الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

ثانويات :البياضة الجديدة- محمد العيد ال خليفة بالدبيلة -- حنكة علي دورة ماي 2015

الشعبة : تقني رياضي امتحان بكالوريا تجريبية لتعليم الثانوي

اختبار في مادة : الرياضيات المدة : 4 ساعة و 30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول : (04 نقاط)

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي: $u_0 = -3$ و $u_{n+1} = \frac{u_n - 8}{2u_n - 9}$

1. أ) مثل بيانيا الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \left\{\frac{9}{2}\right\}$ بـــ: $f(x) = \frac{x-8}{2x-9}$

ب) استعمل منحنى الدالة f لتخمين اتجاه تغير المتتالية (u_n)

2. برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n < 1$

3. برهن ان (u_n) متزايدة ثم استنتج انها متقاربة

4. نعتبر المتتالية (v_n) حيث من اجل كل عدد طبيعي n : $v_n = 1 - u_n$

أ) برهن انه من اجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1} < \frac{1}{7} v_n$ ثم استنتج ان : $0 < v_n < 4\left(\frac{1}{7}\right)^n$

ب) احسب نهاية كل من المتتالية (v_n) و (u_n)

التمرين الثاني : (05 نقاط)

1. أ) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $(z - i)(z^2 + 2z + 4) = 0$

ب) z_1 و z_2 هما الحلان المترافقان . اكتب الحلول على الشكل الاسي

2. ينسب المستوي المركب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{U}, \vec{V})$، نعتبر النقط A و B لاحقتهما على الترتيب $z_A = i$ ، $z_B = -1 - \sqrt{3}i$. S التشابه المباشر الذي مركزه O و يحول A الى B

أ) اكتب العبارة المركبة للتشابه S ثم عين نسبته و زاويته

ب)نعتبر متتالية النقط (A_n) المعرفة ب $A_0 = A$ و من اجل كل عدد طبيعي n : $A_{n+1} = S(A_n)$

و نرمز بـــ z_n الى لاحقة النقطة A_n

- عين لاحقتي النقطتين A_1 و A_2 - برهن انه اجل كل عدد طبيعي n : $z_n = 2^n e^{i\left(\frac{\pi}{2} + n\frac{5\pi}{6}\right)}$

3. نعتبر في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة ذات المجهول $(x; y)$: $12x - 5y = 3$ .... $(*)$

ا)حل في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة $(*)$.لاحظ ان الثنائية $(4; 9)$ حل للمعادلة

ب) استنتج مجموعة الاعداد الطبيعية n بحيث تكون النقط A_n تنتمي الى المحور الحقيقي الموجب

4. بين انه من اجل كل عدد طبيعي n العدد $\frac{z_{n+3}}{z_n}$ تخيلي صرف. استنتج طبيعة المثلثات OA_nA_{n+3}

5. عين بدلالة n قيسا للزاوية $\left(\overrightarrow{OA_n}; \overrightarrow{OA_{2n}}\right)$ ثم استنتج قيم n بحيث تكون النقط O، A_n و A_{2n} في استقامية

التمرين الثالث : (04 نقاط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. نعتبر النقطتين $A(3,-1,2)$ ، $B(1,1,-2)$ و المستوي (P) معادلته الديكارتية $x-2y+3z=0$ و النقطة G معرفة ب $3\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}=\vec{0}$

1. اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB) ثم عين احداثيات L نقطة تقاطع المستقيم (AB) و المستوي (P)
2. أ) عين طبيعة و عناصر (E) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق $\|3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\|=\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\|$.

   ب) احسب المسافة بين النقطة G و المستوي (P). و استنتج الوضعية النسبية بين المجموعة (E) و المستوي (P).
3. أ) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل G و يعامد (P). ثم عين احداثيات H نقطة تقاطع (P) و (Δ)

   ب) استنتج المسافة بين النقطة L و المستقيم (Δ).
4. أ) بين ان التمثيل الوسيطي للمستوي (AGH) هو $\begin{cases} x=3+\alpha-\beta \\ y=-1-\alpha+3\beta \ ; \ (\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2 \\ z=2+2\alpha-4\beta \end{cases}$ و ان معادلته الديكارتية هي $x-y-z-2=0$

   ب) اثبت ان المستويين (P) و(AGH) متقاطعان وفق مستقيم يطلب كتابة تمثيله الوسيطي

التمرين الرابع : (07 نقاط)

I- نعتبر الدالة g المعرفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=e^{\frac{x}{x+1}}$.

1- أدرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها .

2- بين أنه من اجل كل عدد حقيقي $x>-1$ فان: $0<g(x)<e$.

II- لتكن الدالة f المعرّفة على المجموعة $]-1;+\infty[$ كما يلي : $\begin{cases} f(x)=x+1-e^{\frac{x}{x+1}}, & x\neq -1 \\ f(-1)=0 \end{cases}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. ا) عين نهاية الدالة f عند $+\infty$

   ب) تحقق ان $\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=1-\frac{1}{x}\left(\frac{x}{x+1}e^{\frac{x}{x+1}}\right)$ ، ثم برهن ان الدالة f قابلة للاشتقاق عند العدد -1

   ج) اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة -1

   د)برهن ان المستقيم (D) ذي المعادلة $y=x-e+1$ مقارب مائل ل (C_f) ثم ادرس الوضع النسبي لـــ (D) و(C_f)
2. ا) من اجل كل x من $]-1;+\infty[$ احسب $f'(x)$ و تحقق ان: $f''(x)=\frac{2x+1}{(x+1)^4}e^{\frac{x}{x+1}}$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f

   ب) شكل جدول تغيرات الدالة f'، نقبل ان $\lim\limits_{x\to -1}f'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=1$

   ج) برهن ان المعادلة $f'(x)=0$ تقبل حلين احدهما معدوم و الاخر α حيث $-0.72<\alpha<-0.71$ ثم استنتج اشارة $f'(x)$
3. ادرس اتجاه تغير الدالة f، ثم شكل جدول تغيراتها
4. ارسم كلا من(T)،(D) و (C_f) (ناخذ: $f(\alpha)=0.20$)

الموضوع الثاني

التمرين الأول : (05 نقاط)

I. $a; b$ و c اعداد طبيعية حيث : $1 \le a \le b \le c$

عين الاعداد $a; b$ و c علما ان في النظام ذي الاساس a يكون $b+c=\overline{46}$ و $bc=\overline{545}$

II- نعتبر المعادلة (I) ذات المجهولين الصحيحين x و y حيث : $21x-17y=8$ $\quad (I)$

1. ا) عين الثنائية $(x_0;y_0)$ حل للمعادلة (I) .

ب) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (I) .

2. ا) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 9^n على 13

ب) بين أنه إذا كانت الثنائية (α,β) حل للمعادلة (I) فان : $3^{34\beta+20}-9^{21\alpha}-2\equiv 0[13]$.

3. أ) بين أنه إذا كانت الثنائية (x,y) حل للمعادلة (I) و $x\equiv 0[4]$ فان : $y\equiv 0[13]$

ب) عين كل الثنائيات (x,y) حلول المعادلة (I) بحيث : $PGCD(x,y)=4$

التمرين الثاني : (05 نقاط)

I- $P(z)$ كثير حدود حيث: $P(z)=z^3-4z^2+6z-4$; z عدد مركب

أ) احسب $P(2)$ ثم عين العددين الحقيقيين α و β بحيث من اجل كل z $\quad z)=(z-2)(z^2+\alpha z+\beta)$

ب) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z)=0$ ثم اكتب الحلول على الشكل الاسي

II- ينسب المستوي المركب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{U},\vec{V})$. ليكن S التحويل النقطي الذي ير

بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث : $z'=\frac{1+i}{2}z$

1. بين ان S تشابه مباشر يطلب تعيين عناصره المميزة

2. نعتبر متتالية النقط (A_n) المعرفة بـــ $A_0=2$ و من اجل كل عدد طبيعي n : $A_{n+1}=S(A_n)$

و نرمز بـــ z_n الى لاحقة النقطة A_n

ا) علم النقط A_1 ،A_2 ،A_3 و A_4

ب) من اجل كل عدد طبيعي n نضع: $u_n=OA_n$. اثبت ان المتتالية (u_n) هندسية يطلب تعيين اساسها و

