

التمرين الأول: (05 ن)

الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

(P) معرف بالمعادلة الديكارتية حيث $x+2y+2z+2=0$

(S) مجموعة النقط $M(x; y; z)$ من الفضاء والتي تحقق: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 4z - 3 = 0$

1- بين ان (S) سطح كرة يطلب تعيين مركزها Ω ونصف قطرها r .

2- $B(3; 2; 0)$ نقطة من الفضاء .

- تحقق ان B تنتمي الى (S).

- اكتب المعادلة الديكارتية للمستوي (Q) المماس ل (S) في النقطة B .

3- بين ان (P) و (Q) متعامدان

4- (D) المستقيم المار من $C(1; 1; 1)$ والموازي للمستويين (P) و (Q).

- اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D).

- احسب البعد بين النقطة Ω والمستقيم (D).

بين ان (D) يقطع (S) في نقطتين. (تحديدهما غير مطلوب)

التمرين الثاني: (06 ن)

المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس (O, \vec{i}, \vec{j})

|| من اجل كل عدد مركب z نضع: $p(z) = z^3 + (2\sqrt{2} - 4)z^2 + (8 - 8\sqrt{2})z + 16\sqrt{2}$

1- احسب $p(-2\sqrt{2})$.

2- بين ان $p(z) = (z + 2\sqrt{2})(z^2 + az + b)$ حيث $a; b$ عدنان حقيقيان يطلب تحديدهما.

3- حل في \mathbb{C} مجموعة الاعداد المركبة المعادلة $p(z) = 0$.

|| نضع النقط $A; B; C$ التي لواحقها على الترتيب $Z_A = 2 + 2i, Z_B = 2 - 2i, Z_C = -2\sqrt{2}i$

1- علم النقط $A; B; C$.

2- احسب طويلة لواحق النقط $A; B; C$ ثم بين انها تنتمي الى نفس الدائرة (Γ) يطلب تحديد عناصرها المميزة

3- احسب عمدة العدد المركب Z_A وعمدة العدد المركب Z_B . ثم اثبت ان $(\vec{OB}; \vec{OA}) = \frac{\pi}{2}$

4- عين z_D لاحقة النقطة D حيث O منتصف $[BD]$

5- بين ان $\frac{z_B - z_A}{z_D - z_A} = e^{i\frac{\pi}{2}}$ ثم فسر النتيجة

6- لتكن (E') مجموعة النقط M ذات اللاحقة Z حيث: $z = 2\sqrt{2}e^{i\theta}$.

(أ) تحقق أن النقطة D تنتمي إلى المجموعة (E').

(ب) عين طبيعة المجموعة (E') ثم أنشئها.

التمرين الثالث: (09 ن)

(I) دالة عددية لمتغير حقيقي x معرفة على المجال $]0, +\infty[$ بالشكل: $g(x) = 1 - x^2 - \ln(x)$

وليكن (C_g) منحناها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس (O, \vec{i}, \vec{j}) .

(1). احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ ثم $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

(2). أدرس تغيرات الدالة g .

(3). احسب $g(1)$ واستنتج إشارة g على $]0, +\infty[$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0, +\infty[$ بالشكل: $f(x) = \frac{\ln x}{x} - x + 2$

وليكن (C_f) منحناها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس (O, \vec{i}, \vec{j}) .

(1). احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ وفسر النتيجة بيانياً.

(2). بين أنه مهما يكن $x \in]0, +\infty[$ فإن $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

(3). (أ) بين أن المستقيم (D) الذي معادلته: $y = -x + 2$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحني (C_f) بجوار $+\infty$

(ب) ادرس الوضع النسبي بين (D) و (C_f)

(4). (أ) بين أنه توجد نقطة وحيدة B يكون عندها المماس للمنحني (C_f) موازياً لـ (D) يطلب تعيين إحداثياتها.

