

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

يحتوي الموضوع الأول على 3 صفحات

التمرين الأول (04 نقاط) :

1. نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ: $u_1 = \frac{1}{2}$ وبالعلاقة التراجعية: $u_{n+1} = \frac{1}{6}u_n + \frac{1}{3}$

ولتكن المتتالية (v_n) المعرفة من اجل كل $n \geq 1$ بـ: $v_n = u_n - \frac{2}{5}$

(أ) بين ان المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين اساسها.

(ب) استنتج عبارة v_n بدلالة n ثم عبارة u_n بدلالة n .

2. نعتبر نردين A و B غير مزيفين بحيث : النرد A به ثلاث اوجه حمراء وثلاث اوجه بيضاء ، اما النرد B به اربع اوجه حمراء ووجهين بيضاوين.

نختار عشوائيا نردا ونرميه : إذا ظهر اللون الأحمر نحتفظ بهذا النرد ، اما اذا ظهر اللون الأبيض نغير النرد. ثم نرمي هذا النرد وهكذا دواليك.

نرمز بـ A_n الى الحدث : " رمي النرد A مرة n " و بـ $\overline{A_n}$ الى الحدث العكسي للحدث A_n

R_n الى الحدث : " ظهور اللون الأحمر في الرمية n " و بـ $\overline{R_n}$ الى الحدث العكسي للحدث R_n .

ونرمز بـ: a_n الى احتمال الحدث A_n و r_n الى احتمال الحدث R_n

(أ) عين a_1

(ب) اكمل الشجرة ثم عين r_1

(ج) بملاحظة أنه من اجل كل $n \geq 1$

$$R_n = (R_n \cap A_n) \cup (R_n \cap \overline{A_n})$$

$$- \text{ بين أن: } r_n = -\frac{1}{6}a_n + \frac{2}{3}$$

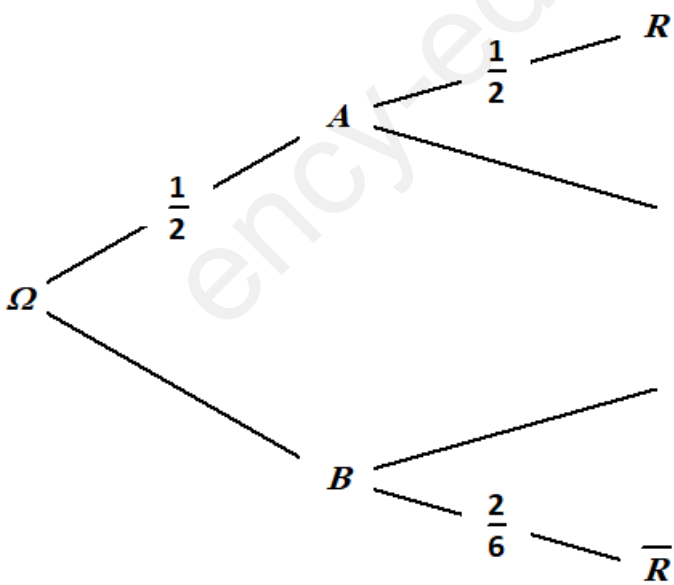
(د) بين أنه من أجل كل $n \geq 1$:

$$A_{n+1} = (A_n \cap R_n) \cup (\overline{A_n} \cap \overline{R_n})$$

(هـ) استنتج أنه من أجل كل $n \geq 1$:

$$a_{n+1} = \frac{1}{6}a_n + \frac{1}{3}$$

(و) استنتج عبارة r_n بدلالة n ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n$



التمرين الثاني (04.5 نقاط) :

(1) نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} المعادلة ذات المجهول z : $\bar{z}^3 - 3\bar{z}^2 + 3\bar{z} + 7 = 0$.. (E) هو مرافق العدد المركب z .

أ/ بين أن المعادلة (E) تكافئ المعادلة : $(\bar{z} + 1) (\bar{z}^2 - 4\bar{z} + 7) = 0$

ب/ حل في \mathbb{C} المعادلة (E) .

(2) في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ ، نعتبر النقط A, B, C, D لوحقها

على الترتيب: $z_D = 3$ ، $z_C = \bar{z}_B$ ، $z_B = 2 + i\sqrt{3}$ ، $z_A = -1$

أ/ عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $(z_B - z_A)^n$ عددا حقيقيا سالبا.

ب/ عين طبيعة المثلث ABC .

(3) أ/ أكتب العدد $\frac{z_A - z_C}{z_D - z_C}$ على الشكل الأسّي، ثم استنتج أن النقطة A صورة D بتحويل نقطي يطلب تعيينه.

