ثانوية مليكة قايد	اختبار الفصل الثاني	السنة الثالثة تقني رياضي
2022 - 2021	في الرياضيات	المدة : 02 ساعة

التمرين الأول (8ن):

f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=ln(1+e^{-2x})$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) بين أن من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x)=-2x+ln(1+e^{2x})$ ثم احسب نهايتي f عند $-\infty$ و عند $+\infty$

2) بين أن المنحني (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين يطلب كتابة معادلة لكل منهما .

3) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

4) بين أن (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي المستقيم ذا المعادلة : $y=-x$ يطلب كتابة معادلة له

5) ارسم (T) و (C_f)

6) a عدد حقيقي موجب تماما ، M و N نقطتان من (C_f) فاصلتاهما على الترتيب a و $-a$
بين أن المستقيم (MN) له منحى ثابت يطلب تعيينه .

7) أ- بين أنه لكل x من $[0;1]$: $ln(1+e^{-2})\le\int_0^1 f(x)dx\le ln\,2$

ب- استنتج حصرا لمساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها : $y=0$ ، $x=0$ و $x=1$

التمرين الثاني (6ن):

I) (U_n) المتتالية العددية المعرفة بحدها الأول $U_0=2$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1}=\dfrac{7U_n-5}{U_n+1}$

1) بين أن من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1}=7-\dfrac{12}{U_n+1}$ ، ثم برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n : $1\le U_n\le 5$

2) تحقق أن من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1}-U_n=\dfrac{-U_n^2+6U_n-5}{U_n+1}$ ، ثم استنتج اتجاه تغير (U_n)

II) (V_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n : $V_n=\dfrac{U_n-5}{U_n-\alpha}$ حيث α عدد حقيقي

1) بين أن من أجل كل عدد طبيعي n : $V_{n+1}=\dfrac{2}{7-\alpha}\times\dfrac{U_n-5}{U_n-\left(\dfrac{5+\alpha}{7-\alpha}\right)}$

2) عين قيمة α حتى تكون (V_n) هندسية يطلب تعيين أساسها

3) نضع : $\alpha=1$

أ) اكتب V_n بدلالة n .

ب) تحقق أن : $V_n=1-\dfrac{4}{U_n-1}$.

جـ) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n=\left(\dfrac{1}{U_0-1}\right)^2+\left(\dfrac{1}{U_1-1}\right)^2+.....+\left(\dfrac{1}{U_n-1}\right)^2$

التمرين الثالث (6ن):

1) n عدد صحيح يختلف عن 1 . نضع : $a=3n+5$ و $b=n-1$.

أ) تحقق أن : $a=3b+8$.

ب) جد قيم العدد الصحيح n التي يكون من أجلها $\dfrac{a}{b}$ عددا صحيحا .

2) نفرض أن n عدد طبيعي .

أ) نضع $PGCD(a;b)=d$
استنتج كل القيم الممكنة لـ $PGCD(a;b)$

ب) عين الثنائيات $(a;b)$ بحيث يكون $PGCD(a;b)=8$.

جـ) ناقش حسب قيم n القيم الممكنة لِـ $PGCD(a;b)$.

بالتوفيق

تصحيح الاختبار الثاني في الرياضيات 3 ت ر

التمرين الأول (08 ن)

$f(x) = \ln(1+e^{-2x})$

$D =]-\infty, +\infty[$

① من أجل كل x من $\mathbb{R}$

$f(x) = \ln(e^{-2x}(e^{2x}+1))$

$= \ln e^{-2x} + \ln(e^{2x}+1)$

$= -2x + \ln(1+e^{2x})$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \ln(1+e^{-2x})$

$= \boxed{+\infty}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \ln(1+e^{-2x})$

$= \boxed{0}$

② لدينا $y=0$ معادلة مستقيم أفقي

$\lim_{x\to-\infty} f(x)+2x = \lim_{x\to-\infty} \ln(1+e^{+2x})$

$= 0$

③ معادلته $y=-2x$ مستقيم مقارب عند $-\infty$

③ من أجل كل x من $\mathbb{R}$

$f'(x) = \dfrac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$

$f'(x) < 0$ و f متناقصة تماما على $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	$+\infty$ ↘	0

④ رسم المماس (T) يوازي المستقيم ذا المعادلة $y=-x$

$f'(x)=-1$ يعني $\dfrac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}} = -1$

يعني $-2e^{-2x} = -e^{-2x}-1$

يعني $-e^{-2x} = -1$

يعني $e^{-2x}=1$ يعني $-2x=0$

يعني $x=0$

(T) مماس (C_f) في النقطة ذات الفاصلة $x_0=0$

$y = f'(0)(x-0)+f(0)$

$y = -1(x) + \ln 2$

$(T): y = \boxed{-x+\ln 2}$

⑤ الرسم في الوثيقة.