حدها الاول ، ثم تحقق انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n=2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$

3. ابتداء من اي رتبة n_0 تنتمي كل النقط A_{n_0} الى القرص الذي مركزه O و نصف قطره 0.1

4. هل المتتالية (u_n) متقاربة ؟ علل ؟

5. اثبت انه من اجل كل عدد طبيعي n فان : $\frac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}}=i$. ثم استنتج طبيعة المثلث OA_nA_{n+1}

6. لتكن (v_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$: $v_n=OA_0+OA_1+\cdots+OA_n$. عبر عن v_n بدلالة n ث

اوجد $\lim_{x\to+\infty} v_n$. فسر النتيجة

التمرين الثالث : (04 نقاط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. نعتبر النقط $A(1,-2,3)$ ، $B(-2,1,-8)$ و $C(0,0,-2)$

المستوي (P) معادلته الديكارتية $x-2y+3z=0$ و النقطة G معرفة بـــ: $3\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}=\vec{0}$

1. برهن ان مجموعة النقط M من الفضاء حيث $\overrightarrow{AM^2} - \overrightarrow{CM^2} = 10$ هي مستوي (P) معادلته $x - 2y + 5z = 0$
2. برهن ان (S)مجموعة النقط M من الفضاء حيث $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + y + 2z = 0$ هي سطح كرة يطلب تعيين مركزها I و نصف قطرها R
3. بين ان تقاطع (P) و (S) هي دائرة يطلب تعيين مركزها w و نصف قطرها r
4. لتكن G_α نقطة من الفضاء معرفة بـــ : $-\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \alpha\overrightarrow{GC} = \vec{0}$

أ) ماهي قيم α التي يكون من اجلها G_α مرجحا للجملة $\{(A;-1),(B;1),(C;\alpha)\}$

ب) برهن ان : $\overrightarrow{CG_\alpha} = \frac{1}{\alpha}\overrightarrow{AB}$ ، ثم استنتج مجموعة النقط G_α عندما يتغير α في $\mathbb{R}_+^*$

5. أ)عين معادلة المستوي (Q) الذي يمس (S) في النقطة O

ب) اثبت ان المستويين (P) و(Q) متقاطعان وفق مستقيم يطلب تمثيل وسيطي له

ج) اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) ، ثم استنتج تقاطع المستويات (ABC)،(P) و(Q)

التمرين الرابع : (06 نقاط)

I- باستعمال قابلية الاشتقاق للدالة $x \to lnx$ عند 1، بين ان : $\lim\limits_{x\to1}\frac{lnx}{x-1} = 1$ ثم استنتج ان : $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

II- نعتبر الدالة f المعرفة على $[1;+\infty[$ بـــ: $f(x) = ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$. (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. أ) بين انه من اجل كل عدد حقيقي $x \geq 1$: $f(x) = lnx + ln\left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}\right)$

ب) من اجل $x \geq 1$ بين ان: $x - 1 = \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}\left(x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right)$

ج) بين ان الدالة f غير قابلة لاشتقاق عند1 . فسر النتيجة بيانيا (يمكن وضع $y = \sqrt{1-\frac{1}{x^2}}$)

2. أ) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب) بين انه من اجل كل عدد حقيقي من$]1;+\infty[$: $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f

ج) أنشئ (C_f) .

3. ليكن S مساحة الحيز D المحدد (C_f)و محور الفواصل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x = 1$ و $x = 3$ استنتج ان : $S \leq 4ln(1+\sqrt{2})$ (ملاحظة: $\left(1+\sqrt{2}\right)^2 = 3 + 2\sqrt{2}$)

III- نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـــ : $g(x) = \frac{e^{2x}+1}{2e^x}$. نسمي (C_g) تمثيلها البياني

1. بين انه من اجل كل عدد حقيقي $x \geq 0$ فان: $g(x) \geq 1$
2. أ) بين ان $gof(x) = x$ ثم بين انه اذا كانت $M(x,y)$ نقطة من (C_f) فان $M'(y,x)$ نقطة من(C_g) .

ب)ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنيين (C_f) و(C_g) ؟ أرسم المنحنى (C_g) في المعلم السابق .