ب/ أوجد مركز ونصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث ACD .

(4) (Γ) مجموعة النقط M من المستوى لاحتقها تحقق: $z + 1 = 2\sqrt{3} \cdot k \cdot e^{i\frac{\pi}{6}}$ حيث k يمسح المجال $]-\infty; +\infty[$

✓ عين قيسا للزاوية الموجهة $(\vec{u}; \overrightarrow{AB})$ ، ثم استنتج مجموعة النقط (Γ) .

(5) أ/ عين قيمة العدد الحقيقي α بحيث يكون: $-\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB} + \alpha\overrightarrow{CD} = \vec{0}$.

ب/ عين (E) مجموعة النقط M من المستوى حيث: $\|-\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{BM} - 3\overrightarrow{DM}\| \leq 2\|\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{CM}\|$

ج/ استنتج مجموعة نقط تقاطع (E) و (Γ) .

التمرين الثالث (04.5 نقاط) :

(1) من أجل كل عدد حقيقي t وكل عدد طبيعي n ، أنشرو بسط العبارة $(t - 6)(t^2 + 1)$

ثم أدرس حسب قيم n بواقي قسمة 3^n على 7

(2) a ، b و c أعداد طبيعية تكتب في نظام التعداد ذي الأساس p كمايلي : $a = 102$ ، $b = 125$ و $c = 13154$

أ/ علما أن : $a \times b = c$ جد قيمة العدد p

ب/ أكتب كلا من a ، b و c في النظام العشري

(3) نعتبر في \mathbb{Z}^2 المعادلة: (1) $38x - 53y = 15$

أ/ بين أنه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حلا للمعادلة (1) فإن $x \equiv 52 [53]$

ب/ استنتج حلول المعادلة (1)

(4) نعتبر الآن x و y عدداً طبيعياً ونسمي d قاسمهما المشترك الأكبر

أ/ عين القيم الممكنة لـ d

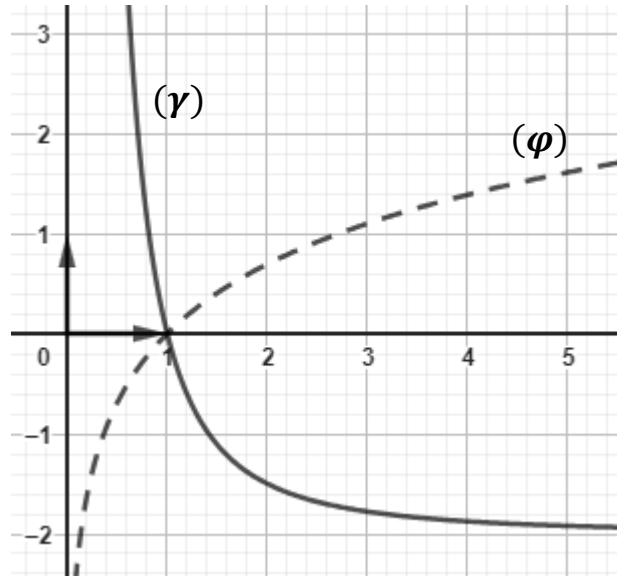
ب/ جد كل الثنائيات $(x; y)$ بحيث يكون $d = 15$

(5) يحتوي كيس على 10 قريصات مرقمة من 0 إلى 9 "لا نفرق بينها عند اللمس" ، نسحب في آن واحد قريصتين من الكيس

✓ أحسب احتمال كي يكون مجموع رقمي القريصتين المسحوبتين من بواقي قسمة 3^n على 7

التمرين الرابع (07 نقاط):

الجزء الأول:



(γ) و (φ) التمثيلان البيانيان للدالتين المعرفتين على $]0; +\infty[$ و $x \mapsto \ln x$ و $x \mapsto 2\left(\frac{1}{x^2} - 1\right)$ على الترتيب في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس ($\vec{i}; \vec{j}$) (0 ; \vec{i} ; \vec{j})
 (φ) و (γ) يتقاطعان في النقطة ذات الفاصلة 1 كما هو موضح في الشكل المقابل:
 الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = \frac{2}{x^2} - \ln x - 2$
 ✓ بقراءة بيانية حدد وضعية (γ) بالنسبة إلى (φ) على $]0; +\infty[$ ،
 ثم استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

الجزء الثاني:

نعتبر الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{2x^2 + x - \ln x + 1}{x}$
 (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس (0 ; \vec{i} ; \vec{j}).

(1) أحسب: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. فسّر النتائج هندسياً.

(2) أ/ أثبت أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(\frac{1}{x})}{x^2}$.

