

وزارة التربية الوطنية

ثانويات المقاطعة الأولى
دورة ماي 2022

مديرتي التربية لولايتي أدرار و تيميمون
الشعبة : تقني رياضي

المدة : أربع ساعات ونصف

امتحان البكالوريا التجريبي في مادة الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :
الموضوع الأول :

التمرين الأول : (03 نقاط)

أجب بصرح أو خطأ مع التبرير في كل حالة من الحالات التالية:

(1) (u_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $u_n = \int_n^{n+1} e^{1-x} dx$

المجموع $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ يساوي $e - \left(\frac{1}{e}\right)^n$

(2) من أجل كل عدد طبيعي n : $4^{2n} + (-1)^{n+1} \equiv 0 [17]$

(3) باستعمال المكاملة بالتجزئة نجد أن : $\int_1^e x \ln x dx = \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{2}$

(4) N عدد طبيعي يكتب في نظام التعداد ذو الأساس 7 على الشكل $\overline{5616}^7$.

كتابة العدد الطبيعي N في نظام التعداد ذو الأساس 5 هي: $\overline{31042}^5$

التمرين الثاني : (05 نقاط)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على \mathbb{N} بـ:

$$\begin{cases} u_0 = 11 \\ u_{n+1} = 2 + \sqrt{u_n - 2} \end{cases}$$

(1) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $3 \leq u_n \leq 11$

(2) أ) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n - 2} (1 - \sqrt{u_n - 2})$

ب) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما ، ثم استنتج تقاربها .

(3) أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_{n+1} - 3 \leq \frac{1}{2}(u_n - 3)$

ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_n - 3 \leq 8 \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(4) لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على \mathbb{N} بـ: $v_n = \ln(u_n - 2)$

أ) بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ يطلب تعيين حدها الأول v_0 .

ب) اكتب كلا من v_n و u_n بدلالة n ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ مرة ثانية.

(5) احسب المجموع S حيث $S = v_{1443} + v_{1444} + \dots + v_{2022}$

ثم استنتج الجداء P حيث $P = (u_{1443} - 2) \times (u_{1444} - 2) \times \dots \times (u_{2022} - 2)$

التمرين الثالث : (04 نقاط)

نعتبر المعادلة ذات المجهولين الصحيحين x و y حيث : $11x - 5y = 2 \dots \dots (E)$

(1) أ) أثبت أنه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ من \mathbb{Z}^2 حلا للمعادلة (E) فإن : $y \equiv 4 [11]$

(ب) استنتج حلول المعادلة (E) .

(2) ليكن n عددا طبيعيا غير معدوم . نضع : $a = 5n + 2$ و $b = 11n + 4$

(أ) عين القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b

(ب) عين قيم n بحيث يكون $PGCD(a; b) = 2$

(ج) استنتج قيم n بحيث يكون العددين a و b أوليين فيما بينهما .

(3) (أ) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي غير المعدوم n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 10

(ب) استنتج رقم أحاد العدد 2^{2016}

(ج) عين كل الثنائيات $(x; y)$ من $\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*$ التي هي حلول للمعادلة (E) وتحقق : $2^{y-2x} \equiv 8[10]$

التمرين الرابع: (08 نقاط)

(I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ كمايلي: $g(x) = x + 2 - e^x$

(1) ادرس اتجاه تغير الدالة g على المجال $[0; +\infty[$.

(2) (أ) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $[0; +\infty[$ ، وتحقق أن : $1,14 < \alpha < 1,15$.

(ب) استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x من المجال $[0; +\infty[$

(II) نعرف على المجال $[0; +\infty[$ الدالة العددية f كمايلي :

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1}$$

(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ الوحدة $\|\vec{i}\| = 4Cm$

(1) (أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0; +\infty[$: $f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}}$

(ب) استنتج النهاية $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(2) (أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{e^x \times g(x)}{(xe^x + 1)^2}$

(ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f على $[0; +\infty[$ ، ثم شكل جدول تغيراتها على نفس المجال

(ج) بين ان : $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha + 1}$ ، ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

(3) اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

(4) (أ) تحقق أنه من أجل كل x من $[0; +\infty[$: $f(x) - x = \frac{(x+1) \times u(x)}{xe^x + 1}$ ، حيث $u(x) = e^x - xe^x - 1$

(ب) ادرس اتجاه تغير الدالة u على المجال $[0; +\infty[$ ثم احسب $u(0)$ واستنتج إشارة $u(x)$.

(ج) استنتج وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (T)

(5) انشئ كلا من المستقيم (T) والمنحنى (C_f) (الوحدة $4Cm$)

(6) (أ) عين دالة أصلية F للدالة f على المجال $[0; +\infty[$.