⑥ $a>0$

M, N نقطتان من (C_f)

$N(-a, f(-a))$ $M(a, f(a))$

مخنيب ميل المستقيم (MN)

$\alpha = \dfrac{f(-a)-f(a)}{-a-a}$

لدينا $f(-a)-f(a) = \ln(1+e^{2a}) - \ln(1+e^{-2a})$

$= \ln(1+e^{2a}) - [-2a+\ln(1+e^{2a})]$

$= \boxed{2a}$

$\alpha = \dfrac{2a}{-2a} = \boxed{-1}$

ميل المستقيم (MN) هو -1

وهذا المستقيم يوازي المستقيم (T) والمعادلة $y=-x$

وهو المطلوب الثاني

⑦ ⓐ من أجل كل x من $[0,1]$

لدينا f متناقصة تماما

ومنه $0 \le x \le 1$

إذن $f(1) \le f(x) \le f(0)$

أي $\ln(1+e^{-2}) \le f(x) \le \ln 2$

بإدماج المتباينة

$\ln(1+e^{-2}) \le f(x) \le \ln 2$

ومنه

$\int_0^1 \ln(1+e^{-2})\,dx \le \int_0^1 f(x)\,dx \le \int_0^1 \ln 2\,dx$

أي $A = \int_0^1 f(x)\,dx$

إذن

$\ln(1+e^{-2}) \le A \le \ln(2)$

التمرين الثاني (06 ن)

$u_0 = 2$ $\quad u_{n+1} = \dfrac{7u_n-5}{u_n+1}$

① تبيين أن:

$u_{n+1} = \dfrac{7u_n+7+12}{u_n+1}$

$= 7\left(\dfrac{u_n+1}{u_n+1}\right) - \dfrac{12}{u_n+1} = 7 - \dfrac{12}{u_n+1}$

البرهان بالتراجع أن: $1 \le u_n \le 5$

من أجل كل n من $\mathbb{N}$

$n=0$ $\quad 1 \le u_0 = 2 \le 5$ و $P(0)$ صحيحة

نفرض $P(n)$ صحيحة ونبرهن صحة $P(n+1)$

$P(n)$ صحيحة، $1 \le u_n \le 5$

$P(n+1)$ صحيحة، $1 \le u_{n+1} \le 5$ ؟

$1 \le u_n \le 5$ يكافئ $2 \le u_n+1 \le 6$

يكافئ $\frac{1}{6} \le \frac{1}{u_n+1} \le \frac{1}{2}$ يكافئ

$-6 \le \dfrac{-12}{u_n+1} \le -2$ يكافئ

أي $1 \le 7 - \dfrac{12}{u_n+1} \le 5$

$1 \le u_{n+1} \le 5$

من أجل كل عدد طبيعي n: $1 \le u_n \le 5$

(u_n) محدودة.

② من أجل كل عدد طبيعي n:

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{7u_n-5}{u_n+1} - u_n$

$= \dfrac{-u_n^2+6u_n-5}{u_n+1}$

$-u_n^2+6u_n-5 = -(u_n-1)(u_n-5)$

$\Delta = 16$

$x_1 = 5$ $\quad x_2 = 1$ $\quad 1 \le u_n \le 5$

يعني $\boxed{0 \le u_n - 1 \le 4}$ (موجب)

$\boxed{-4 \le u_n - 5 \le 0}$ (سالب)

ومنه $u_{n+1} - u_n \ge 0$

و (u_n) متزايدة على $\mathbb{N}$

(II) $V_n = \frac{U_n - 5}{U_n - \alpha}$

① $V_{n+1} = \frac{U_{n+1} - 5}{U_{n+1} - \alpha}$

$= \frac{\frac{7U_n - 5}{U_n + 1} - 5}{\frac{7U_n - 5}{U_n + 1} - \alpha}$

$= \frac{2U_n - 10}{7U_n - \alpha U_n - 5 - \alpha}$

$= \frac{2(U_n - 5)}{(7-\alpha)U_n - (5+\alpha)}$

$= \frac{2(U_n - 5)}{(7-\alpha)\left[U_n - \frac{5+\alpha}{7-\alpha}\right]}$

$= \frac{2}{7-\alpha} \times \frac{U_n - 5}{U_n - \left(\frac{5+\alpha}{7-\alpha}\right)}$

② تعيين q بحيث (V_n) هندسية

لدينا $V_{n+1} = q \times V_n$

و $V_{n+1} = \frac{2}{7-\alpha} \times \frac{U_n - 5}{U_n - \left(\frac{5+\alpha}{7-\alpha}\right)}$