ب/ عين دون حساب: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{4 - f(1+h)}{h}$ ، ثم فسّر النتيجة هندسياً.

ج/ أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) أ/ أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x]$ ، ماذا تستنتج

ب/ أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 2x + 1$

(4) أرسم كلا من (Δ) و (C_f).

(5) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $U_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} (f(x) - (2x + 1)) dx$

أ/ أحسب U_n بدلالة n ثم استنتج طبيعة المتتالية (U_n)

ب/ لتكن A مساحة حيز المستوى المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) وبالمستقيمين

اللذين معادلتاهما $x = 1$ و $x = e^2$ ، تحقق من أنّ: $A = (U_0 - U_1) ua$

(6) نعتبر الدالة h المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ ، بالعلاقة: $h(x) = x^2(1 + \ln x) - 3x + 2$

أ/ أثبت أنه من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$ ، فإن: $\frac{h(x)}{x} = f\left(\frac{1}{x}\right) - 4$ ثم استنتج أن $h(x) \geq 0$

ب/ عين x بحيث يكون $h(x) = 0$

انتهى الموضوع الأول

التمرين الرابع (07 نقاط)

العلامة

التمرين الاول(04 نقاط)

العلامة

الجزء الاول:

تحديد وضعية (γ) بالنسبة إلى (φ)
- اشارة g(x)

0.5

0.25

الجزء الثاني:

(1) حساب نهايتي الدالة f عند 0 و +∞
التفسير

0.25+0.25

0.25

(2) أ/ اثبات انه من أجل كل x من D_f: $f'(x) = \frac{g(\frac{1}{x})}{x^2}$
ب/ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{4-f(1+h)}{h} = -f'(1) = 0$

0.5

0.25

0.25

ج/ استنتاج اتجاه تغير الدالة f:

0.5

* جدول تغيرات الدالة f:

0.25

(3) أ/ حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x]$

0.5

الاستنتاج

0.25

ب/ دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة ل (Δ):

0.5

(4) رسم كلا من (Δ) و (C_f).

0.25+0.25

(5) أ/ حساب U_n بدلالة n ثم استنتاج طبيعة المتتالية (U_n)

0.25+0.5

ب/ التحقق من أن: $A = (U_0 - U_1) ua$

0.25

(6) أ/ إثبات أن: $\frac{h(x)}{x} = f(\frac{1}{x}) - 4$

0.25

استنتاج أن $h(x) \geq 0$

0.5

ب/ تعيين x بحيث يكون $h(x) = 0$

0.25

اتهمى

(1) أ) بين ان المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين اساسها.

0.5

ب) استنتج عبارة v_n بدلالة n ثم عبارة u_n بدلالة n.

0.25+0.25

(2) أ) عين a₁

0.25

ب) اكمل الشجرة ثم عين r₁

0.25+0.5

ج) تبين أن: $r_n = -\frac{1}{6}a_n + \frac{2}{3}$

0.5

د) تبين أنه من أجل كل n ≥ 1:

0.5

$A_{n+1} = (A_n \cap R_n) \cup (\overline{A_n} \cap \overline{R_n})$

هـ) استنتاج أن: $a_{n+1} = \frac{1}{6}a_n + \frac{1}{3}$

0.25

ثم عبارة a_n بدلالة n:

0.25

و) استنتاج عبارة r_n بدلالة n ثم $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n$

0.25+0.25

التمرين الثاني (04 نقاط)

العلامة

(1) أ/ نبين أن المعادلة (E) تكافئ...

0.25

ب/ نحل في (E) المعادلة (E):

0.5

(2) أ/ تعيين قيم العدد الطبيعي n

0.5

ب/ تعيين طبيعة المثلث ABC

0.5

(3) أ/ كتابة العدد $\frac{z_A - z_C}{z_D - z_C}$ على الشكل الأسّي:

0.25

*/ استنتاج طبيعة التحويل الذي يحول A إلى D وعناصره المميزة:

0.25

0.25

ب/ تعيين مركز ونصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث ACD

0.25

(4) عين قيسا للزاوية الموجهة (u; AB)

0.5

ثم استنتاج مجموعة النقط (Γ).

0.5

(5) أ/ عين قيمة العدد الحقيقي α

0.5

ب/ تعيين (E) مجموعة النقط M

0.25

ج/ استنتج مجموعة نقط تقاطع (E) و (Γ).

