الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — ثانوية: الشهيد عبيد أحمد – بن ناصر–

مديرية التربية لولاية تقرت — الشعبة : تقني رياضي

امتحان بكالوريا تجريبي للتعليم الثانوي — دورة ماي: 2023

اختبار في مادة: الرياضيات المدة:04ساو 30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعيين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول:(04 نقــاط)

يحتوي كيس U_1 على أربع كرات حمراء تحمل الارقام 1,1,0,6 وثلاث كرات سوداء تحمل الارقام 6,6,1 وكرتين بيضاوين تحملان الرقمين 1,6 (كل الكرات متشابهة لا نفرق بينها عند اللمس) نسحب عشوائيا وعلى التوالي دون إرجاع ثلاث كرات من هذا الكيس.

1) أحسب احتمال الحوادث التالية

A: ظهور لونين فقط في الكرات الثلاثة المسحوبة . B:الكرات الثلاثة المسحوبة مختلفة الألوان.

C:الكرات الثلاثة المسحوبة تحمل نفس الرقم . D:مجموعة أرقام الكرات الثلاثة المسحوبة فردي.

E:الحصول على كرة تحمل الرقم 6 على الاقل. F:الحصول على كرة واحدة سوداء تحمل الرقم 6.

2) أ- أحسب $P(B \cap C)$ ب- هل الحادثتان B وC مستقلتان ؟

3) نضع الكرات السوداء والحمراء في كيس U_2 .

نعتبر اللعبة التالية :للمشاركة يدفع لاعب y دج (حيث yعدد طبيعي) ,ويقوم بسحب كرتين في آن واحد من الكيس U_2. بحيث يربح اللاعب 25 دج على كل كرة سوداء مسحوبة ويخسر اللاعب 10 دج على كرة حمراء مسحوبة

- نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل إمكانية سحب الربح أو الخسارة المناسب لها .

أ- عين قيم X. ب- أحسب الأمل الرياضياتي E(X).

ج- عين قيم y حتي تكون اللعبة في صالح اللاعب .

التمرين الثاني: (04 نقــاط)

الجزء الأول : (U_n)متتالية عددية معرفة N^* على بحدها الأول $U_1 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n:بـــ : $U_{n+1} = \frac{n}{2(n+1)}U_n + \frac{3(n+2)}{2(n+1)}$

1- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم : $U_n \leq 3$

2- ادرس اتجاه تغير المتتالية (U_n) ثم استنتج انها متقاربة

3- احسب نهاية المتتالية (U_n)

الجزء الثاني: لتكن المتتالية (V_n) المعرفة على N^* بـــ : $V_n = n(3 - U_n)$

1- برهن ان المتتالية (V_n) هندسية يطلب أساسها وحدها الأول V_1 .

2- عبر عن V_n بدلالة n ثم استنتج U_n بدلالة n

3- احسب نهاية (U_n) مرة اخرى

4- احسب المجموع S_n التالي : $S_n = \frac{V_1}{3-U_1} + \frac{V_2}{3-U_2} + \cdots + \frac{V_n}{3-U_n}$

التمرين الثالث:(05 نقـــاط)

1) نعتبر في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z :

$\bar{z}^3 - 3\bar{z}^2 + 3\bar{z} + 7 = 0$ ...(E) ، $\bar{z}$ هو مرافق العدد المركب z.

أ*/بين أن المعادلة (E) تكافئ المعادلة : $(\bar{z}+1)(\bar{z}^2 - 4\bar{z} + 7) = 0$.

ب*/ حـل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) .

2) في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{u};\vec{v})$ ، نعتبر النقط A, B, C و D لواحقها على الترتيب : $z_A = -1$ ، $z_B = 2 + i\sqrt{3}$ ، $z_C = \overline{z_B}$ ، $z_D = 3$.

أ*/ عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $(z_B - z_A)^n$ عددا حقيقيا ســـالبا .

ب*/ عين طبيعة المثلث ABC .

1) أ*/أكتب العدد $\frac{z_A - z_C}{z_D - z_C}$ على الشكل الأسي،ثم استنتج أن النقطة A صورة D بتحويل نقطي يطلب تعيينه.

ب*/ أوجد مركز ونصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث ACD .

4) (Γ) مجموعة النقط M من المستويلاحقتها z تحقق: $z + 1 = 2\sqrt{3}.k.e^{i\frac{\pi}{6}}$ حيث k يمسح المجال $[0;+\infty[$

*/عين قيسا للزاوية الموجهة $(\vec{u};\overrightarrow{AB})$ ، ثم استنتج مجموعة النقط (Γ).

5) أ*/ عين قيمة العدد الحقيقي α بحيث يكون : $-\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB} + \alpha\overrightarrow{CD} = \vec{0}$.

ب*/ عين (E) مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\left\|-\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{BM} - 3\overrightarrow{DM}\right\| \le 2\left\|\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{CM}\right\|$

جـ*/ استنتج مجموعة نقط تقاطع (E) و (Γ).

التمرين الرابع:(07نقـــاط)

1) g الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـــ: $g(x)=x^2e^x$

أ*/ أدرس اتجاه تغير الدالة g على المجال $]0;+\infty[$.

ب*/ استنتج أنه : إذا كان $0\prec x\prec 1$ فإن $g(x)\prec g\left(\frac{1}{x}\right)$ و إذا كان $x\succ 1$ فإن $g(x)\succ g\left(\frac{1}{x}\right)$

2) نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي :

$$f(x)=(x^2-2x+2)e^x+e^{\frac{1}{x}}-3e$$

(C_f) تمثيـلها البيـاني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

h دالـة عددية معرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $h(x)=e^{\frac{1}{x}}-3e$. (C_h) تمثيلها البياني (**أنظر الملحق**)

أ*/ أحسـب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$.

ب*/ بين أنه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x)=g(x)-g\left(\frac{1}{x}\right)$ ، ثم احسب $f'(1)$.

ج*/ شكل جدول تغيرات الدالة f على المجال $]0;+\infty[$.

3) أ*/بين أن المعادلة: $(x^2-2x+2)e^x=-h(x)$ تقبل حلين α و β حيـث: $1.5\prec\beta\prec 1.6$ و $0.5\prec\alpha\prec 0.6$ ،ثم استنتج أن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين .

ب*/ أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمنحنى (C_h).

ج*/ بين ان المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) في النقطة التي فاصلتها 1 يطلب كتابة معادلته .

4) أ*/ أرسم (T) و (C_f). **(الملحـــق يعـــاد مع ورقة الإجابـــة)**

ب*/ m عدد حقيقي موجب تماما، أوجد قيمة m حتى تقبل المعادلة (E) حلين متمايزين:

$$(E)....f(x)=(m^2-2m+2)e^m+h(m)$$

5) أ*/بين أنه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$: $\int_1^x[f(t)-h(t)]dt=(x^2-4x+6)e^x-3e$

ب*/ ليكن العدد λ من المجـال $]0;1]$ ،

$A(\lambda)$ مســاحة الحيز المستوي المحـــدد بالمنحنيين (C_h) و (C_f) و المستقيمين اللذين معادلتاهما :

$x=\lambda$ و $x=1$.

*استنتـــج $A(\lambda)$ (مقدرة بوحدة المساحة)، ثم احســب $\lim\limits_{\lambda\xrightarrow{>}0} A(\lambda)$.

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني:

التمرين الأول:(04 نقــاط)

يحتوي صندوق على خمس كرات بيضاء تحمل الأرقام 1، 1،1، 1،0- و خمس كرات سوداء تحمل الأرقام 1، 1، 0، 0،
1- لا نفرق بينها باللمس. نسحب عشوائيا و في آن واحد 3 كرات من الصندوق.

I/ نعتبر الأحداث التالية :

A : " الحصول على كرة بيضاء واحدة فقط". B : " الحصول على كرة بيضاء على الأقل ".

C : " الكرات الثلاث المسحوبة لها نفس اللون". D : " الحصول على اللونين الأبيض و الأسود ".

F : " مجموع أرقام الكرات الثلاث المسحوبة يساوي0 ".

1/ أحسب إحتمال الأحداث A، B و C .

2/ بيّن أنّ : $P(D)=\frac{5}{6}$ و $P(F)=\frac{31}{120}$ و $P(C\cap F)=\frac{7}{120}$.

3/ إذا كان مجموع أرقام الكرات المسحوبة يساوي 0 ما هو إحتمال أن تكون الكرات الثلاث من نفس اللون ؟

II/نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل مخرج مجموع أرقام الكرات الثلاث المسحوبة.

1/ عيّن قيم المتغير العشوائي X .

2/ عرّف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X و أحسب أمله الرياضي.

التمرين الثاني:(04 نقــاط)

1)نعتبر المعادلة (E)ذات المجهولين الصحيحين x و y حيث: $11x-5y=2$

أ*/ أثبت أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$من $\mathbb{Z}^2$ حلا للمعادلة (E)فإن $y\equiv 4[11]$.

ب*/ استنتج حلول المعادلة (E).

2)ليكن n عددا طبيعيا غير معدوم ، نضـــع : $a=5n+2$ و $b=11n+4$.

أ*/ عين القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b.

ب*/عين قيم العدد الطبيعي غير المعدوم n بحيث يكون: $PGCD(a;b)=2$.

ج*/ استنتج قيم العدد الطبيعي غير المعدوم n بحيث يكون العددان a و b أوليان فيما بينهما.

3)من أجل كل عدد طبيعي n ، نضع : $A=5n^2+7n+2$ و $B=11n^2+15n+4$.

أ*/ بين أن العدد $(n+1)$ يقسم كل من العددين A و B.

ب*/استنتج حسب قيم n القاسم المشترك الأكبر للعددين A و B.

التمرين الثالث: (05 نقــاط)

1)عين العددين المركبين z_1 و z_2 حيث :
$$\begin{cases}2z_1+iz_2=1+i\sqrt{3}\\(\sqrt{3}+2i)z_1-z_2=(1-\sqrt{3})i\end{cases}$$

2)في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o;\vec{u};\vec{v})$،نعتبر النقطتين A و B ذات اللاحقتين: $z_A=1-i$ و $z_B=2+\sqrt{3}+i$.

أ*/اكتب z_A على الشكل الأسي .

ب*/بين أن: $\frac{z_B}{z_A}=(1+\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}}$ ، ثم استنتج الشكل الأسي للعدد z_B .

ج*/هل توجد قيم للعددالطبيعي n حتى تكون صورة العدد $\left(\frac{z_B}{z_A}\right)^n$ تنتمي إلى المنصف الأول؟

3)أ*/ أوجد لاحقة النقطة B' صورة النقطة B بالدوران r الذي مركزه النقطة O وزاويته $\frac{-\pi}{6}$.

ب*/احسب مساحة الدائرة (γ) التي قطرها $[BB']$. (مقدرة بوحدة المساحة)

ج*/ عين مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي حيث: $\arg\left[(z-z_B)^2\right]=\arg(z_B)-\arg(z_{B'})$

د*/عين z_C لاحقة النقطة C حتى يكون الرباعي $AB'BC$ مستطيل، ثم اوجد z_I لاحقة مركز ثقله.

4)نضـــع: $f=ros$ (يرمز o إلى تركيب التحويلين S و r) .

أ*/عين العبارة المركبة للتشابه المباشر S حيث يكون f تشابه مباشر مركزه O ونسبته 2 وزاويته $\frac{\pi}{3}$

ب*/ أوجد مساحة صورة الدائرة (γ) بالتشابه المباشر S (مقدرة بوحدة المساحة).

5) أ*/ إذا كان $S(M)=M'$ ، ما طبيعة المثلث OMM' ؟

ب*/عين مجموعة النقط M من المستوي التي يكون من أجلها : $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AM'}=0$

التمرين الرابع: (07نقـــاط)

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ: $f(x)=x-e+\ln\left(1+2e^{-2(x-e)}\right)$

و (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1) أ*/ تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x)=-x+e+\ln\left(2+e^{2(x-e)}\right)$

ب */ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

ج*/ أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

2) أ*/ بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين (D) و (D') معادلتاهما:

$y=x-e$ و $y=-x+\ln 2+e$ عند $+\infty$ و عند $-\infty$ على الترتيب.

ب*/ ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيمين المقاربين (D) و (D').

ج*/ بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $x=\frac{1}{2}\ln 2+e$ هو محور تناظر للمنحنى (C_f).

3) أرسم (Δ)، (D)، (D') و (C_f)

4) ليكن (D_m) المستقيم الذي معادلته : $y=mx-m\left(e+\frac{\ln 2}{2}\right)+\frac{\ln 2}{2}$ حيث m وسيط حقيقي.

أ*/ بين أن جميع المستقيمات (D_m) تشمل النقطة الثابتة $A\left(\frac{\ln 2}{2}+e\ ;\ \frac{\ln 2}{2}\right)$.

ب*/ ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد نقط تقاطع المستقيم (D_m) و المنحنى (C_f) .

5) نضع: $I=\int_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e}\left[f(x)-(x-e)\right]dx$ ، $I_n=\int_0^1 \ln\left(1+X^n\right)dX$ ، n عدد طبيعيغير معدوم

أ*/ فسر هندسيا العدد I واحسب العدد I_1.

ب*/ بين أن: $0\le I_n\le \ln 2$

ج*/ عين اتجـاه تغير المتتالية (I_n) ثم استنتج أنها متقاربة.

6) باستعمال : $\ln(1+X)\le X$ ، من أجل كل $X\in]0;+\infty[$

أ*/ استنتج أن : $0\le I+I_1\le \int_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e} 2e^{-2(x-e)}dx-1+\ln 4$

ب*/ اعط حصرا للعدد $I+I_1$.

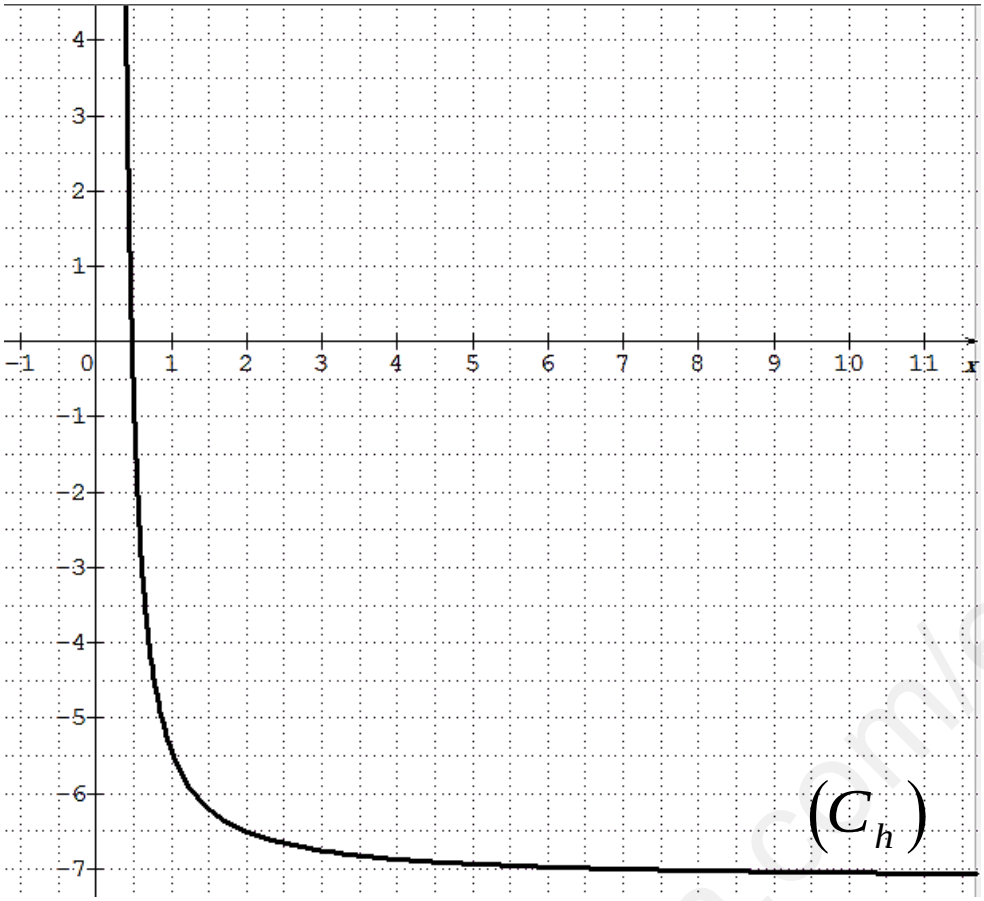
انتهى الموضوع الثاني

الملحق:

الاسم :.....

اللقب :.....

القسم :.....

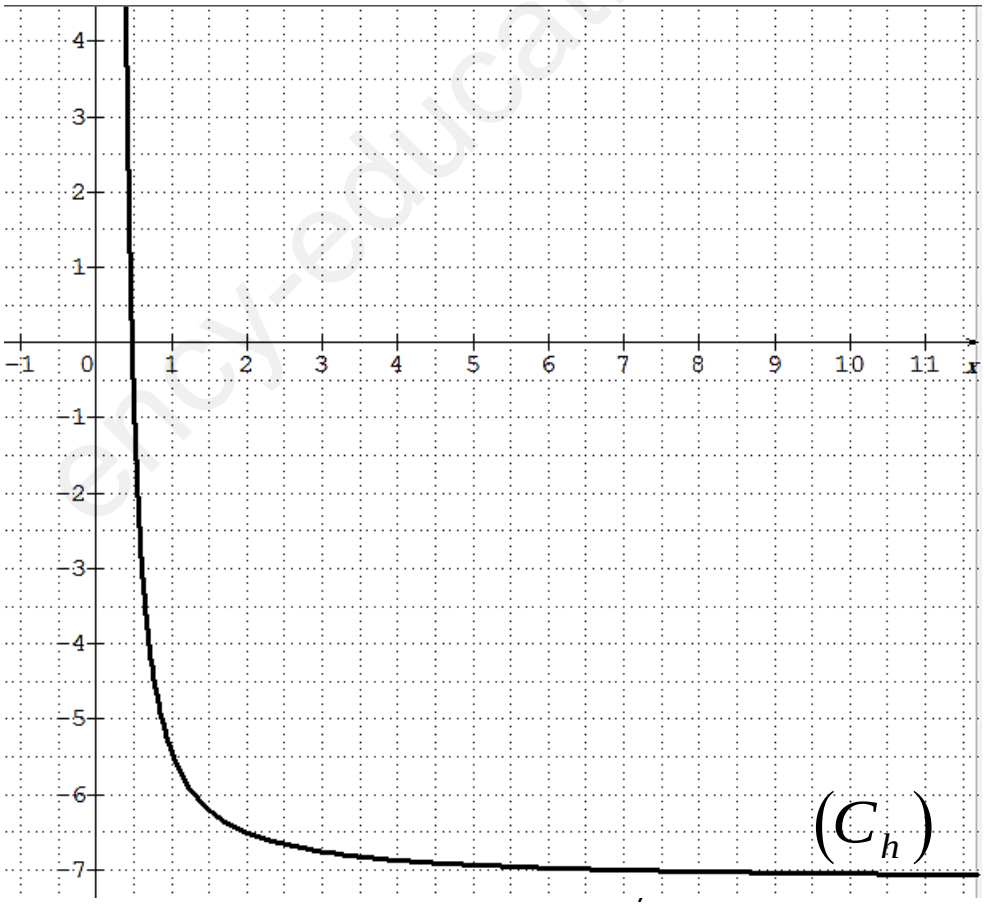


الملحق:

الاسم :.....

اللقب :.....

القسم :.....



تصحيح البكالوريا التجريبي 2023 تقني رياضي

الموضوع الاول: التمرين الأول:(04 نقاط)

1) كتابة التمثيل الوسيطي (d): t وسيط حقيقي

أي أن: $x-2=\frac{y-1}{2}=1-z=t$ ومنه: $(d):\begin{cases}x-2=t\\ \frac{y-1}{2}=t\ ;t\in\mathbb{R}\\ 1-z=t\end{cases}$

إذن: التمثيلالوسيطي للمستقيم (d) هو $\begin{cases}x=t+2\\ y=2t+1;t\in\mathbb{R}\\ z=-t+1\end{cases}$

***/ تبيان أن (d) و (d') ليسا من نفس المستوي:**

$\vec{u}(1;2;-1)$ شعاع توجيه (d)، $\vec{u}'(3;1;2)$ شعاع توجيه (d')

بماأن $\frac{1}{3}\neq\frac{1}{1}$ فإنالشعاعين $\vec{u}(1;2;-1)$ و $\vec{u}'(3;1;2)$

غير مرتبطين خطيا ، فيكون المستقيمان (d) و (d')

إما ليسا من نفس المستوي و إما متقاطعان من نفس المستوي

لتكن $E(x;y;z)$ نقطة تقاطع (d) و (d') أي :

$\begin{cases}x=t+2=3t'+4...(1)\\ y=2t+1=t'+3...(2)\ ;(t,t')\in\mathbb{R}^2\\ z=-t+1=2t'+3...(3)\end{cases}$ نبحث عن الثنائية (t,t')

بجمع (1) و (3): $t'=\frac{-4}{5}$ وبتعويضها في (1) أو (3)

نجد: $t=\frac{-2}{5}$، الثنائية $\left(\frac{-2}{5},\frac{-4}{5}\right)$ لا تحقق (2)

ومنـــه: (d) و (d') ليسا من نفس المستوي

2) أ) إيجاد المعادلة الديكارتية للمستويين (p_1) و (p_2)

ويشملان $A(4;-7;5)$ و $(d)\subset(P_1)$ و $(d')\subset(P_2)$

تعيين معادلة المستوي (p_1): (p_1) يشمل $A(4;-7;5)$

وموجه بالشعاعين $\vec{u}(1;2;-1)$ شعاع توجيه (d) و

$\overrightarrow{AD}(-2;8;-4)$ حيث $D(2;1;1)$ نقطة من (d)

ليكن $\vec{n}(a;b;c)$: شعاع ناظميللمستوي (p_1) غير معدوم

$\begin{cases}\vec{n}\cdot\vec{u}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AD}=0\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}a+2b-c=0\quad...(1)\\ -2a+8b-4c=0..(2)\end{cases}$ بجمع (1) و (2)

نجد $6b-3c=0$ ومنه $c=2b$ نأخذ $b=1$: نجد $c=2$ و

تعيين معادلة للمستوي (P_2): لدينا (P_2) يشمل $A(4;-7;5)$

وموجه بالشعاعين $\vec{u}'(3;1;2)$ شعاع توجيه (d') و

$\overrightarrow{AC}(0;10;-2)$ حيث $C(4;3;3)$ نقطةمن (d')

بنفس الطريقة $(P_2):11x-3y-15z+10=0$

ب) التحقق أن (p_1) و (p_2) متقاطعان وفق مستقيم (Δ)

بما أن: $\frac{0}{11}\neq\frac{1}{-3}$ فإن $\vec{n}(0;1;2)$ و $\vec{n}'(11;-3;-15)$

غيرمرتبطين خطيا وعليه يكون المستويان (P_1) و (P_2)

متقاطعين وفق مستقيم (Δ). لدينا:

$(\Delta):\begin{cases}x=\frac{-1}{11}+9\alpha\\ y=3-22\alpha\ ;\alpha\in\mathbb{R}\\ z=11\alpha\end{cases}$ ، $(P_1):y+2z-3=0$

$(P_2):11x-3y-15z+10=0$

$(-22\alpha+3)+2(11\alpha)-3=0$ يكافئ $0.\alpha=0$

المعادلة تقبل مالا نهاية من الحلول ومنه $(\Delta)\subset(P_1)$:

$11\left(\frac{-1}{11}+9\alpha\right)-3(3-22\alpha)-15(11\alpha)+10=0$ يكافئ $0.\alpha=0$

المعادلة تقبل مالا نهاية من الحلول ومنه $(\Delta)\subset(P_2)$:

نستنتج أن $(\Delta)=(P_1)\cap(P_2)$

3) أ*/ إيجاد إحداثيات A' المسقط العمودي لـ A على المستوي (Q): $A'(x';y';z')$، $\vec{n}_Q(11;1;-1)$ ناظمي لـ (Q)

و $A\in(\Delta)$. بما أن: $11x_A+y_A-z_A\neq2$ فإن $A\notin(Q)$

وبالتالي $\overrightarrow{AA'}$ يوازي $\vec{n}_Q$ يوجد $k\in\mathbb{R}$ حيث $\overrightarrow{AA'}=k\cdot\vec{n}_Q$

أي $\overrightarrow{AA'}(x'-4;y'+7;z'-5)$

$\begin{cases}x'-4=11k\\ y'+7=k\\ z'-5=-k\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}x'=11k+4\\ y'=k-7\\ z'=-k+5\end{cases}$ ، $A'\in(Q)$ معناه

$11(11k+4)+(k-7)-(-k+5)-2=0$ معناه $k=-\frac{10}{41}$

بالتعويض عن قيمة k نجد: $A'\left(\frac{54}{41};-\frac{297}{41};\frac{215}{41}\right)$

ب) استنتاج المسقط العمودي لـ (Δ) على المستوي (Q):

المسقط العمودي للمستقيم (Δ) على (Q) هوالمستقيم (BA')

4) تعيين طبيعة المجموعة (Γ) حيث $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$

$a=0$ ومنه $\vec{n}(0;1;2)$ ناظمي لـ $(P_1): y+2z+d=0$

$A\in(P_1)$ معناه $7+10+d=0$ معناه $d=-3$

ومنـــــه $(P_1): y+2z-3=0$:

التمرين الثاني:(04نقاط) $A_0B_0=8$ ، S التشابهالمباشر

مركزه A_0 ونسبته $\frac{1}{2}$ وزاويته $\frac{3\pi}{4}$ ، $B_{n+1}=S(B_n)$:

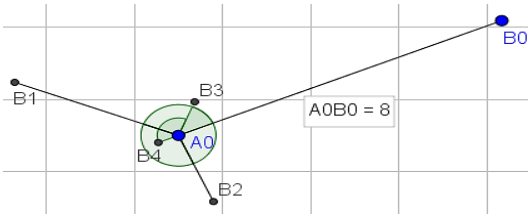
1)انشاء النقط B_1 ، B_2 ، B_3 و B_4:

$B_1=S(B_0)$ يكافئ $\begin{cases} A_0B_1=\frac{1}{2}A_0B_0=4 \\ (\overrightarrow{A_0B_0},\overrightarrow{A_0B_1})=\frac{3\pi}{4}+2k\pi \end{cases}$ ، $k\in\mathbb{Z}$

$B_2=S(B_1)$ معناه $\begin{cases} A_0B_2=\frac{1}{2}A_0B_1=2 \\ (\overrightarrow{A_0B_1},\overrightarrow{A_0B_2})=\frac{3\pi}{4}+2k\pi \end{cases}$ ، $k\in\mathbb{Z}$

$B_3=S(B_2)$ معناه $\begin{cases} A_0B_3=\frac{1}{2}A_0B_2=1 \\ (\overrightarrow{A_0B_2},\overrightarrow{A_0B_3})=\frac{3\pi}{4}+2k\pi \end{cases}$ ، $k\in\mathbb{Z}$

$B_4=S(B_3)$ معناه $\begin{cases} A_0B_4=\frac{1}{2}A_0B_3=\frac{1}{2} \\ (\overrightarrow{A_0B_3},\overrightarrow{A_0B_4})=\frac{3\pi}{4}+2k\pi \end{cases}$ ، $k\in\mathbb{Z}$



2)اثبات أن المثلثين $A_0B_nB_{n+1}$ و $A_0B_{n+1}B_{n+2}$ **متشابهان من أجل كل عدد طبيعي** n:

$B_{n+1}=S(B_n)$ معناه $A_0B_{n+1}=\frac{1}{2}A_0B_n$

و $(\overrightarrow{A_0B_n},\overrightarrow{A_0B_{n+1}})=\frac{3\pi}{4}+2k\pi$ ، $k\in\mathbb{Z}$ ، بما أن:

$\frac{A_0B_{n+1}}{A_0B_n}=\frac{\frac{1}{2}A_0B_n}{A_0B_n}=\frac{1}{2}$ و $\frac{A_0B_{n+2}}{A_0B_{n+1}}=\frac{\frac{1}{2}A_0B_{n+1}}{A_0B_{n+1}}=\frac{1}{2}$ و

$(\overrightarrow{A_0B_{n+1}},\overrightarrow{A_0B_{n+2}})=(\frac{1}{2}\overrightarrow{A_0B_n},\frac{1}{2}\overrightarrow{A_0B_{n+1}})=(\overrightarrow{A_0B_n},\overrightarrow{A_0B_{n+1}})$

فإن المثلثين $A_0B_nB_{n+1}$ و $A_0B_{n+1}B_{n+2}$ متشابهان

(ضلعان و زاوية محصورة بينهما)ومنه: $\frac{B_{n+1}B_{n+2}}{B_nB_{n+1}}=\frac{1}{2}$

3)أ*/اثبات أن (u_n) **متتالية هندسية أساسها** $\frac{1}{2}$: نعرف

(Γ) هي سطح كرة قطرها $[AB]$ ، $AB=\sqrt{\frac{17150}{121}}\approx 11.9$

ومركزها النقطة $I\left(\frac{43}{22};-2;\frac{5}{2}\right)$ منتصف $[AB]$

من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n=u_0\left(\frac{1}{2}\right)^n=B_0B_1\left(\frac{1}{2}\right)^n$

ج*/ نضع المجموع: $\delta_n=u_0+u_1+u_2+....+u_n$ ،

حساب δ_n **بدلالة** n **ثم إيجاد** $\lim_{n\to+\infty}\delta_n$: δ_n م.ح.م.هندسية

$$\delta_n=u_0\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}\right)=2B_0B_1\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

ومنه: $\lim_{n\to+\infty}\delta_n=2B_0B_1$

4) أ*/ نحل في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ **المعادلة :** $(1)...3x-4y=2$

(1) يكافئ $3x=4y+2$ يكافئ $3x\equiv 2[4]$

يكافئ $7\times 3x\equiv 7\times 2[4]$ يكافئ $x\equiv 2[4]$

ومنه: $x=4\lambda+2$ ، $\lambda\in\mathbb{Z}$ بالتعويض في المعادلة (1) نجد

$y=3\lambda+1$ إذن: $S=\{(4\lambda+2;3\lambda+1);\lambda\in\mathbb{Z}\}$

ب*/ تعيين قيم العدد الطبيعي n **التي من اجلها تكونالنقطة** B_n **تنتمي إلى المستقيم** (Δ):

لدينا: (Δ) العمودي على (A_0B_0) في النقطة A_0 وكذلك

$(\overrightarrow{A_0B_0},\overrightarrow{A_0B_n})=(\overrightarrow{A_0B_0},\overrightarrow{A_0B_1})+(\overrightarrow{A_0B_1},\overrightarrow{A_0B_2})+...$

$....+(\overrightarrow{A_0B_{n-1}},\overrightarrow{A_0B_n})=\frac{3\pi}{4}+\frac{3\pi}{4}+...+\frac{3\pi}{4}=n\frac{3\pi}{4}$

B_n تنتمي إلى (Δ) معناه $(\overrightarrow{A_0B_0},\overrightarrow{A_0B_n})=\frac{\pi}{2}+k\pi$ ، $k\in\mathbb{Z}$

نجد: $n\frac{3\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi$ يكافئ $3n=4\left(\frac{1}{2}+k\right)$

يكافئ $3n=2+4k$ يكافئ $3n-4k=2$

ومنه قيم n هـــي $n=4k'+2$ ، $k'\in\mathbb{N}$

التمرين الثالث:(05 نقاط)

1)أ*/نبين أن المعادلة (E) تكافئ $(\bar{z}+1)(\bar{z}^2-4\bar{z}+7)=0$

لدينا: $\bar{z}^3-3\bar{z}^2+3\bar{z}+7=0$ ... (E) $(\bar{z}+1)(\bar{z}^2-4\bar{z}+7)=0$

يكافئ $\bar{z}^3-4\bar{z}^2+7\bar{z}+\bar{z}^2-4\bar{z}+7=0$

يكافئ $\bar{z}^3-3\bar{z}^2+3\bar{z}+7=0$

ب* /نحل في $\mathbb{C}$ **المعادلة** (E):

متتالية (u_n) بـ $u_n = B_nB_{n+1}$ من أجل كل عدد طبيعي n.

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{B_{n+1}B_{n+2}}{B_nB_{n+1}} = \frac{1}{2}$ ومنـــه: (u_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ و حـــدها الأول $u_0 = B_0B_1$

ب*/ كتابة عبارة u_n بـدلالة n:

ومنه: $S = \{-1; 2-\sqrt{3}i\ ; 2+\sqrt{3}i\}$

2)أ*/تعيين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد المركب $(z_B - z_A)^n$ عددا حقيقيا سالبا: لدينا

$$(z_B - z_A)^n = (2+\sqrt{3}i+1)^n = (3+\sqrt{3}i)^n$$

ومنه $(z_B - z_A)^n = (2\sqrt{3})^n e^{i\frac{n\pi}{6}}$

$(z_B - z_A)^n$ عددا حقيقيا سالبا معناه:

$\arg(z_B - z_A)^n = \pi + 2k\pi$ ومنه $\frac{n\pi}{6} = \pi + 2k\pi$

إذن $n = 12k+6\ ; k \in \mathbb{N}$

ب*/تعيين طبيعة المثلث ABC

$$AC = |z_C - z_A| = |3 - i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$$

$$AB = |z_B - z_A| = |3 + i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$$

$$BC = |z_C - z_B| = |-2i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$$

بما ان : $AB = AC = BC$ فإن المثلث ABC متقايس الأضلاع

3)أ*/كتابة العدد $\frac{z_A - z_C}{z_D - z_C}$ على الشكل الأسي:

$$\frac{z_A - z_C}{z_D - z_C} = \frac{-1-2+i\sqrt{3}}{3-2+i\sqrt{3}} = \frac{-3+i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}} = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$$

***/استنتاجطبيعة التحويل الذي يحول A إلى D وعناصره المميزة:** $\frac{z_A - z_C}{z_D - z_C} = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$ معناه $z_A - z_C = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}(z_D - z_C)$

معناه النقطة A صورة النقطة D بالتشابه المباشر الذي مركزه النقطة C و نسبته $\sqrt{3}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$

ب/تعيين مركز ونصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث ACD

لدينا: $\frac{z_A - z_C}{z_D - z_C} = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$ معناه

$$\begin{cases} \left|\frac{z_A - z_C}{z_D - z_C}\right| = \sqrt{3} \\ (\overrightarrow{CD};\overrightarrow{CA}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

اذن المثلث ACD قائم في C ومنه مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ACD هو النقطة I منتصف الوتر $[AD]$

(E) تكافئ $(\bar{z}+1)(\bar{z}^2 - 4\bar{z} + 7) = 0$

يكافئ $(z+1)(z^2-4z+7) = 0$ يكافئ $\overline{(z+1)(z^2-4z+7)} = 0$

يكافئ $\begin{cases} z = -1 \\ z^2 - 4z + 7 = 0 \end{cases}$ ، $\Delta = -12 = (2\sqrt{3}i)^2$

ومنه: $z_1 = 2 - \sqrt{3}i$ و $z_2 = 2 + \sqrt{3}i$

ومنه: من أجل k يمسح المجال $[0;+\infty[$ المجموعة (Γ) هي نصف مستقيم مبدؤه النقطة A وشعاع توجيهه $\overrightarrow{AB}$

لاحقته: $2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}} = 3 + i\sqrt{3}$

5)أ*/تعيين قيمة العدد α حيث $-\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB} + \alpha\overrightarrow{CD} = \vec{0}$

$-\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB} + \alpha\overrightarrow{CD} = \vec{0}$

معناه النقطة C هي مرجح الجملة $\{(A;-1),(B;2),(D;\alpha)\}$

يكافئ $\begin{cases} x_C = \frac{-x_A + 2x_B + \alpha x_D}{-1+2+\alpha} \\ y_C = \frac{-y_A + 2y_B + \alpha y_D}{-1+2+\alpha} \end{cases}$ $\begin{cases} 2 = \frac{1+4+3\alpha}{1+\alpha} \\ -\sqrt{3} = \frac{0+2\sqrt{3}+0\cdot\alpha}{1+\alpha} \end{cases}$ ومنه $\alpha = -3$

ب*/تعيين (E) مجموعةالنقط M من المستوي حيث :

$$(*)...\left\|-\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{BM} - 3\overrightarrow{DM}\right\| \le 2\left\|\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{CM}\right\|$$

$(*)$ تكافئ $\left\|\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MD}\right\| \le 2\left\|\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MC}\right\|$

$(*)$ تكافئ $\left\|-\left(-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MD}\right)\right\| \le 2\left\|\overrightarrow{BC}\right\|$

$(*)$ تكافئ $\left\|(-1+2-3)\overrightarrow{CM}\right\| \le 2BC$ تكافئ $CM \le BC$

ومنه مجموعة النقط (E) هي قرص مركزه النقطة C ونصف قطره هو : $BC = 2\sqrt{3}$

جـ*/استنتاج مجموعة نقط تقاطع القرص (E) و نصفالمستقيم $[AB]$: لدينا القرص (E) مركزه C ونصف قطره $BC = 2\sqrt{3}$ و $AC = 2\sqrt{3}$ معناه A تنتمي إلى القرص (E)

ومنه تقاطع القرص (E) ونصف المستقيم $[AB]$ هو القطعة المستقيمة $[AB]$.

التمرين الرابع:(07 نقـــاط)

1) g معرفة على $]0;+\infty[$ بـــ: $g(x) = x^2e^x$

أ*/ دراسة اتجاه تغير الدالة g على المجال $]0;+\infty[$:

الدالة g قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$: $g'(x) = (x^2+2x)e^x$

بما ان $g'(x) \succ 0$ فإن الدالة g متزايدة تماما على $]0;+\infty[$

لاحقتها $z_I=\frac{z_A+z_D}{2}=\frac{3}{2}-i\frac{1}{2}$

4 */تعيين قيس للزاوية الموجهة $(\vec{u};\overrightarrow{AB})$:

لدينا : $(\vec{u};\overrightarrow{AB})=\arg(z_B-z_A)=\frac{\pi}{6}+2k\pi;k\in\mathbb{Z}$

***/استنتاج (Γ) مجموعة النقط $M(z)$ حيث :**

$z+1=2\sqrt{3}ke^{i\frac{\pi}{6}}$ معناه $z-z_A=k(z_B-z_A)$

معناه $\overrightarrow{AM}=k\cdot\overrightarrow{AB}$

03

2) f معرفة على $]0;+\infty[$: $f(x)=(x^2-2x+2)e^x+e^{\frac{1}{x}}-3e$

أ*/حساب $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim_{x\overset{>}{\to}0}f(x)$:

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ ، $\lim_{x\overset{>}{\to}0}f(x)=+\infty$

ب*/ نبين أنه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$:

$f'(x)=g(x)-g\left(\frac{1}{x}\right)$ ، **ثم حساب** $f'(1)$:

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ دالتها المشتقة f' :

$f'(x)=x^2e^x-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}=g(x)-g\left(\frac{1}{x}\right)$

ومنه: $f'(1)=g(1)-g\left(\frac{1}{1}\right)=0$

ج*/ تشكيل جدول تغيرات الدالة f على المجال $]0;+\infty[$:

إشـــارة $f'(x)$:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

f متزايدة تماما على $[1;+\infty[$

f متناقصة تماما على $]0;1]$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-e=-2.71$	$\nearrow$	$+\infty$

3) أ*/نبين أن المعادلة: $(x^2-2x+2)e^x=-h(x)$

تقبل **حلين** α **و** β **حيث:** $1.5\prec\beta\prec1.6$ و $0.5\prec\alpha\prec0.6$

$(x^2-2x+2)e^x=-h(x)$ تكافئ $(x^2-2x+2)e^x+h(x)=0$

تكافئ $f(x)=0$ ، لدينا: $f(0.5)\approx1.25$ ، $f(0.6)\approx-0.74$

بما ان الدالة f مستمرة ومتناقصة تماما على $[0.5;0.6]$

$f(0.6)\times f(0.5)\prec0$ فان حسب مبرهنة القيم المتوسطة

فإن المعادلة $(x^2-2x+2)e^x=-h(x)$ تقبل حل وحيد α

حيث: $0.5\prec\alpha\prec0.6$ ، $f(\alpha)=0$

ب*/ استنتاج أنه : إذا كان $0\prec x\prec1$ فإن $g(x)\prec g\left(\frac{1}{x}\right)$

و إذا كان $x\succ1$ فإن $g(x)\succ g\left(\frac{1}{x}\right)$

إذا كان $0\prec x\prec1$ فـإن $x\prec\frac{1}{x}$ و لدينا g متزايدة تماما

على $]0;+\infty[$ ، فـإن $g(x)\prec g\left(\frac{1}{x}\right)$

إذا كان $x\succ1$ فـإن $x\succ\frac{1}{x}$ ولدينا g متزايدة تماما على

$]0;+\infty[$ ،فـإن $g(x)\succ g\left(\frac{1}{x}\right)$

إشارة الفرق $f(x)-h(x)=(x^2-2x+2)e^x$

$x^2-2x+2\succ0$ من أجل كل $x\in]0;+\infty[$ لأن $\Delta=-4$

ومنه : (C_f) يقع فوق (C_h) على المجال $]0;+\infty[$

ج*/نبين ان المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) في النقطة التي فاصلتها 1 يطلب كتابة معادلته :

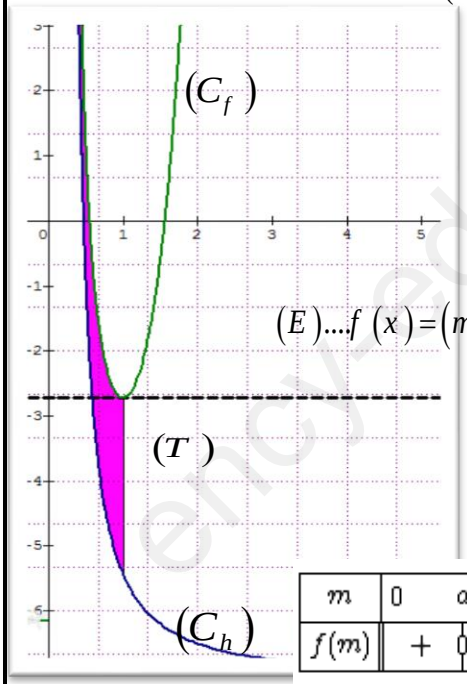
بما ان الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ فإن تمثيلها (C_f)

يقبل عند كل نقطة فاصلتها من $]0;+\infty[$ مماسا

$(T):y=f'(1)(x-1)+f(1)$ ، $f'(1)=0;f(1)=-e$

ومنه: $(T):y=-e$

4) أ*/رسم (T) و (C_f) :



ب*/إيجاد قيم m حتى تقبلالمعادلة (E) حلين متمايزين:

لدينا m وسيط حقيقي

حيث $m\succ0$

$(E)....f(x)=(m^2-2m+2)e^m+h(m)$

المعادلة (E) تكـــافئ

$f(x)=f(m)$

إشارة $f(m)$ **:**

m	0		α		1		$E+\infty$
$f(m)$		$+$	0	$-$		$-$	0 $+$

من أجـــل $m=1$ المعادلة (E) تقبل حلا مضاعفا.

ومنـــه: المعادلة (E) تقبل حلين متمايزينلما

$m\in]0;1[\cup]1;+\infty[$

لدينا: $f(1.5)\approx -0.60$ ، $f(1.6)\approx 0.44$

بما ان الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على $[1.5;1.6]$

$f(1.6)\times f(1.5)\prec 0$ فان حسب مبرهنة القيم المتوسطة

فإن المعادلة $(x^2-2x+2)e^x=-h(x)$ تقبل حل وحيد β

حيث: $1.5\prec\beta\prec 1.6$ ، $f(\beta)=0$

***/استنتاج أن (C_f) يقطع محور الفواصل فينقطتين:**

بما ان المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين α و β فإن (C_f) يقطع محور الفواصل فينقطتين فاصلتيهما α و β

ب*/ دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمنحنى (C_h):

ب*/استنتاج $A(\lambda)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C_h) و (C_f) و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=\lambda$ و $x=1$

(مقدرة بوحدة المساحة) حيث $\lambda\in]0;1]$:

$$A(\lambda)=\int_1^{\lambda}[f(t)-h(t)]dt=-\int_{\lambda}^{1}[f(t)-h(t)]dt$$

$$A(\lambda)=-\left[(\lambda^2-4\lambda+6)e^{\lambda}-3e\right]$$

$$=\left(3e-(\lambda^2-4\lambda+6)e^{\lambda}\right)ua$$

***/حساب $\lim\limits_{\lambda\xrightarrow{>}0}A(\lambda)$:**

$$\lim_{\lambda\xrightarrow{>}0}A(\lambda)=\lim_{\lambda\xrightarrow{>}0}\left[3e-(\lambda^2-4\lambda+6)e^{\lambda}\right]=3e$$

الموضوع الثاني

التمرين الاول : (04 نقاط)

$A(3;1;0)$ ، $B(1;2;0)$ ، $C(3;2;1)$ و $D(0;0;m)$

1) أ*/حساب $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$: $\overrightarrow{BA}(2;-1;0)$ ، $\overrightarrow{BC}(2;0;1)$

لدينا: $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=2(2)+0(-1)+1(0)=4$

***/استنتاجالقيمتين المضبوطتين لـ $Cos\,ABC$ و $Sin\,ABC$:**

لدينا: $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\|\overrightarrow{BA}\|\cdot\|\overrightarrow{BC}\|Cos\,ABC$

ومنه: $Cos\,ABC=\dfrac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BA}\|\cdot\|\overrightarrow{BC}\|}=\dfrac{4}{\sqrt5\sqrt5}=\dfrac45$

لدينا: $\sin ABC^2=1-Cos\,ABC^2$

ومنه $\sin ABC=\dfrac35$ أو $\sin ABC=-\dfrac35$

ب*/حساب مساحة المثلث ABC ولتكن S_{ABC}:

$$S_{ABC}=\frac12 BA\times BC\times\sin ABC=\frac12\sqrt5\times\sqrt5\times\frac35=\frac32 ua$$

5) أ*/ نبين أنه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$:

$$\int_1^x[f(t)-h(t)]dt=(x^2-4x+6)e^x-3e$$

لدينا: $\int_1^x[f(t)-h(t)]dt=\int_1^x(t^2-2t+2)e^t\,dt$

الدالة: $t\to(t^2-2t+2)e^t$ مستمرة على $]0;+\infty[$ فهيتقبل دوالا أصلية على $]0;+\infty[$.

$$\left[(t^2-4t+6)e^t-3e\right]'=(t^2-2t+2)e^t$$

$$\int_1^x(t^2-2t+2)e^t dt=\int_1^x\left[(t^2-4t+6)e^t-3e\right]'dt$$

$$=(x^2-4x+6)e^x-3e$$

04

$0+2(0)-2m-5=0$ أي $m=-\dfrac52$ إذن: $D\notin(ABC)$

لأن m عدد حقيقي موجب ومنه: $ABCD$ رباعي وجوه

***/ نبين أن حجم رباعي الوجوه $ABCD$ هو** $V=\dfrac{2m+5}{6}uv$

لدينا $V_{ABCD}=\dfrac13 S_{ABC}\times h$ ، $h=d(D,(ABC))$ هو الارتفاع

$$d(D;(ABC))=\frac{|-2m-5|}{\sqrt{1+4+4}}=\frac{2m+5}{3}$$

ومنه $V=\dfrac13\times\dfrac32\times\dfrac{2m+5}{3}=\dfrac{2m+5}{6}uv$

2)أ*/نبين أن (Q) هو المستوي المحوري لقطعة المستقيم $[AB]$ معادلته الديكارتية $-2x+y=\dfrac{-5}{2}$: هناك عدة طرقمنها

*إحداثيات $I(2;\dfrac32;0)$ منتصف $[AB]$ تحقق التمثيل الوسيطي لـ (Q) والشعاع $\overrightarrow{AB}(2,-1,0)$ عمودي على شعاعي توجيهه $\vec{u'}(1;2;0)$ و $\vec{u}(-2;-4;-5)$ ومنه (Q) مستوي محوري لـ $[AB]$

***/تعيين معادلة (Q):** لدينا

$$(Q):\begin{cases}x=2-2\alpha+\beta....(1)\\ y=\dfrac32-4\alpha+2\beta....(2)\ ;(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2\\ z=-5\alpha.....(3)\end{cases}$$

من (1) نجد: $z=-5\alpha$

يكافئ $\alpha=\dfrac{z}{-5}$ بالتعويض في (1) نجد: $x=2-2\left(\dfrac{z}{-5}\right)+\beta$

ومنه: $\beta=x-2-\dfrac{2z}{5}$ نعوض قيمة α و β في (2) نجد:

$y=\dfrac32-4\left(\dfrac{z}{-5}\right)+2\left(x-2-\dfrac{2z}{5}\right)$ ومنه: $-2x+y=\dfrac{-5}{2}$

ج*/نبين أن $\vec{n}(1;2;-2)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC):

بما أن $\vec{n}\cdot\overrightarrow{BC}=1(2)+2(0)-2(1)=0$ وكذلك

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{BA}=1(2)+2(-1)-2(0)=0$

فإن $\vec{n}(1;2;-2)$ شعاعناظمي للمستوي (ABC)

*/ استنتاج معادلة ديكارتية للمستوي (ABC):

لدينا $(ABC): x+2y-2z+d=0$

$A\in(ABC)$ تكافئ $3+2+d=0$ تكافئ $d=-5$

ومنه: $(ABC): x+2y-2z-5=0$

د*/تبيان أن $ABCD$ رباعي وجوه:

نبين أن النقطة D لا تنتمي الى المستوي (ABC)

$5x-2z-10=0$ نضع $z=t$ (t وسيط حقيقي) نجد

$x=\frac{2}{5}t+2$ و $y=\frac{4}{5}t+\frac{3}{2}$ إذن:

$$(\Delta):\begin{cases}x=\frac{2}{5}t+2\\ y=\frac{4}{5}t+\frac{3}{2};t\in\mathbb{R}\\ z=t\end{cases}$$

ج*/ حساب $d(D;(Q))$ ثم استنتاج بدلالة m المسافة بين D و (Δ):

$$d(D;(Q))=\frac{|-4(0)+2(0)+5|}{\sqrt{16+4}}=\frac{5}{\sqrt{20}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

بماأن (Q) و (ABC) متعامدان فإن حسب مبرهنة فيثاغورس

$$d(D;(\Delta))^2=d(D;(Q))^2+d(D;(ABC))^2$$

ومنه: $d(D;(\Delta))=\sqrt{\frac{5}{4}+\left(\frac{2m+5}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{16m^2+80m+145}}{6}$

3)أ*/تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي m (S_m) سطح كرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها:

لدينا $x^2+y^2+z^2-2mz+m^2-9=0$:

ومنه $x^2+y^2+(z-m)^2=9$: إذن: (S_m) سطح كرة مركزها النقطة $D(0;0;m)$ و نصف قطرها $r=3$.

ب*/تعيين m حتى يكون المستوي (ABC) مماسا لسطحالكرة (S_m):

(ABC) مماس لسطح الكرة (S_m) يعني $d(D;(ABC))=3$ أي أن: $\frac{2m+5}{3}=3$ ومنه $m=2$:

4)معادلة المستوي (P) الموازي تماما للمستوي (ABC) ويمس (S_m):

لدينا $(P): x+2y-2z+d=0$:

المستوي (P) مماس لـ (S_m) يعني:

ومنه معادلة (Q) هي: $-4x+2y+5=0$

*/بطريقة آخرى: (Q) يشمل $I\left(2;\frac{3}{2};0\right)$ منتصف $[AB]$

و $\overrightarrow{AB}(-2;1;0)$ شعاع ناظمي له والتمثيل الوسيطي يحقق

$(Q): -2x+y=\frac{-5}{2}$ ومنه المستوي المحوري لقطعةالمستقيم $[AB]$

ب*/استنتاج ان المستويين (ABC) و (Q) متعامدان و هما متقاطعان وفق مستقيم (Δ) يطلب تعيينتمثيله الوسيطي:

بما أن $\vec{n}.\overrightarrow{AB}=1.(-2)+2.(1)+0.(-2)=0$ فإن (Q)

و (ABC) متعامدان فهما متقاطعان وفق مستقيم (Δ).

*/تعيين التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ):

$$\begin{cases}x+2y-2z-5=0....(1)\\ -4x+2y+5=0.....(2)\end{cases}$$ بطرح (2) من (1) نجد:

$a=5n$ و $b=11n+4$ ، $n\in\mathbb{N}^*$

$11a-5b=11(5n+2)-5(11n+4)=55n+22-55n-20=2$

ومنه: $d/2$ إذن: $d\in D_2=\{1;2\}$.

ب*/تعيين قيم العدد الطبيعي غير المعدوم n بحيث يكون:

$PGCD(a;b)=2$: لدينا $PGCD(a;b)=2$

معناه 2يقسم a و 2يقسم b معناه 2يقسم $b-2a$

أي 2يقسم $11n+4-2(5n+2)$ وبالتالي 2يقسم n.

ومنه n عدد زوجي يكتب من الشكل: $n=2\alpha\ /\alpha\in\mathbb{N}^*$

ج*/استنتاج قيم العدد الطبيعي غير المعدوم n بحيث يكونالعددان a و b أوليان فيما بينهما: من السؤال السابق

من أجل $PGCD(a;b)=2$ قيم n: $n=2\alpha\ /\alpha\in\mathbb{N}^*$

ومنه: قيم n حيث $PGCD(a;b)=1$ هي: $n=2\alpha+1/\alpha\in\mathbb{N}$

3) أ*/نبين أن العدد $(n+1)$ يقسم كل من العددين A و B

$A=5n^2+7n+2$ و $B=11n^2+15n+4$ ، $n\in\mathbb{N}$

$A=(n+1)(5n+2)=a(n+1)$ ، $B=(n+1)(11n+4)=b(n+1)$

ومنه: $(n+1)$ يقسم كل من العددين A و B

ب*/ استنتاج حسب قيم n القاسم المشترك الأكبر للعددين A و B:

$PGCD(A;B)=PGCD(a(n+1);b(n+1))=(n+1)PGCD(a;b)$

ومنه نميز حالتين :

الحالة 1: إذا كان $PGCD(a;b)=2$ معناه $n=2\alpha/\alpha\in\mathbb{N}^*$

نجد: $PGCD(A;B)=(2\alpha+1)2=4\alpha+2$

الحالة 2: إذا كان $PGCD(a;b)=1$ معناه $n=2\alpha+1/\alpha\in\mathbb{N}$

نجد: $PGCD(A;B)=(2\alpha+1+1)1=2\alpha+2$

التمرين الثالث (05 نقاط)

1)تعيين العددين المركبين z_1 و z_2 حيث:

$d(D;(P))=\frac{|-4+d|}{3}=3$ أي $|-4+d|=9$

ومنه $d=13$: أو $d=-5$ هو المستوي (ABC)

إذن: $(p): x+2y-2z+13=0$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

1)أ*/إثبات أن : $y\equiv 4[11]$ ، $(E)...11x-5y=2$

$11x-5y=2$ يكافئ $5y=11x+2$ ومنه $5y\equiv -2[11]$ أي

أي $5y\equiv 20[11]$ ومنه: $y\equiv 4[11]$

ب*/استنتاج حلول المعادلة (E):

$y\equiv 4[11]$ معناه $y=11k+4$ مع $k\in\mathbb{Z}$ ،نعوض قيمة

y في المعادلة (E) نجد: $x=5k+2$

ومنه: $S=\{(11k+4;5k+5)/k\in\mathbb{Z}\}$

2)أ*/تعيين القيم الممكنة لـ $d=PGCD(a;b)$:

***/استنتاج الشكل الأسي للعدد** z_B:

$z_B=z_A(1+\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}}=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}(1+\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}}$

ومنه: $z_B=\sqrt{2}(1+\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{12}}$

ج*/تعيين قيم للعدد الطبيعي n **حتى تكون صورة العدد** $\left(\frac{z_B}{z_A}\right)^n$ **تنتمي إلى المنصف الأول إن وجدت :**

معناه $\arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right)^n=\frac{\pi}{4}+k\pi$ لدينا: $\left(\frac{z_B}{z_A}\right)^n=(1+\sqrt{3})^n e^{i\frac{n\pi}{3}}$

أي: $\arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right)^n\equiv\frac{n\pi}{3}[2\pi]$ ومنه: $\frac{n\pi}{3}=\frac{\pi}{4}+k\pi$ ، $k\in\mathbb{Z}$

أي $4n-12k=3$ ، $PGCD(12;4)=4$ لاتقسم 3 ومنه

المعادلةلاتقبل حلول اذن لايوجد قيم لـ n تحقق المطلوب .

3) أ*/إيجاد لاحقة النقطة B' **صورة النقطة** B **بالدوران** r **الذي مركزه النقطة** O **وزاويته** $\frac{-\pi}{6}$

عبارة الدوران r من الشكل: $z'=e^{-i\frac{\pi}{6}}z$

$z_{B'}=e^{-i\frac{\pi}{6}}z_B=e^{-i\frac{\pi}{6}}\sqrt{2}(1+\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{12}}=\sqrt{2}(1+\sqrt{3})e^{-i\frac{\pi}{12}}$

$z_{B'}=\sqrt{2}(1+\sqrt{3})e^{-i\frac{\pi}{12}}=\overline{z_B}=2+\sqrt{3}-i$

ب*/حساب مساحة الدائرة (γ) **التي قطرها** $[BB']$: لدينا

$R=\frac{BB'}{2}=\frac{|z_{B'}-z_B|}{2}=\frac{|-2i|}{2}=\frac{2}{2}=1$ ، $S=\pi R^2$

ومنه: $s=\pi\ u.a$

ج*/تعيين مجموعة النقط $M(z)$ **من المستوى حيث:**

$$\begin{cases}2z_1+iz_2=1+i\sqrt{3}...(1)\\(\sqrt{3}+2i)z_1-z_2=(1-\sqrt{3})i..(2)\end{cases}$$ نضرب طرفي

$$\begin{cases}-2iz_1+z_2=-i+\sqrt{3}.....(1')\\\sqrt{3}z_1+2iz_1-z_2=i-i\sqrt{3}...(2)\end{cases}$$ المعادلةالأولىفي $(-i)$ نجد

بجمع $(1')$ و (2): $\sqrt{3}z_1=\sqrt{3}(1-i)$ ومنه $z_1=1-i$

بالتعويض في $(1')$ نجد: $z_2=2+\sqrt{3}+i$

2)أ*/كتابة z_A على الشكل الأسي: $z_A=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

ب*/نبين أن : $\frac{z_B}{z_A}=(1+\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}}$:

$\frac{z_B}{z_A}=\frac{2+\sqrt{3}+i}{1-i}=\frac{(2+\sqrt{3}+i)(1+i)}{2}=\frac{(1+\sqrt{3})+\sqrt{3}(1+\sqrt{3})i}{2}$

ومنه: $\frac{z_B}{z_A}=(1+\sqrt{3})\frac{(1+\sqrt{3}i)}{2}=(1+\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}}$

06

بة لمحور الفواصل ولدينا: $B'(2+\sqrt{3};-1)$ و $A(1;-1)$

أي: AB' لهما نفس الترتيب معناه ينتميان إلى المستقيم

معادلته $y=-1$ موازي لمحور الفواصل ومنه نجد:

$z_C=\overline{z_A}=1+i$.

***/ إيجاد** z_I **لاحقة مركز ثقل المستطيل** $AB'BC$

$z_I=\frac{z_A+z_B+z_{B'}+z_C}{4}$ ومنه $z_I=\frac{1-i+4+2\sqrt{3}+1+i}{4}=\frac{3+\sqrt{3}}{2}$

4)أ*/تعيينالعبارة المركبة للتشابه المباشر S **حيث يكون** f **تشابه مباشر مركزه** O **ونسبته** 2 **وزاويته** $\frac{\pi}{3}$: $f=ros$

S تشابه مباشر مركزه O ونسبته k وزاويته θ أي ros

تشابه مباشر مركزه O ونسبته k وزاويته $\theta-\frac{\pi}{6}$

ومنه: $k=2$ و $\theta-\frac{\pi}{6}\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$ أي $\theta\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

ومنه عبارة التشابه S هي: $z'=2e^{i\frac{\pi}{2}}z$ ونكتب $z'=2iz$

ب*/إيجاد مساحة صورة الدائرة (γ) **بالتشابه المباشر** S **:**

مساحة صورة الدائرة (γ) هي S' حيث: $s'=k^2s=4\pi\ u.a$.

5) أ*/ إذا كان $S(M)=M'$ **،إيجاد طبيعة المثلث** OMM':

$z'=2e^{i\frac{\pi}{2}}z$ ومنه: $\frac{z'}{z}=2e^{i\frac{\pi}{2}}$ معناه $\arg\frac{z'}{z}=\frac{\pi}{2}+2k\pi$

معناه $(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'})=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ و $\left|\frac{z'}{z}\right|=2$ أي $|z'|=2|z|$

$\arg\left[(z-z_B)^2\right]=\arg(z_B)-\arg(z_{B'})$ أي أن

$2\arg(z-z_B)=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{12}+2k\pi$ ومنه $\arg(z-z_B)=\frac{\pi}{12}+k\pi$

تفسيرها : $(\vec{u};\overrightarrow{BM})=\frac{\pi}{12}+k\pi/k\in\mathbb{Z}$

ومنه مجموعة النقط هي المستقيم (OB) ماعدا النقطة B.

د*/تعيين z_C لاحقة النقطة C حتى يكون الرباعي $AB'BC$ مستطيل:

$$(\overrightarrow{B'B};\overrightarrow{B'A})=\arg\left(\frac{z_A-z_{B'}}{z_B-z_{B'}}\right)=\arg(z_A-z_{B'})-\arg(z_B-z_{B'})$$

$$(\overrightarrow{B'B};\overrightarrow{B'A})=\arg(1-i-2-\sqrt{3}+i)-\arg(2i)=\pi-\frac{\pi}{2}+2k\pi$$

ومنه نجد : $(\overrightarrow{B'B};\overrightarrow{B'A})=\frac{\pi}{2}+2k\pi/k\in\mathbb{Z}$

يكفي أن نبين : $\overrightarrow{B'B}=\overrightarrow{AC}$ معناه : $\begin{cases}x_C=1\\y_C=1\end{cases}$ ومنه $z_C=1+i$

بطريقة اخرى: لدينا $z_{B'}=\overline{z_B}$ معناه BB' متناظرتان

$f'(x)=0$ معناه $1-2e^{-2(x-e)}=0$ معناه $x=e+\ln\sqrt{2}$

x	$-\infty$	$e+\ln\sqrt{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

الدالة f متزايدة تماما على $[e+\ln\sqrt{2};+\infty[$

الدالة f متناقصة تماما على $]-\infty;e+\ln\sqrt{2}]$

تشكيل جدول تغيراتها:

x	$-\infty$	$In2/2+e$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$3In2/2+e$	↗ $+\infty$

2) أ*/ نبين أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين (D) و (D')

معادلتاهما: $y=x-e$ و $y=-x+\ln 2+e$ عند $+\infty$ و عند $-\infty$ **على الترتيب**: بما أن

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-e)\right]=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+2e^{-2(x-e)}\right)=\ln 1=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(-x+e+\ln 2)\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\ln\left(2+e^{2(x-e)}\right)-\ln 2\right]=0$$

فإن: (D) مستقيم مقارب لـ (C_f) عند $+\infty$

و (D') مستقيم مقارب لـ (C_f) عند $-\infty$

ب*/دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة لـ (D) و (D')

لدينا: $f(x)-(x-e)=\ln\left(1+2e^{-2(x-e)}\right)$

$1+2e^{-2(x-e)}\succ 1$ معناه $\ln\left(1+2e^{-2(x-e)}\right)\succ\ln 1=0$

معناه $\|\overrightarrow{OM'}\|=2\|\overrightarrow{OM}\|$ ومنه: المثلث OMM' قائم في O

ب*/تعيين مجموعة النقط M من المستوى التي يكون منأجلها : $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AM'}=0$: $\overrightarrow{AM}(z-z_A)$ ، $\overrightarrow{AM}(x-1;y+1)$

و $\overrightarrow{AM'}(z'-z_A)$ أي $\overrightarrow{AM'}(2iz-z_A)$ ومنه $\overrightarrow{AM'}(-2y-1;2x+1)$

$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AM'}=0$ معناه $(x-1)(-2y-1)+(y+1)(2x+1)=0$

معناه $x+3y+2=0$

مجموعة النقط المطلوبة هي مستقيم معادلته $x+3y+2=0$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

1) أ*/التحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x :

$$f(x)=-x+e+\ln\left(2+e^{2(x-e)}\right)$$

$$f(x)=x-e+\ln\left(1+2e^{-2(x-e)}\right)=x-e+\ln\left(\frac{e^{2(x-e)}+2}{e^{2(x-e)}}\right)$$

$$=x-e+\ln\left(e^{2(x-e)}+2\right)-\ln\left(e^{2(x-e)}\right)=-x+e+\ln\left(2+e^{2(x-e)}\right)$$

ب */حساب النهايات $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ ، $\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$

ج*/ دراسة اتجاه تغير الدالة f :

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$: $f'(x)=\frac{1-2e^{-2(x-e)}}{1+2e^{-2(x-e)}}$

07

m وسيط حقيقي.

$y=mx-m\left(e+\frac{\ln 2}{2}\right)+\frac{\ln 2}{2}$ معناه

$m\left(x-e-\frac{\ln 2}{2}\right)+\frac{\ln 2}{2}-y=0$ معناه

$x-e-\frac{\ln 2}{2}=0$ و $\frac{\ln 2}{2}-y=0$ ومنه: جميع المستقيمات (D_m) تشمل النقطة الثابتة $A\left(\frac{\ln 2}{2}+e;\frac{\ln 2}{2}\right)$

ب*/مناقشة حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد نقط تقاطع المستقيم (D_m) و المنحنى (C_f):

المستقيم (D_m) يدور حول النقطة الثابتة $A\left(\frac{\ln 2}{2}+e;\frac{\ln 2}{2}\right)$

إذا كان $m=1$ فإن (D_m) هو (D) لاتوجد نقط تقاطع

إذا كان $m=-1$ فإن (D_m) هو (D') لاتوجد نقط تقاطع

إذا كان $m=0$ فإن (D_m) هو $(D_0):y=\ln\sqrt{2}$ لاتوجد نقط تقاطع

إذا كان $m\in]-1;1[$ فإنهلاتوجد نقط تقاطع

إذا كان $m\in]-\infty;-1[$ فإنهتوجد نقطة تقاطع واحدة

إذا كان $m\in]1;+\infty[$ فإنهتوجد نقطة تقاطع واحدة

5) أ*/التفسير الهندسي العدد I: هومساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيم المقارب (D) والمستقيمين

ومنه: $f(x)-(x-e)\succ 0$ إذن (C_f) يقع فوق م.م (D)

لدينا: $f(x)-(-x+e+\ln 2)=\ln\left(2+e^{2(x-e)}\right)-\ln 2$

$2+e^{2(x-e)}\succ 2$ معناه $\ln\left(2+e^{2(x-e)}\right)\succ \ln 2$ ومنه:

$f(x)-(-x+e+\ln 2)\succ 0$ إذن (C_f) يقع فوق م.م (D')

من أجل كل عدد حقيقي x

ج*/ نبين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $x=\frac{1}{2}\ln 2+e$ هو محور تناظر للمنحنى (C_f):

من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $\left(2\left(\frac{\ln 2}{2}+e\right)-x\right)$ من $\mathbb{R}$، لدينا

$$f\left(2\left(\frac{\ln 2}{2}+e\right)-x\right)=f(\ln 2+2e-x)$$

$$=-x+e+\ln(2+e^{2(x-e)})=f(x)$$

ومنه: $(\Delta): x=\frac{1}{2}\ln 2+e$ محور تناظر للمنحنى (C_f)

3) رسم (Δ)، (D)، (D') و (C_f):

4)أ*/نبين أن جميع المستقيمات (D_m) تشمل النقطة الثابتة

$A\left(\frac{\ln 2}{2}+e\,;\,\frac{\ln 2}{2}\right)$: $(D_m): y=mx-m\left(e+\frac{\ln 2}{2}\right)+\frac{\ln 2}{2}$

$0\le X^{n+1}\le X^n$ أي $0\le X^{n+1}+1\le X^n+1$

$0\le \ln\left(X^{n+1}+1\right)\le \ln\left(X^n+1\right)$، $n\in\mathbb{N}^*$ أي أن

$0\le\int_0^1 \ln\left(X^{n+1}+1\right)dX\le\int_0^1 \ln\left(X^n+1\right)dX$ نستنتج أن

$0\le I_{n+1}\le I_n$ ومنه: المتتالية (I_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}^*$

بما ان (I_n) محدودة من الاسفل بالصفر $(0\le I_n\le \ln 2)$

ومتناقصة تماما فإنها متقاربة نحو الصفر

ج*/تعيين اتجاه تغير المتتالية (I_n) ثم استنتاج أنها متقاربة:

$\begin{cases}0\le X\le 1\ldots(1)\\ 0\le X^n\le 1\end{cases}$ بضرب أطراف المتباينة (1) في X^n نجد

$0\le X^{n+1}\le X^n$ أي $0\le X^{n+1}+1\le X^n+1$

$0\le \ln\left(X^{n+1}+1\right)\le \ln\left(X^n+1\right)$، $n\in\mathbb{N}^*$ أي أن

$0\le\int_0^1 \ln\left(X^{n+1}+1\right)dX\le\int_0^1 \ln\left(X^n+1\right)dX$ نستنتج أن

$0\le I_{n+1}\le I_n$ ومنه: المتتالية (I_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}^*$

بما ان (I_n) محدودة من الاسفل بالصفر $(0\le I_n\le \ln 2)$

ومتناقصة تماما فإنها متقاربة نحو الصفر

08

اللذين معادلتيهما $x=\ln\sqrt{2}+e$ ، $x=\ln\sqrt{3}+e$

حساب العدد I_1: $I_1=\int_0^1 \ln(1+X)dX$ بالمكاملة بالتجزئة

بوضع: $u(X)=\ln(1+X)$ ، $u'(X)=\frac{1}{1+X}$

$v'(X)=1$ ، $v(X)=X$

$$I_1=\left[X\ln(1+X)\right]_0^1-\int_0^1\frac{X+1-1}{X+1}dX$$

$$=\left[X\ln(1+X)\right]_0^1-\int_0^1 1dX+\int_0^1\frac{1}{X+1}dX$$

$$=\left[X\ln(1+X)-X+\ln(1+X)\right]_0^1=\ln 4-1$$

ب*/ نبين أن $0\le I_n\le \ln 2$: لدينا $I_n=\int_0^1 \ln\left(1+X^n\right)dX$

$0\le X\le 1$ معناه $1\le X^n+1\le 2$ معناه $0\le \ln\left(X^n+1\right)\le \ln 2$

ومنه: $0\le\int_0^1 \ln\left(X^n+1\right)dX\le\int_0^1 \ln 2dX$ اذن $0\le I_n\le \ln 2$

ج*/تعيين اتجاه تغير المتتالية (I_n) ثم استنتاج أنها متقاربة:

$\begin{cases}0\le X\le 1\ldots(1)\\ 0\le X^n\le 1\end{cases}$ بضرب أطراف المتباينة (1) في X^n نجد

استعمال: $\ln(1+X)\le X$، من اجل كل $X\in]0;+\infty[$

أ*/ استنتاج أن: $0\le I+I_1\le\int_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e} 2e^{-2(x-e)}dx-1+\ln 4$

$\ln(1+X)\le X$، من اجل كل $X\in]0;+\infty[$

لدينا: $1+2e^{-2(x-e)}\succ 0$ بوضع: $X=1+2e^{-2(x-e)}$ نجد:

$0\le \ln\left(1+2e^{-2(x-e)}\right)\le 2e^{-2(x-e)}$ وبالتالي

$$0\le\int_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e}\ln\left(1+2e^{-2(x-e)}\right)dx\le\int_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e}2e^{-2(x-e)}dx$$

ومنه: $0\le -1+\ln 4\le I+I_1\le\int_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e}2e^{-2(x-e)}dx-1+\ln 4$

اذن: $0\le I+I_1\le\int_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e}2e^{-2(x-e)}dx-1+\ln 4$

ب*/اعطاء حصرا للعدد $I+I_1$:

$$0\le I+I_1\le\int_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e}2e^{-2(x-e)}dx-1+\ln 4$$

$$\int_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e}2e^{-2(x-e)}dx=-\int_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e}-2e^{-2(x-e)}dx=-\left[e^{-2(x-e)}\right]_{n\sqrt{2}+e}^{n\sqrt{3}+e}=\frac{1}{6}$$

$0 \le I + I_1 \le \frac{-5}{6} + \ln 4$ ومنه: $0 \le I + I_1 \le \frac{1}{6} - 1 + \ln 4$	09

3) رسم (Δ)