و $V_n = \frac{U_n - 5}{U_n - \alpha}$

بالمطابقة نجد $q = \frac{2}{7-\alpha}$

و $\frac{5+\alpha}{7-\alpha} = \alpha$

أي $5 + \alpha = 7\alpha - \alpha^2$

$\alpha^2 - 6\alpha + 5 = 0$

$\alpha_1 = 1 \quad \alpha_2 = 5 \quad \Delta = 16$

لما $\alpha = 5$ نجد $q = \frac{2}{7-5} = 1$

متتالية ثابتة

لما $\alpha = 1$ نجد $q = \frac{2}{7-1} = \frac{1}{3}$

③ نضع $\alpha = 1$ ف

$V_n = \frac{U_n - 5}{U_n - 1}$

(V_n) هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$

حدها الأول $V_0 = \frac{U_0 - 5}{U_0 - 1} = -3$

أ) الحد العام

$V_n = V_0 q^n = -3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$

ب) التحقق من الاقتراح

$V_n = \frac{U_n - 5}{U_n - 1} = 1 - \frac{4}{U_n - 1}$

بالتمعن

ج) $S_n = \left(\frac{1}{U_0 - 1}\right)^2 + \left(\frac{1}{U_1 - 1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{U_n - 1}\right)^2$

$V_n = 1 - \frac{4}{U_n - 1}$ منه $V_n - 1 = \frac{-4}{U_n - 1}$

منه $\frac{V_n - 1}{-4} = \frac{1}{U_n - 1}$

أي $\frac{1}{U_n - 1} = \frac{1 - V_n}{4} = \frac{1}{4}(1 - V_n)$

$S_n = \left[\frac{1}{4}(1 - V_0)\right]^2 + \left[\frac{1}{4}(1 - V_1)\right]^2 + \dots + \left[\frac{1}{4}(1 - V_n)\right]^2$

$= \frac{1}{16}\left[(1 - V_0)^2 + (1 - V_1)^2 + \dots + (1 - V_n)^2\right]$

$= \frac{1}{16}\left[1 - 2V_0 + V_0^2 + 1 - 2V_1 + V_1^2 + \dots + 1 - 2V_n + V_n^2\right]$

$= \frac{1}{16}\left[\underbrace{(1 + 1 + \dots + 1)}_{n+1 \text{ عامل}} - 2(V_0 + V_1 + \dots + V_n) + (V_0^2 + V_1^2 + \dots + V_n^2)\right]$

$= \frac{1}{16}\left[n + 1 - 2\left(V_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}\right) + V_0^2\left(\frac{1 - (q^2)^{n+1}}{1 - q^2}\right)\right]$

$= \frac{1}{16}\left[n + 1 - 2\left(-3 \times \frac{1 - (\frac{1}{3})^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}}\right) + 9\left(\frac{1 - (\frac{1}{9})^{n+1}}{1 - \frac{1}{9}}\right)\right]$

$= \frac{1}{16}\left[n + 1 - 2\left(-\frac{9}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)\right) + 9\left(\frac{9}{8}\right)\left(1 - \left(\frac{1}{9}\right)^{n+1}\right)\right]$

$S_n = \frac{1}{16}\left[n + 1 + 9\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) + \frac{81}{8}\left(1 - \left(\frac{1}{9}\right)^{n+1}\right)\right]$

التمرين ③ (6ن)

$a = 3n + 5 \quad b = n - 1$

أ) $3b + 8 = 3(n - 1) + 8$

$= 3n + 5$

$= a$

إذن $\boxed{a = 3b + 8}$

ب) $\frac{a}{b} = \frac{3b + 8}{b}$

$= 3 + \frac{8}{b}$

$\frac{a}{b}$ عدد صحيح يعني b يقسم 8 منه

$b \in \{-8, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 8\}$ ومنه

$n - 1 \in \{-8, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 8\}$ ومنه

$n \in \{-7, -3, -1, 0, 2, 3, 5, 9\}$

② n عدد طبيعي

أ) $PGCD(a, b) = d$

$\begin{cases} d | a \\ d | b \end{cases}$ منه $d | a - 3b$

أي $d | 8$

منه $d \in D_8$

$d \in \{1, 2, 4, 8\}$

ب) استنتاج $PGCD(a, b) = 8$ لما (a, b)

$\begin{cases} 8 | a \\ 8 | b \end{cases}$ يعني $8 | (a - 2b)$

يعني $8 | 3n + 5 - 2n + 2$

يعني $8 | n + 7$

يعني $n + 7 = 8k$ ومنه $n = 8k - 7$ ، $k \in \mathbb{N}^*$

أي $\begin{cases} a = 3(8k - 7) + 5 = 24k - 16 \\ b = 8k - 7 - 1 = 8k - 8 \; ; \; k \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