0.25

العلامة

التمرين الثالث (05 نقاط)

0.25

(1) نشر وتبسيط العبارة:

0.5

دراسة حسب قيم n بواقي قسمة 3ⁿ على 7

0.5

(2) أ/ إيجاد قيمة العدد p

0.5

ب/ كتابة كلا من a ، b و c في النظام العشري

0.5

(3) أ/ تبين أنه إذا كانت الثنائية (x; y) حلاً للمعادلة (1)

0.5

فإن $x \equiv 52[53]$

0.5

ب/ استنتاج حلول المعادلة (1)

0.5

(4) أ/ عين القيم الممكنة ل d

0.75

ب/ إيجاد كل الثنائيات (x; y) بحيث يكون d = 15

0.5

(5) حساب احتمال كي يكون مجموع رقمي القريصتين

المسحوبتين من بواقي قسمة 3ⁿ على 7

التصحيح المفصل للموضوع الأول

تصحيح التمرين الأول :

(1) أ) تبين ان المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين اساسها.

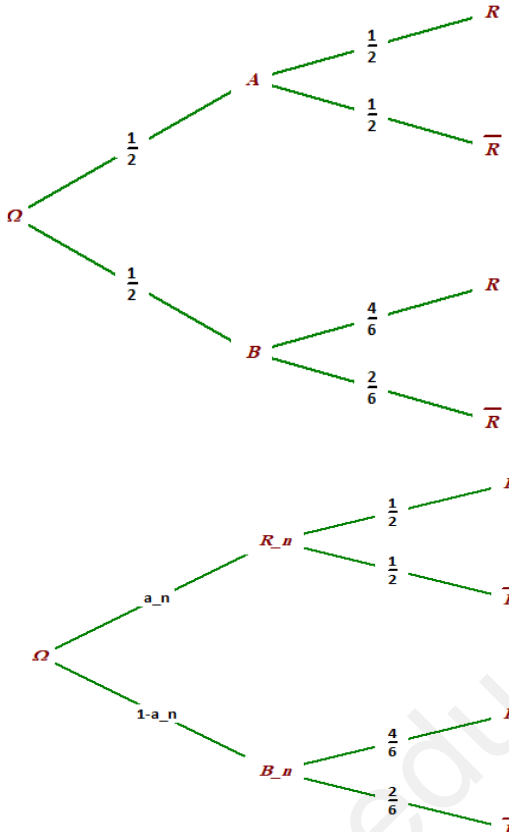
$$v_{n+1} = \frac{1}{6} v_n$$

أي (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{6}$

(ب) عبارة v_n بدلالة n : $v_n = \frac{1}{10} \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$ ، عبارة u_n بدلالة n : $u_n = \frac{1}{10} \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} + \frac{2}{5}$

(2) أ) $a_1 = \frac{1}{2}$

(ب) إكمال الشجرة



$$r_1 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{4}{6} = \frac{7}{12}$$

(ج) تبين أن: $r_n = -\frac{1}{6} a_n + \frac{2}{3}$

لدينا:

$$R_n = (R_n \cap A_n) \cup (R_n \cap \overline{A_n})$$

أي: $r_n = \frac{1}{2} a_n + \frac{4}{6} (1 - a_n) = -\frac{1}{6} a_n + \frac{2}{3}$

(د) تبين أنه من أجل كل $n \geq 1$:

$$A_{n+1} = (A_n \cap R_n) \cup (\overline{A_n} \cap \overline{R_n})$$

من أجل الرمية $(n + 1)$ بالنرد A :

يلعب الرمية n ويتحصل على اللون الأحمر R_n أو يلعب الرمية n

بالنرد B ويتحصل على اللون الأبيض $\overline{R_n}$

أي: $A_{n+1} = (A_n \cap R_n) \cup (\overline{A_n} \cap \overline{R_n})$

(ه) استنتاج أنه من أجل كل $n \geq 1$: $a_{n+1} = \frac{1}{6} a_n + \frac{1}{3}$

لدينا: $A_{n+1} = (A_n \cap R_n) \cup (\overline{A_n} \cap \overline{R_n})$ أي:

$$a_{n+1} = P(A_{n+1}) = \frac{1}{2} a_n + \frac{2}{6} (1 - a_n) = \frac{1}{6} a_n + \frac{1}{3}$$

عبارة a_n بدلالة n :

بما أن: $u_{n+1} = \frac{1}{6} u_n + \frac{1}{3}$ إذن: $u_n = \frac{1}{10} \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} + \frac{2}{5}$

(و) استنتاج عبارة r_n بدلالة n ثم $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n$:

لدينا: $r_n = -\frac{1}{6} a_n + \frac{2}{3}$ أي: $r_n = -\frac{1}{6} \left(\frac{1}{10} \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} + \frac{2}{5}\right) + \frac{2}{3}$

