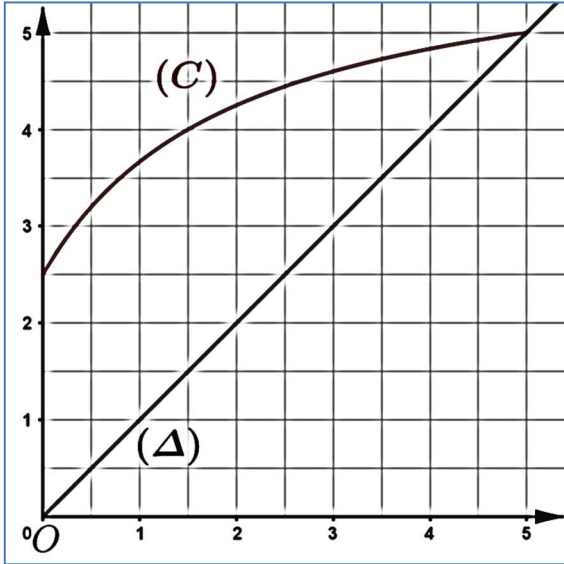


على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين  
الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

الدالة  $f$  معرفة على المجال  $[0;5]$  بـ:  $f(x) = \frac{6x+5}{x+2}$  و  $(C)$  تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس أنظر الشكل.



(1) أ) اثبت أن الدالة  $f$  متزايدة تماما على المجال  $[0;5]$ .

(ب) أثبت حسابيا أن  $(C)$  والمنصف الأول  $(\Delta)$  ذا المعادلة  $y = x$  متقاطعان في نقطة يطلب تعيين فاصلتها  $\alpha$ .

(2) نعرّف المتتالية  $(u_n)$  بـ:  $u_0 = 0$ ، ومن أجل  $n \in \mathbb{N}$ ،  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

(أ) أنقل الشكل. ومثل بيانيا الحدود  $u_0$ ،  $u_1$ ،  $u_2$  و  $u_3$  دون حسابها،

على حامل محور الفواصل مبرزا خطوط الإنشاء.

(ب) أعط تخمينا فيما يخص اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  وتقاربها.

(3) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ،  $0 \leq u_n < 5$ .

(ب) برهن بالتراجع أن  $(u_n)$  متزايدة تماما واستنتج أن  $(u_n)$  متقاربة.

(4) نعرّف المتتالية  $(v_n)$  من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ،  $v_n = \frac{u_n + 1}{u_n - 5}$ .

(أ) اثبت أن  $(v_n)$  متتالية هندسية أساسها 7 وعين حدّها الأول، ثم أكتب بدلالة  $n$  عبارة الحد  $v_n$ ، واحسب نهاية  $(v_n)$ .

(ب) عبّر عن الحد  $u_n$  بدلالة  $v_n$ ، واستنتج نهاية  $(u_n)$ .

(ج) احسب بدلالة  $n$  المجموعين:  $s_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$  و  $L_n = u_0(v_0 - 1) + u_1(v_1 - 1) + \dots + u_n(v_n - 1)$ .

التمرين الثاني: (04.5 نقطة)

يحتوي كيس غير شفاف 8 كريات متماثلة لا نفرق بينها باللمس، موزعة كما يلي: 3 كريات بيضاء مرقمة:  $\alpha$ ،  $\beta$  و

3 كريات سوداء مرقمة:  $-\alpha$ ،  $\beta$  و  $\beta$  و اثنتان حمراوان مرقمتان:  $-\alpha$  و  $\alpha$ . حيث  $\alpha$  و  $\beta$  عدنان طبيعيين و  $\alpha < \beta$ .

نسحب عشوائيا من الكيس كرتين في آن واحد؛ ونعتبر الحوادث التالية: A: "الحصول على كرتين تحملان نفس الرقم"،

B: "الحصول على كرتين مختلفتين في اللون" و C: "الحصول على كرتين مجموع رقميهما موجب تماما".

(1) أ) أحسب  $p(A)$  احتمال الحدث A ثم بيّن أن:  $p(B) = \frac{3}{4}$ . (ب) أحسب الاحتمالين  $p(C)$  و  $p(A \cap C)$ .

(2) نعتبر أن الأعداد:  $-\alpha$ ،  $\alpha$  و  $\beta$  بهذا الترتيب تشكل متتالية حسابية، وليكن المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب مجموع الرقمين المسجلين على الكرتين المسحوبتين.

(أ) برّر أن مجموعة قيم المتغير العشوائي X هي:  $\{-2\alpha; 0; 2\alpha; 4\alpha; 6\alpha\}$ .

(ب) عرّف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم أحسب بدلالة  $\alpha$  أمله الرياضياتي.

التمرين الثالث: (04.5 نقطة)

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة ذات المجهول z التالية:  $(z^2 + 2z + 4)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4) = 0$

(2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ . النقط A، B، C و D لواحقها على الترتيب هي:

$$z_D = \overline{z_C} \text{ و } z_C = -1 - i\sqrt{3} \quad ، z_B = \overline{z_A} \quad ، z_A = \sqrt{3} + i$$

(3) أ) أكتب على الشكل الآسي كل من الأعداد:  $z_A$ ،  $z_B$ ،  $z_C$  و  $z_D$ . واستنتج أنّ النقط  $A$ ،  $B$ ،  $C$  و  $D$  تنتمي إلى دائرة واحدة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

(ب) أثبت أنّ  $\frac{z_A}{z_B} = e^{i\frac{\pi}{3}}$  ثم استنتج نوع المثلث  $OAB$ .

(4) عيّن قيم العدد الطبيعي  $n$  حتى يكون  $(z_A)^n$  حقيقيا سالبا.

(5) أ) عيّن  $(s)$  مجموعة النقط  $M$  ذات اللاحقة  $z$  بحيث:  $z = \sqrt{3} + i + k e^{i\frac{2\pi}{3}}$  مع  $k \in \mathbb{R}^+$ .

(ب) عيّن  $(d)$  مجموعة النقط  $M$  ذات اللاحقة  $z$  بحيث:  $|z - \sqrt{3} + i| = |z + 1 + i\sqrt{3}|$ .

التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) نعرّف الدالة  $g$  على  $]0; +\infty[$  بـ:  $g(x) = x^3 - x - 2\ln x + 3$ .

(1) أ) أحسب:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ .

(2) أ) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$ :  $3x^3 - x - 2 = (x-1)(3x^2 + 3x + 2)$ .

(ب) أدرس اتجاه تغير  $g$  وشكل جدول تغيراتها واستنتج إشارة  $g(x)$  على  $]0; +\infty[$ .

(II) الدالة  $f$  معرفة على  $]0; +\infty[$  بـ:  $f(x) = x - 1 + \frac{x-1+\ln x}{x^2}$ . و  $(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم

متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

(1) أحسب:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ؛ ثم بيّن أنّ:  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ ، وفسّر النتيجة بيانيا.

(2) أ) بيّن أنّه من أجل كل  $x$  من  $]0; +\infty[$ ؛  $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$ .

(ب) استنتج اتجاه تغيرات  $f$ ، وشكل جدول تغيراتها.

(3) نعرّف الدالة  $h$  على المجال  $]0; +\infty[$  بـ:  $h(x) = x - 1 + \ln x$ .

(أ) أدرس اتجاه تغير الدالة  $h$ ، وشكل جدول تغيراتها. (لا يطلب حساب النهايتين).

(ب) أحسب  $h(1)$  واستنتج إشارة  $h(x)$  من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $]0; +\infty[$ .

(ج) بيّن أنّ المستقيم  $(\Delta)$  ذا المعادلة:  $y = x - 1$  مقارب مائل لـ  $(C_f)$  بجوار  $+\infty$ ، ثم حدّد وضعهما النسبي.

(4) أكتب معادلة المماس  $(T)$  للمنحنى  $(C_f)$  عند النقطة  $A(1; 0)$ .

(5) أرسم المماس  $(T)$  والمستقيم  $(\Delta)$  والمنحنى  $(C_f)$ .

(6) ليكن  $(D_m)$  مجموعة المستقيمات التي معادلاتها:  $y = mx - m$ ، حيث  $m$  وسيط حقيقي.

(أ) اثبت أنّ كل المستقيمات  $(D_m)$  تمرّ بالنقطة  $A(1; 0)$ .

(ب) عين قيم الوسيط الحقيقي  $m$  حتى تقبل المعادلة:  $f(x) = mx - m$  حلين متميزين.

(7) أ) تحقق أنّ الدالة:  $x \mapsto -\frac{1}{x}(1 + \ln x)$  هي دالة أصلية للدالة  $x \mapsto \frac{\ln x}{x^2}$  على المجال  $]0; +\infty[$ .

(ب) أحسب  $A$  مساحة الحيز المستوي المحدّد بالمنحنى  $(C_f)$  والمستقيم  $(\Delta)$  والمستقيمين ذوي المعادلتين:  $x = \frac{1}{2}$

و  $x = 2$ .

## الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2^n u_n + 2}$$

نعرف المتتالية  $(u_n)$  بـ:  $u_0 = 1$ ، ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$ ،(1) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ،  $0 < u_n$ .(ب) برهن أن المتتالية  $(u_n)$  متناقصة تماما واستنتج أن المتتالية  $(u_n)$  متقاربة.(2) نعرف المتتالية  $(v_n)$  من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ،  $v_n = \frac{1}{2^n u_n}$ .(أ) بين أن المتتالية  $(v_n)$  حسابية أساسها  $\frac{1}{2}$  وعين حدها الأول.(ب) أكتب بدلالة  $n$  عبارة الحد العام  $v_n$ .(ج) استنتج بدلالة  $n$  عبارة الحد العام  $u_n$  واستنتج النهاية  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .(د) احسب بدلالة  $n$  المجموع:  $s_n = u_0 v_0 + u_1 v_1 + \dots + u_n v_n$ .(3) نعرف المتتالية  $(w_n)$  من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ،  $w_n = \ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right)$ .(أ) بين أن المتتالية  $(w_n)$  متزايدة تماما على  $\mathbb{N}$ .(ب) هل المتتاليتان  $(u_n)$  و  $(w_n)$  متجاورتان؟ برّر إجابتك.

التمرين الثاني: (04.5 نقطة)

يتكون فريق عمل من 4 رجال:  $H_1, H_2, H_3, H_4$  و 3 نساء:  $F_1, F_2, F_3$ .

نريد اختيار لجنة تضم رئيسا، نائبا وأميناً.

ونعرف الحوادث التالية:

A: "اللجنة من نفس الجنس"

B: "الرئيس رجل والأمين امرأة"

C: "  $H_4$  رئيس للجنة"D: "اللجنة لا تضم  $H_4$  و  $F_3$  معاً"

(1) بين أن عدد اللجان الممكنة هو 210.

(2) أحسب الاحتمالين:  $p(A)$  و  $p(B)$ .(3) أحسب:  $p(C)$  و  $p(D)$  وأثبت أن:  $p(C \cap D) = \frac{2}{21}$ .(4) ليكن المتغير العشوائي  $X$  الذي يرفق بكل اختيار عدد النساء خارج اللجنة المشكلة.(أ) عين القيم الممكنة للمتغير العشوائي  $X$  وعرف قانون احتمالها.

(ب) أحسب أمله الرياضياتي وانحرافه المعياري.

التمرين الثالث: (4.5 نقطة)

(1) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي  $n$  بواقي القسمة الاقليدية للعدد  $3^n$  على 13.(ب) استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد  $A$  حيث:  $A = 7 \times 2025^{1446} + 10 \times 1962^{1954} + 2024^{1954}$  على 13.(2) نعتبر في المجموعة  $\mathbb{Z}^2$  المعادلة ذات المجهول  $(x; y)$  التالية:  $(E) : 5x - 2y = 13$ .(أ) اثبت أنه إذا كانت الثنائية  $(x; y)$  حلا للمعادلة  $(E)$  فإن  $x \equiv 1[2]$  ثم استنتج حلول المعادلة  $(E)$ .(ب) جد الثنائيات  $(x; y)$  حلول المعادلة  $(E)$  التي تحقق  $x$  قاسم للعدد  $y$ .(3) عين قيم العدد الطبيعي  $n$  التي تحقق:  $2024[13] \equiv n + 1 + 3^n$  و  $3^n \equiv 1445[3]$ .

التمرين الرابع: (07 نقاط)

الدالة العددية المعرفة على المجموعة  $\mathbb{R} - \{0\}$  بـ:  $f(x) = x + \frac{1}{2} \times \frac{e^x}{e^x - 1}$  تمثيلها البياني في المستوي

المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

(1) أ) أحسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

ب) أحسب  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ، ثم فسّر النتيجة هندسيا.

(2) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $\mathbb{R} - \{0\}$ ؛  $f'(x) = \frac{1}{2} \times \frac{(e^x - 2)(2e^x - 1)}{(e^x - 1)^2}$ .

ب) استنتج اتجاه تغير  $f$  وشكل جدول تغيراتها.

(3) أ) بين أن المستقيم  $(\Delta)$  ذا المعادلة:  $y = x$  مقارب مائل للمنحنى  $(C_f)$  بجوار  $-\infty$ .

ب) ادرس الوضع النسبي لـ  $(C_f)$  و  $(\Delta)$ .

ج) بين أن:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \frac{1}{2}$ ، ثم فسّر النتيجة بيانيا.

د) ادرس الوضع النسبي لـ  $(C_f)$  والمستقيم المقارب  $(\Delta')$  ذي المعادلة:  $y = x + \frac{1}{2}$ .

(4) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم  $x$ ؛  $f(x) + f(-x) = \frac{1}{2}$ ، وفسّر النتيجة بيانيا.

(5) أ) أرسم المقاربين  $(\Delta)$  و  $(\Delta')$  والمنحنى  $(C_f)$ .

ب) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي  $m$  عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول  $x$  التالية:

$$2(m - x)(e^x - 1)e^{-x} = 1$$

(6) ليكن  $n$  عددا طبيعيا أكبر تماما من 1.

أحسب بدلالة  $n$  المساحة  $A(n)$  لحيز المستوي المحدد بالمنحنى  $(C_f)$  والمستقيم  $(\Delta')$  والمستقيمين اللذين معادلتيهما:

$$x = \ln(n) \text{ و } x = \ln(n+1)$$

بالتوفيق



انتهى الموضوع الثاني