(ب) احسب مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C_f) و المماس (T) و محور الترتيب و المستقيم ذا المعادلة

$$x = 1$$

الموضوع الثاني :

التمرين الأول: (03 نقاط)

f و g دالتان معرفتان على \mathbb{R} ب: $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ و $g(x) = \frac{x^3}{1+x^2}$ ، F و G دالتاهما الأصليتان على \mathbb{R} .

$$I_2 = \int_0^1 g(x) dx \quad , \quad I_1 = \int_0^1 f(x) dx \quad \text{و نعتبر}$$

في كل حالة من الحالات التالية عين الإقتراح الصحيح الوحيد من بين الإجابات (أ) ، (ب) و (ج) مع التعليل:

$$F(x) = \ln(1+x^2) \quad (\text{أ}) \quad F(x) = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \quad (\text{ب}) \quad F(x) = 2 \ln(1+x^2) \quad (\text{ج}) \quad (1)$$

$$I_1 = \ln(2) \quad (\text{أ}) \quad I_1 = \frac{1}{2} \ln(2) \quad (\text{ب}) \quad I_1 = 2 \ln(2) \quad (\text{ج}) \quad (2)$$

$$I_1 + I_2 = \int_0^1 x dx \quad (\text{أ}) \quad I_1 + I_2 = \frac{1}{2} \int_0^1 x dx \quad (\text{ب}) \quad I_1 + I_2 = 2 \int_0^1 x dx \quad (\text{ج}) \quad (3)$$

$$I_2 = 1 - \ln(2) \quad (\text{أ}) \quad I_2 = 1 - \frac{1}{2} \ln(2) \quad (\text{ب}) \quad I_2 = \frac{1}{2} (1 - \ln(2)) \quad (\text{ج}) \quad (4)$$

التمرين الثاني: (05 نقاط)

(I) (u_n) المتتالية العددية المعرفة بعدها الأول u_0 حيث $u_0 = \alpha$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{u_n - 1}{u_n + 3}$

. عين قيمة العدد الحقيقي α بحيث تكون المتتالية (u_n) ثابتة على \mathbb{N}

(II) في ما يلي نضع $u_0 = 0$

(1) عين العدد الحقيقي b بحيث يكون من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 1 + \frac{b}{u_n + 3}$

(2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $-1 < u_n \leq 0$

(3) (أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = \frac{-(u_n + 1)^2}{u_n + 3}$ ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

(ب) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة .

(4) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية \mathbb{N} ب: $v_n = \frac{1}{u_n + 1}$

(أ) بين أن المتتالية (v_n) حسابية أساسها $\frac{1}{2}$ و احسب حدها الأول v_0

(ب) اكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n واحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(5) احسب المجموع S حيث $S = \frac{8}{u_0 + 1} + \frac{8}{u_1 + 1} + \dots + \frac{8}{u_{2022} + 1}$

التمرين الثالث: (04 نقاط)

(1) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 10

(2) بين انه من أجل كل عدد طبيعي n : $1443^{4n+2} - 2 \times 109^{2n+1} - 11 \equiv 0 [10]$

(3) عيّن قيم العدد الطبيعي n حيث $7 \times 3^{n+1} - 1 \equiv 0 [10]$ و $10 < n \leq 25$

(4) ليكن A كتابته $xx02102$ في النظام ذي الأساس 3 و كتابته $y67y$ في النظام ذي الأساس 9 .
(أ) عيّن x و y (ب) اكتب A في النظام العشري (ج) اكتب A في النظام ذي الأساس 7

التمرين الرابع: (08 نقاط)

(I) $h(x) = x^2 - \ln x^2$ دالة عددية ذات المتغير الحقيقي x و المعرفة على \mathbb{R}^* ب:

• ادرس اتجاه تغير الدالة h ، ثم استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x من \mathbb{R}^* : $h(x) > 0$

(II) نعرف على \mathbb{R}^* الدالة العددية f كمايلي :

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(-\frac{\ln(x^2)}{x} - x - \frac{2}{x} \right)$$

وليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

(1) (أ) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

(ب) احسب $\lim_{x \leq 0} f(x)$ و $\lim_{x \geq 0} f(x)$ ثم فسر النتيجةين بيانياً

(2) (أ) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم: $f'(x) = -\frac{h(x)}{2x^2}$

(ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

(ج) بيّن أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة : $y = -\frac{1}{2}x$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) ثم ادرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ) .

(3) (أ) تحقق أنه من أجل كل x من \mathbb{R}^* : $-x \in \mathbb{R}^*$ و $f(x) + f(-x) = 0$ و تستنتج شفعية الدالة f .

(ب) بيّن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0, 3[; 0, 4[$.

(ج) استنتج أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا آخر β يطلب تعيين حصر له .

(4) (أ) بيّن أن المنحنى (C_f) يقبل مماسين (T_1) و (T_2) يوازيان المستقيم (Δ) يطلب كتابة معادلتيهما .

(ب) انشئ (Δ) ، (T_1) ، (T_2) و (C_f)

(ج) ناقش بيانياً و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة : $f(x) = -\frac{1}{2}x + m$

(5) لتكن k دالة عددية معرفة على $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ ب: $k(x) = \frac{1}{2} \left(-\frac{\ln(x+1)^2}{x+1} - (x+1) - \frac{2}{x+1} \right) + 2$ ، (C_k) تمثيلها البياني

⊕ بيّن أنه يوجد تحويل بسيط يحول المنحنى (C_f) إلى المنحنى (C_k) (الإنشاء غير مطلوب)

(6) (أ) بيّن أن الدالة F المعرفة على \mathbb{R}^* ب: $F(x) = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4} [\ln(x^2)]^2 - 2 \ln|x| \right)$ هي دالة أصل لـ f على \mathbb{R}^*

(ب) λ عدد حقيقي حيث $\lambda > 1$. احسب التكامل التالي $A(\lambda) = -\int_1^\lambda f(x) dx$ و احسب $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda)$