ومنه $r_n = -\frac{1}{10} \left(\frac{1}{6}\right)^n + \frac{3}{5}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{10} \left(\frac{1}{6}\right)^n + \frac{3}{5} \right] = \frac{3}{5} \quad \checkmark$$

تصحيح التمرين الثاني:

(1) / نبين أن المعادلة (E) تكافئ $(\bar{z} + 1)(\bar{z}^2 - 4\bar{z} + 7) = 0$ لدينا:

$$(\bar{z} + 1)(\bar{z}^2 - 4\bar{z} + 7) = 0 \quad (E) \dots \bar{z}^3 - 3\bar{z}^2 + 3\bar{z} + 7 = 0$$

$$\bar{z}^3 - 3\bar{z}^2 + 3\bar{z} + 7 = 0 \quad \text{يكافئ} \quad \bar{z}^3 - 4\bar{z}^2 + 7\bar{z} + \bar{z}^2 - 4\bar{z} + 7 = 0$$

ب/ نحل في C المعادلة (E):

$$(E) \text{ تكافئ } (\bar{z} + 1)(\bar{z}^2 - 4\bar{z} + 7) = 0$$

$$\overline{(z + 1)(z^2 - 4z + 7)} = 0 \quad \text{يكافئ} \quad (z + 1)(z^2 - 4z + 7) = 0$$

$$\Delta = -12 = (2\sqrt{3}i)^2, \quad \begin{cases} z = -1 \\ z^2 - 4z + 7 = 0 \end{cases} \quad \text{يكافئ}$$

$$z_2 = 2 + \sqrt{3}i \quad \text{و} \quad z_1 = 2 - \sqrt{3}i$$

$$S = \{-1; 2 - \sqrt{3}i; 2 + \sqrt{3}i\} \quad \text{ومنه:}$$

(2) / تعيين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد المركب $(z_B - z_A)^n$ عددا حقيقيا سالبا: لدينا

$$(z_B - z_A)^n = (2 + \sqrt{3}i + 1)^n = (3 + \sqrt{3}i)^n$$

$$(z_B - z_A)^n = (2\sqrt{3})^n e^{i\frac{n\pi}{6}} \quad \text{ومنه}$$

$$\frac{n\pi}{6} = \pi + 2k\pi \quad \text{ومنه} \quad \arg(z_B - z_A)^n = \pi + 2k\pi \quad \text{عددا حقيقيا سالبا معناه:}$$

$$n = 12k + 6 ; k \in \mathbb{N} \quad \text{إذن}$$

ب/ تعيين طبيعة المثلث ABC

$$AC = |z_C - z_A| = |3 - i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3} \quad AB = |z_B - z_A| = |3 + i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$$

$$BC = |z_C - z_B| = |-2i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$$

بما ان $AB = AC = BC$ فإن المثلث ABC متقايس الأضلاع

(3) / كتابة العدد $\frac{z_A - z_C}{z_D - z_C}$ على الشكل الأسّي:

$$\frac{z_A - z_C}{z_D - z_C} = \frac{-1 - 2 + i\sqrt{3}}{3 - 2 + i\sqrt{3}} = \frac{-3 + i\sqrt{3}}{1 + i\sqrt{3}} = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$$

*/ استنتاج طبيعة التحويل الذي يحول A إلى D وعناصره المميزة:

$$z_A - z_C = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}(z_D - z_C) \quad \text{معناه} \quad \frac{z_A - z_C}{z_D - z_C} = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$$

معناه النقطة A صورة النقطة D بالتشابه المباشر الذي مركزه النقطة C ونسبته $\sqrt{3}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$

ب/ تعيين مركز ونصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث ACD

$$\begin{cases} \left| \frac{z_A - z_C}{z_D - z_C} \right| = \sqrt{3} \\ (\overrightarrow{CD}; \overrightarrow{CA}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad \text{لدينا:} \quad \frac{z_A - z_C}{z_D - z_C} = \sqrt{3} e^{i\frac{\pi}{2}} \quad \text{معناه}$$

إذن المثلث ACD قائم في C ومنه مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ACD هو النقطة I منتصف الوتر [AD]

$$z_I = \frac{z_A + z_D}{2} = \frac{3}{2} - i\frac{1}{2} \quad \text{لاحقتها}$$

(4) / تعيين قيس للزاوية الموجهة $(\vec{u}; \overrightarrow{AB})$:

$$(\vec{u}; \overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z} \quad \text{لدينا}$$