$(a, b) = (24k - 16, 8k - 8) \; ; \; k \in \mathbb{N}^*$

ج) مناقشة حسب قيم n القيم الممكنة لـ $PGCD(a,b)=d$

حسب خوارزمية أقليدس

$PGCD(a,b)=PGCD(b,r)$

$$\begin{array}{r|l} 3n+5 & n-1 \\ \hline -3n+3 & 3 \\ \hline 8 & \end{array}$$

$3n+5=3(n-1)+8$

$a=3b+8$

$PGCD(a,b)=PGCD(b,r)$

$=PGCD(n-1,8)$

نقسم $n-1$ على 8 نجد

$n-1=8k+r$ و $0\le r<8$

$PGCD(n-1,8)=PGCD(8,r)$

$d=PGCD(n-1,8)=PGCD(8,r)$

$d=1$ لما $r=1$ أو $r=3$ أو $r=5$ أو $r=7$

ولدينا $n-1=8k+r$

يعني $\boxed{n=8k+1+r}$

$$\begin{cases} n=8k+2 \\ \text{أو } n=8k+4 \\ \text{أو } n=8k+6 \\ \text{أو } n=8k+8=8(k+1) \end{cases}$$

تقسيم $n=8k$

$d=2$ لما $r=2$ أو $r=6$

يعني $\begin{cases} n=8k+3 \\ \text{أو } n=8k+7 \end{cases}$

$d=4$ لما $r=4$ إذن

$\boxed{n=8k+5}$

$d=8$ لما $r=0$

$\boxed{n=8k+1}$

ط2

① $d=8$

يعني $PGCD(a,b)=8$

أي $b\equiv 0[8]$ يعني $n-1\equiv 0[8]$

يعني $n\equiv 1[8]$ يعني

$\boxed{n=8k+1}$ $k\in\mathbb{N}$

② $PGCD(a,b)=4$

يعني 4 يقسم b و 8 لا يقسم b

يعني $\begin{cases} b\equiv 0[4] \\ n\not\equiv 1[8] \end{cases}$ ← من أجل الأولى

يعني $\begin{cases} n-1\equiv 0[4] \\ n\not\equiv 1[8] \end{cases}$ يعني

$n=4\alpha+1$ يعني $\begin{cases} n\equiv 1[4] \\ n\not\equiv 1[8] \end{cases}$

و $4\alpha+1\not\equiv 1[8]$

يعني $4\alpha\not\equiv 0[8]$

يعني $\alpha\equiv 0[2]$

يعني $\alpha\neq 2k$

يعني $\alpha=2k+1$ $(k\in\mathbb{N})$

إذن $n=4\alpha+1$

و $\alpha=2k+1$

ومنه $n=4(2k+1)+1$

$\boxed{n=8k+5}$; $k\in\mathbb{N}$

③ $PGCD(a,b)=2$

معناه 2 يقسم b

و 4, 8 لا يقسم b } يعني

$\begin{cases} b\equiv 0[2] \\ b\not\equiv 0[4] \\ b\not\equiv 0[8] \end{cases}$ يعني $\begin{cases} n-1\equiv 0[2] \\ n-1\not\equiv 0[4] \\ n-1\not\equiv 0[8] \end{cases}$

يعني $\begin{cases} n\equiv 1[2] \\ n\not\equiv 1[4] \\ n\not\equiv 1[8] \end{cases}$ يعني $\begin{cases} n=2l+1 \\ 2l+1\not\equiv 1[4] \\ 2l+1\not\equiv 1[8] \end{cases}$

يعني $\begin{cases} n=2l+1 \\ 2l\not\equiv 0[4] \\ 2l\not\equiv 0[8] \end{cases}$

يعني $\begin{cases} n=2l+1 \\ l\not\equiv 0[2] \\ l\not\equiv 0[4] \end{cases}$ يعني $\begin{cases} n=2l+1 \\ l=4k+1 \\ l=4k+3 \end{cases}$

منه $n=2(4k+1)+1$

$\boxed{n=8k+3}$

$n=2(4k+3)+1$ $(k\in\mathbb{N})$

$\boxed{n=8k+7}$

$PGCD(a,b)=1$

معناه 2, 4, 8 لا تقسم b

ومنه a و b أوليان فيما بينهما ومنه

$n=8k+p$ $(k\in\mathbb{N})$

حيث

$p\in\{0,2,4,6\}$

ط2 صحة

n	$PGCD(a,b)$
$8k$	1
$8k+1$	8
$8k+2$	1
$8k+3$	2
$8k+4$	1
$8k+5$	4
$8k+6$	1
$8k+7$	2

التمرين الأول: