوي الموضوع الأول على 03 صفحات (من الصفحة 01 إلى 03)

التمرين الأول: (05.00)

α عدد حقيقي يختلف عن -2 .

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = \alpha + 2$، ومن أجل كل عدد طبيعي n

$$u_{n+1} = \frac{(a+2)\times u_n}{u_n + 2 - a}$$

ولتكن المتتالية العددية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \dfrac{u_n}{u_n - 2a}$

I) فيما يلي نفرض أن: $\alpha = 1$

❶ تحقق أن: $u_{n+1} = 3 - \dfrac{3}{u_n + 1}$ ، ثمّ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $2 < u_n < 4$

❷ بيّن أنّ المتتالية (u_n) متناقصة تماما، ثم استنتج أنها متقاربة

❸ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n = \dfrac{6}{3 - 3^{-n}}$ ، ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

❹ أكتب v_n بدلالة n ثم عين أصغر عدد طبيعي n يحقق: $v_n \geq e^{66}$

❺ أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = \dfrac{1}{u_0} + \dfrac{1}{u_1} + \dfrac{1}{u_2} + \cdots\cdots + \dfrac{1}{u_n}$

II) فيما يلي نفرض أن: $-2 < \alpha < 0$

❶ بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = \dfrac{2+a}{2-a}$ ، ثم أكتب v_n بدلالة n و α

❷ بين أنّ $0 < \dfrac{2+a}{2-a} < 1$ ، ثمّ استنتج اتجاه تغير المتتالية (v_n) وأحسب نهايتها

❸ من أجل كل عدد طبيعي n نضع:

$$S'_n = \ln[(2-a)v_0] + \ln[(2-a)^2 v_1] + \cdots\cdots + \ln[(2-a)^n v_{n-1}]$$

• أحسب بدلالة n و α المجموع S'_n

التمرين الثاني: (04.00)

نعتبر الجملة: $(S): \begin{cases} \alpha \equiv -6[13] \\ \alpha \equiv 6[7] \end{cases}$ ، حيث α عدد صحيح غير معدوم

❶ أ/ تحقق أنّ العدد 2022 حل للجملة (S)

ب/ استنتج أن : $\alpha = 13x - 6 = 7y + 6$ حيث الثنائية $(x;y)$ من $\mathbb{Z}^2$ حل للمعادلة (E) حيث:

$$(E): 713x - 7y = 12$$

❷

أ/ بيّن أن المعادلة (E) تقبل على الأقل حلا في $\mathbb{Z}^2$ ثم تحقق أن $(2;2)$ حلا خاصا لها

ب/ حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E)

ج/ استنتج حلول الجملة (S)

❸ ليكن α حل للجملة (S)

أ/ أكمل الجدول التالي:

	α^{12}	α^6	α^4	α^2	α
$\equiv [13]$					
$\equiv [7]$					

ب/ استنتج أن : $\alpha^{12} \equiv 1[91]$

ج/ عين باقي قسمة 2022^{1443} على 91 (يعطى $8000 \equiv 83[91]$)

◀ التمرين الثالث: ﴿04.00﴾

صندوق فيه ثلاث كرات بيضاء تحمل الأرقام 0، 1، 1 وثلاث كرات حمراء تحمل الأرقام 1 ، 2 ، 2 وكرتين سوداويين تحملان الرقمين 0 ، 2. الكرات كلها متماثلة ولا نفرق بينها عند اللمس نسحب من الصندوق ثلاث كرات الواحدة تلوى الأخرى دون إعادة الكرة المسحوبة إلى الصندوق

❶ أحسب احتمال الأحداث التالية:

A: "الكريات المسحوبة من نفس اللون"

B: "ظهور الرقم 1 مرة واحدة فقط في السحبات الثلاثة"

C: "ظهور الرقم 1 مرتين في السحبات الثلاثة"

D: "الكرة المسحوبة ثانيا حمراء".

❷ بيّن أنّ: $P(B \cap D) = \frac{17}{84}$

❸ نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بالسحبات الثلاث عدد الكرات السوداء المتبقية في الصندوق

أ/ عيّن قيم المتغير العشوائي X، وأكتب قانون احتماله

ب/ أحسب الأمل الرياضياتي $E(X)$

❹ ننزع من الصندوق الكرتان السوداويتان فتبقى فيه ثلاث كرات بيضاء وثلاث كرات حمراء.

فنسحب من الصندوق كرة واحدة n مرة على التوالي بالإرجاع في كل مرة

أ/ عبر بدلالة n عن احتمال أن تكون كل الكرات المسحوبة من نفس اللون

ب/ أحسب احتمال أن تكون في كل السحبات على الأقل كرة واحدة حمراء

◀ التمرين الرابع: ﴿07.00﴾

I) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = 2 - xe^{1-x}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

❶

أ/ أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و فسر النتيجة هندسيا، ثم أحسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

ب/ أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

❷

أ/ بيّن أنّ (C_f) يقبل نقطة انعطاف Ω يطلب تعيين إحداثياتها

ب/ أكتب معادلة المماس (T) لـ (C_f) عند النقطة Ω

ج/ أكتب معادلة المماس (T') لـ (C_f) عند نقطة تقاطعه مع محور التراتيب، ثمّ تحقق أنّ (T) و (T') متعامدان

❸ أحسب $f(-1)$، ثم أنشئ (C_f)

❹ ناقش بيانيا، حسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة : $\ln f(x) - \ln f(m) = 0$ حيث: $m \in \mathbb{R}$

II) k عدد طبيعي حيث $k \geq 2$، لتكن الدالة العددية المعرفة f_k على $\mathbb{R}$ بـ : $f_k(x) = 2 - x^k e^{1-x}$، و (C_k) تمثيلها البياني في المعلم السابق

❶ بين أن جميع المنحنيات (C_k) تمر من نقطتين ثابتتين يطلب تعيينهما

❷ أحسب نهايتي الدالة f_k عند $+\infty$ وعند $-\infty$ (ناقش حسب شفعية k)

❸ أحسب $f_k'(x)$ ، ثم حدد حسب شفعية k اتجاه تغير الدالة f_k و شكل جدول تغيراتها

III) من أجل كل عدد طبيعي k نعرف التكامل I_k كما يلي : $I_k = \int_0^1 x^k e^{1-x} dx$

❶ أعط تفسيرا هندسيا لـ I_k

❷ أحسب القيمة المضبوطة لـ I_0

❸ أ/ باستعمال التكامل بالتجزئة:

• أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي k ، $I_{k+1} = -1 + (k+1)I_k$

ب/ استنتج القيم المضبوطة لكل من I_1 و I_2

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

يحتوي الموضوع الثاني على 03 صفحات (من الصفحة 04 إلى 06)

التمرين الأول: (04.00)

لعبة تتمثل في سحب 4 كرات في آن واحد من كيس غير شفاف ، يحتوي على كرة واحدة سوداء و تسعة كرات بيضاء .

ثم نرمي نرد متزن أوجهه الستة مرقمة من 1 إلى 6

- إذا كانت الكرة السوداء موجودة في السحب، فيلزم الحصول على عدد زوجي لكي نربح
- إذا لم تكن الكرة السوداء في السحب، فيلزم الحصول على الرقم 6 لكي نربح

ليكن:

- الحدث N: "الكرة السوداء موجودة في السحب"
- الحدث G: "اللاعب يربح"

1. أ/ أحسب $P(N)$

ب/ بيّن أن: $P(G)=\frac{3}{10}$. (يمكن الاستعانة بشجرة الاحتمالات)

2. لكي نلعب هذه اللعبة ندفع في البداية α دينار
   - إذا ربح اللاعب يتحصل على 40 دينار
   - وإذا لم يربح لكنه سحب الكرة السوداء يرجع له المبلغ α
   - وإذا لم يربح ولم يسحب الكرة السوداء فإنه يخسر المبلغ α

   نعتبر X المتغير العشوائي الذي يعبر عن الربح الجبري للاعب

   أ/ عيّن قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X

   ب/ أحسب الأمل الرياضياتي $E(X)$ بدلالة α

   ج/ جد قيمة α من أجلها تكون اللعبة عادلة

3. نلعب هذه اللعبة n مرة مع العلم أن بعد كل مرة تعاد الكرات المسحوبة إلى الكيس
   - عين أصغر قيمة لـ n التي من أجلها يكون احتمال أن نربح مرة على الأقل أكبر من 0.999

التمرين الثاني: (04.00)

نضع من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n=\int_0^1\left(\frac{x^n}{x+1}\right)dx$

1. أ/ أحسب u_0 ثمّ u_1

   ب/ أحسب u_2+u_1 ثم استنتج u_2

2. أحسب $u_{n+1}+u_n$

3. أثبت أن من أجل كل عدد طبيعي n: $\frac{1}{2(n+1)}<u_n<\frac{1}{n+1}$ ، ثمّ استنتج $\lim_{n\to+\infty}u_n$