*** / استنتاج (Γ) مجموعة النقط M(z) حيث :**

$$\vec{AM} = k \cdot \vec{AB} \text{ معناه } z - z_A = k(z_B - z_A) \text{ معناه } z + 1 = 2\sqrt{3}ke^{i\frac{\pi}{6}}$$

ومنه : من أجل k يمسح المجال $0; +\infty$ المجموعة (Γ) هي نصف مستقيم مبدؤه النقطة A وشعاع توجيهه

$$\vec{AB} \text{ لاحفته: } 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}} = 3 + i\sqrt{3}$$

(5) * / تعيين قيمة العدد α حيث $-\vec{CA} + 2\vec{CB} + \alpha\vec{CD} = \vec{0}$

$-\vec{CA} + 2\vec{CB} + \alpha\vec{CD} = \vec{0}$ معناه النقطة C هي مرجح الجملة $\{(A; -1), (B; 2), (D; \alpha)\}$

$$\alpha = -3 \text{ ومنه } \begin{cases} 2 = \frac{1+4+3\alpha}{1+\alpha} \\ -\sqrt{3} = \frac{0+2\sqrt{3}+0\cdot\alpha}{1+\alpha} \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} x_C = \frac{-x_A+2x_B+\alpha x_D}{-1+2+\alpha} \\ y_C = \frac{-y_A+2y_B+\alpha y_D}{-1+2+\alpha} \end{cases}$$

*** / تعيين (E) مجموعة النقط M من المستوي حيث :**

$$(*) \dots \|\vec{AM} + 2\vec{BM} - 3\vec{DM}\| \leq 2\|\vec{BM} - \vec{CM}\|$$

$$\|\vec{MA} - 2\vec{MB} + 3\vec{MD}\| \leq 2\|\vec{BM} + \vec{MC}\| \text{ تكافئ } (*)$$

$$\|-(\vec{MA} + 2\vec{MB} - 3\vec{MD})\| \leq 2\|\vec{BC}\| \text{ تكافئ } (*)$$

$$CM \leq BC \text{ تكافئ } \|(-1 + 2 - 3)\vec{CM}\| \leq 2BC \text{ تكافئ } (*)$$

ومنه مجموعة النقط (E) هي قرص مركزه النقطة C ونصف قطره هو: $BC = 2\sqrt{3}$

*** / استنتاج مجموعة نقط تقاطع القرص (E) ونصف المستقيم (AB) : لدينا القرص (E) مركزه C ونصف قطره**

$$AC = 2\sqrt{3} \text{ و } BC = 2\sqrt{3} \text{ معناه } A \text{ تنتمي إلى القرص } (E)$$

ومنه تقاطع القرص (E) ونصف المستقيم (AB) هو القطعة المستقيمة [AB]

تصحيح التمرين الثالث :

$$(1) \text{ نشر وتبسيط العبارة: } (t-6)(t^2+1) = t^3 - 6t^2 + t - 6$$

دراسة حسب قيم n بواقي قسمة 3^n على 7

$$\text{لدينا: } 3^6 \equiv 1[7], 3^5 \equiv 5[7], 3^4 \equiv 4[7], 3^3 \equiv 6[7], 3^2 \equiv 2[7], 3^1 \equiv 3[7], 3^0 \equiv 1[7]$$

$$\text{وعليه من أجل } \beta \in \mathbb{N} : 3^{6\beta+3} \equiv 6[7], 3^{6\beta+2} \equiv 2[7], 3^{6\beta+1} \equiv 3[7], 3^{6\beta} \equiv 1[7]$$

$$3^{6\beta+5} \equiv 5[7], \quad 3^{6\beta+4} \equiv 4[7]$$

(2) أ / إيجاد قيمة العدد p

$$\text{لدينا: } a = 2 \times p^0 + 0 \times p^1 + p^2 = 2 + p^2$$

$$b = 5 \times p^0 + 2 \times p^1 + p^2 = 5 + 2p + p^2$$

$$c = 4 \times p^0 + 5 \times p^1 + p^2 + 3 \times p^3 + p^4 = 4 + 5p + p^2 + 3p^3 + p^4$$

$$(2 + p^2)(5 + 2p + p^2) = 4 + 5p + p^2 + 3p^3 + p^4 \text{ معناه } a \times b = c$$

$$\text{يكافئ } p^3 - 6p^2 + p - 6 = 0 \text{ أي } (p-6)(p^2+1) = 0 \text{ ومنه } p = 6$$

ب/ كتابة كلام من a ، b و c في النظام العشري

$$c = 4 + 5.6 + 6^2 + 3.6^3 + 6^4 = 2014, b = 5 + 2.6 + 6^2 = 53, a = 2 + 6^2 = 38$$

(3) أ/ تبين أنه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حلاً للمعادلة (1) فإن $x \equiv 52[53]$

$$\text{لدينا: } 38x - 53y = 15 \text{ يكافئ } 38x = 15 + 53y \text{ أي } 38x \equiv 15[53]$$

$$\text{ولدينا } 38 \equiv -15[53] \text{ ومنه } -15x \equiv 15[53] \text{ أي } x \equiv -1[53] \text{ وعليه } x \equiv 52[53]$$

ب/ استنتاج حلول المعادلة (1)

$$\text{لدينا: } x = 53k + 52 \text{ حيث } k \in \mathbb{Z} \text{ وبالتعويض في (1) نجد } y = 38k + 37$$

وبالتالي مجموعة حلول المعادلة (1) هي الثنائيات $(x; y)$ من الشكل $(53k + 52; 38k + 37)$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

(4) أ/ عين القيم الممكنة لـ d

$$\text{لدينا } d / x \text{ و } d / y \text{ و } d / 38x - 53y \text{ أي } d / 15 \text{ وبالتالي: } d \in \{1; 3; 5; 15\}$$

ب/ إيجاد كل الثنائيات $(x; y)$ بحيث يكون $d = 15$

$$\text{نضع } x = 15x' \text{ و } y = 15y' \text{ حيث } x' \text{ و } y' \text{ أوليان فيما بينهما}$$

$$\text{نحصل على } 38x' - 53y' = 1 \text{ أي } 38 \times 15x' - 53 \times 15y' = 15$$

$$\text{لدينا الثنائية } (7; 5) \text{ حلاً خاصاً للمعادلة ومنه } \begin{cases} 38x' - 53y' = 1 \\ 38(7) - 53(5) = 1 \end{cases} \text{ بالطرح نجد:}$$

$$38(x' - 7) = 53(y' - 5)$$

$$\text{لدينا: } 53 / 38(x' - 7) \text{ و } PGCD(38; 53) = 1 \text{ إذن حسب مبرهنة "غوص" } (x' - 7) / 53$$

$$\text{ومنه } x' - 7 = 53\alpha \text{ أي } x' = 53\alpha + 7 \text{ حيث } \alpha \in \mathbb{N} \text{ وبالتعويض نجد } y' = 38\alpha + 5$$

$$\text{وبالتالي: } x = 15(53\alpha + 7) = 795\alpha + 105 \text{ و } y = 15(38\alpha + 5) = 570\alpha + 75$$

$$\text{حيث } \alpha \in \mathbb{N}$$

(5) حساب احتمال كي يكون مجموع رقمي القرصتين المسحوبتين من بواقي قسمة 3^n على 7

$$\text{عدد طرق السحب هو: } C_{10}^2 = 45 \text{ وعدد الحالات الملائمة: } 12 \text{ وهي}$$

$$\{(0; 1), (0; 2), (0; 3), (0; 4), (0; 5), (0; 6), (1; 2), (1; 3), (1; 4), (1; 5), (2; 3), (2; 4)\}$$

$$\text{إذن الاحتمال المطلوب هو: } \frac{12}{45} = \frac{4}{15}$$

تصحيح التمرين الرابع:

الجزء الأول: تحديد وضعية (γ) بالنسبة إلى (φ) على $]0; +\infty[$:
 على المجال: $]0; 1[$ (γ) فوق (φ) ، وعلى المجال: $]1; +\infty[$ (γ) تحت (φ)
 - إشارة $g(x)$

x	0	1	$+\infty$
$g(x)$	+	0	-

الجزء الثاني:

1) حساب نهايتي الدالة f عند 0 و $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

التفسير: المستقيم ذو المعادلة $x = 0$ مقارب لـ (C_f)

2) أ/ اثبات انه من أجل كل x من $D_f = \frac{g(\frac{1}{x})}{x^2}$ الدالة f قابلة للاشتقاق على D_f ودالتها المشتقة f' حيث:

$$f'(x) = \frac{x(4x - \frac{1}{x} + 1) - 2x^2 - x + \ln x - 1}{x^2} = \frac{2x^2 - 2 + \ln x}{x^2} = \frac{g(\frac{1}{x})}{x^2}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{4 - f(1+h)}{h} = -f'(1) = 0 \text{ ب/}$$

التفسير: (C_f) يقبل مماسا عند 1 يوازي حامل محور الفواصل

ج/ استنتاج اتجاه تغير الدالة f : من أجل كل x من D_f

لدينا: إشارة $f'(x)$ هي من إشارة $g(\frac{1}{x})$ وهي:

الدالة f متناقصة تماما على المجال $]0; 1[$ و متزايدة تماما على المجال $]1; +\infty[$

* جدول تغيرات الدالة f :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	0
$f(x)$	$+\infty$	4	$+\infty$

3) أ/ حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x]$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x] = 1$$

نستنتج أن المستقيم ذو المعادلة: $y = 2x + 1$ مقارب مائل لـ (C_f) جوار $+\infty$

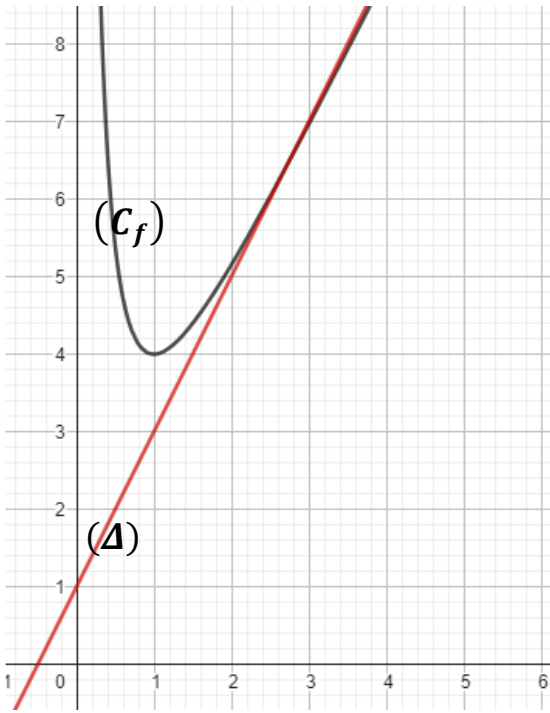
ب/ دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة لـ (Δ) :

لدينا $[f(x) - (2x + 1)] = \frac{1 - \ln x}{x}$ ومنه إشارة الفرق هي من إشارة $(1 - \ln x)$ وهي:

إذن: (C_f) يقع فوق (Δ) على $]e; +\infty[$ وتحت (Δ) على المجال $]0; e[$ و (C_f) يقطع (Δ) في النقطة ذات

الإحداثيات $(e; 2e + 1)$.

(4) رسم كلامن (Δ) و (C_f) .



(5) من أجل كل عدد طبيعي n : $U_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} (f(x) - (2x + 1))dx$ / حساب U_n بدلالة n ثم استنتاج طبيعة المتتالية (U_n)

$$U_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} (f(x) - (2x + 1))dx = \int_{e^n}^{e^{n+1}} \frac{1 - \ln x}{x} dx$$

$$= \int_{e^n}^{e^{n+1}} \frac{1}{x} dx - \int_{e^n}^{e^{n+1}} \frac{\ln x}{x} dx = -n + \frac{1}{2}$$

ومنه (U_n) حسابية أساسها $r = -1$ وحدها الأول $U_0 = \frac{1}{2}$

ب/ التحقق من أن: $A = (U_0 - U_1) ua$

لدينا: "باستعمال علاقة شال"

$$A = \int_1^e (f(x) - (2x + 1))dx - \int_e^{e^2} (f(x) - (2x + 1))dx = (U_0 - U_1) ua$$

(6) / إثبات أن: $\frac{h(x)}{x} = f\left(\frac{1}{x}\right) - 4$

$$f\left(\frac{1}{x}\right) - 4 = 2 \times \frac{1}{x} + 1 + \frac{1 - \ln \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} - 4 = \frac{x^2(1 + \ln x) - 3x + 2}{x} = \frac{h(x)}{x}$$

لدينا:

$h(x) \geq 0$ استنتاج أن ✓

لدينا: من جدول التغيرات $f(x) \geq 4$ تكافئ $f(x) \geq f(1)$ ومنه $f\left(\frac{1}{x}\right) \geq 4$ أي $f\left(\frac{1}{x}\right) - 4 \geq 0$

وبالتالي $h(x) \geq 0$

ب/ تعيين x بحيث يكون $h(x) = 0$

$$h(x) = 0 \text{ تكافئ } f\left(\frac{1}{x}\right) - 4 = 0 \text{ أي } f\left(\frac{1}{x}\right) = f(1) \text{ ومنه } \frac{1}{x} = 1 \text{ وبالتالي } x = 1$$

اتمى بحمد الله وبفضله تصحيح الموضوع الأول من البكالوريا التجريبي دورة 2024

مادة الرياضيات للأقسام النهائية شعبة الرياضيات

لاتنسونا من صالح دعائكم