4. نضع من أجل كل عدد طبيعي n و من أجل كل x من $x\in[0;1]$:

$$S_n=1-x+x^2-x^3+\cdots\cdots+(-1)^nx^n$$

ب/ بيّن أنّ: $S_n = \frac{1}{x+1} - \frac{(-1)^n x^{n+1}}{x+1}$

ج/ باستعمال عبارتي S_n ، بيّن أنّ: $1 - \frac{1}{2} + \cdots\cdots + \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln 2 - (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x+1}dx$

د/ أحسب $\lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{2} + \cdots\cdots + \frac{(-1)^n}{n+1}\right)$

◀ التمرين الثالث: ﴿05.00﴾

❶ أ/ عيّن حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 7

ب/ جد الأعداد الطبيعية من أجلها يكون: $n^2 \times 2023^{2973} + 4 \times 2972n \equiv 0[7]$

❷ نعتبر العدد الطبيعي N_p المكتوب في النظام العشري على الشكل : $N_p = \overline{\underbrace{111\cdots\cdots1}_{1 \text{ مكرر } p \text{ مرة}}}$

أ/ بيّن أن : $N_p \equiv p[3]$

ب/ استنتج باقي قسمة العدد N_{2020} على 3

ج/ برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n العدد : $3^n - 1$ يقبل القسمة على 2

د/ بيّن أنّ العدد N_p يقبل القسمة على 7 إذا وفقط إذا كان العدد $3^p - 1$ يقبل القسمة على 7 أيضا

ه/ استنتج باقي قسمة العدد N_{2020} على 7

❸ أ/ حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة: $3x - 7y = 4$

ب/ استنتج الأعداد الصحيحة α التي تحقق: $\begin{cases} a \equiv 1[3] \\ 2a \equiv 3[7] \end{cases}$

ج/ استنتج باقي قسمة العدد N_{2020} على 21

❹ ليكن M عدد طبيعي مكتوب في النظام ذي الأساس 4 على الشكل : $M = \overline{\alpha\beta\beta2\alpha\beta}^4$

أ/ عيّن α و β علما أنّ: $M \equiv 0[7]$

ب/ استنتج M في النظام العشري

◀ التمرين الرابع: ﴿07.00﴾

I) من أجل كل عدد طبيعي k غير معدوم ، نعرف على المجال $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ الدالتين f_k و g_k حيث:

$$f_k(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^k \ln\left(x + \frac{1}{2}\right) \quad \text{و} \quad g_k(x) = \frac{2x-1}{2x+1} + k\ln\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

و(C_k) التمثيل البياني للدالة f_k في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة $2cm$)

❶ أ/ أدرس تغيرات الدالة g_k

ب/ أحسب $g_k\left(\frac{1}{2}\right)$ ، ثمّ استنتج إشارة $g_k(x)$ على المجال $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$

❷ أ/ بيّن أنه من أجل كل $x > -\frac{1}{2}$: $f'_k(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^{k-1} \times g_k(x)$

ب/ حسب شفعية k ، أدرس اتجاه تغير الدالة f_k و شكل جدول تغيراتها

❸ أ/ أدرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_1) و (C_2)

ب/ أنشئ (C_1) و (C_2) في المعلم السابق

II) نعتبر المتتالية العددية (v_k) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي k بـ:

$$v_k = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \left(x-\frac{1}{2}\right)^k \ln\left(x+\frac{1}{2}\right) dx$$

❶ بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم k : $0 \le v_k \le \frac{\ln 2}{k+1}$ ، ثم استنتج $\lim_{k\to+\infty} v_k$

❷ باستعمال التكامل بالتجزئة، بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم k:

$$v_k = \frac{\ln 2}{k+1} - \frac{2^{-k}}{k+1}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \left(\frac{(2x-1)^{k+1}}{2x+1}\right) dx$$

❸ من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم k وباعتبار: $\frac{1}{2} \le x \le \frac{3}{2}$ ليكن المجموع:

$$S_k(x) = 1 - \left(x-\frac{1}{2}\right) + \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots\cdots + (-1)^k\left(x-\frac{1}{2}\right)^k$$

أ/ بين أنّ:

$$s_k(x) = \frac{2}{2x+1} + \left(-\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{(2x-1)^{k+1}}{2x+1}\right)$$

ب/ استنتج أنّ:

$$v_k = \frac{\ln 2}{k+1} - \left(\frac{(-1)^{k-1}}{k+1}\right)\left[\ln 2 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots\cdots + \frac{(-1)^{k+1}}{k+1}\right]$$

انتهى الموضوع الثاني

بالتوفيق في شهادة البكالوريا

♥ لا تنسونا من صالح دعائكم ♥