(ب) بين أن معادلة المماس (Δ) للمنحني (C_f) في النقطة هي $y = -x + \frac{1}{e} + 2$. B

(5). بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α_1 على المجال $](0,4);(0,5)[$ وتقبل حلاً وحيداً α_2 على المجال

$](2,2);(2,5)[$ ما ذا تستنتج بيانياً؟

(6). أنشئ المنحني (C_f) والمستقيمان (D) و (Δ)

(7). ناقش بيانياً حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $(m-2)x = \ln x$

وزارة التربية الوطنية		ثانوية جبابري امحمد	
تصحيح الأختبار		السنة الدراسية: 2015 - 2016	
المستوى : 3 ثانوي		عدد الصفحات :	
الشعبة: علوم تجريبية		المادة : رياضيات	

البعد بين النقطة Ω والمستقيم (D) . و بوضع النقطة H مسقطها العمودي نجد $\overrightarrow{\Omega H}(2t; -2t; t-1)$ ومنه $\overrightarrow{\Omega H} \cdot \vec{u} = 0; 4t + 4t + t - 1 = 0; \left(t = \frac{1}{7}\right)$ ومنه $\Omega H = \frac{\sqrt{44}}{7}$ ومنه $\overrightarrow{\Omega H} \left(\frac{2}{7}; -\frac{2}{7}; -\frac{6}{7}\right)$ اثبات ان (D) يقطع (S) في نقطتين $r = 3$ و $\Omega H = \frac{\sqrt{44}}{7} \approx 1$ اذن $\Omega H < r$ يعني ان (D) يقطع (S) في نقطتين .

التمرين الثاني:

المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس (O, \vec{i}, \vec{j})

من اجل كل عدد مركب z نضع :

$$p(z) = z^3 + (2\sqrt{2} - 4)z^2 + (8 - 8\sqrt{2})z + 16\sqrt{2}$$

-1 حساب $p(-2\sqrt{2})$.

$$p(-2\sqrt{2}) = (-2\sqrt{2})^3 + (2\sqrt{2} - 4)(-2\sqrt{2})^2$$

$$+ (8 - 8\sqrt{2})(-2\sqrt{2}) + 16\sqrt{2}$$

$$p(-2\sqrt{2}) = -16\sqrt{2} + 16\sqrt{2} - 32$$

$$-16\sqrt{2} + 32 + 16\sqrt{2} = 0$$

-2 اثبات ان $p(z) = (z + 2\sqrt{2})(z^2 + az + b)$ حيث a, b عدنان حقيقيان يطلب تحديدهما.

$$p(z) = z^3 + az^2 + bz + 2\sqrt{2}z^2 + 2\sqrt{2}az + b2\sqrt{2}$$

$$p(z) = z^3 + z^2(a + 2\sqrt{2}) + z(b + 2\sqrt{2}a) + b2\sqrt{2}$$

بالمطابقة نجد $a = -4; b = 8$

$$p(z) = (z + 2\sqrt{2})(z^2 - 4z + 8)$$

-3 حل في \mathbb{C} مجموعة الاعداد المركبة المعادلة $p(z) = 0$.

أي ان $(z + 2\sqrt{2})(z^2 - 4z + 8) = 0$ ومنه $z = -2\sqrt{2}$ و

$$Z = 2 - 2i \text{ و } Z = 2 + 2i \text{ أي } z^2 - 4z + 8$$

/// نضع النقط $C; B; A$ التي لواحقها على الترتيب

$$Z_C = -2\sqrt{2}i \text{ و } Z_B = 2 - 2i. Z_A = 2 + 2i$$

-1 تعليم النقط $C; B; A$.

التمرين الأول:

الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

(P) معرف بالمعادلة الديكارتيية حيث

$$(P): x + 2y + 2z + 2 = 0$$

(S) مجموعة النقط $M(x; y; z)$ من الفضاء والتي تحقق

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 4z - 3 = 0:$$

-1 اثبات ان (S) سطح كرة يطلب تعيين مركزها Ω ونصف قطرها r .

لدينا $a = -2; b = -2; c = -4; d = -3$ ومنه

$$\text{و } x_\Omega = -\frac{a}{2} = 1; y_\Omega = -\frac{b}{2} = 1; z_\Omega = -\frac{c}{2} = 2$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 + d = 9 \text{ ومنه } \Omega(1; 1; 2) \text{ و } r = 3$$

-2 نقطة $B(3; 2; 0)$ من الفضاء .

$$(S): (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 3$$

- التحقق ان B تنتمي الى (S) . لدينا

$$(3-1)^2 + (2-1)^2 + (0-2)^2 = 3 \text{ محقق}$$

$$B \in (S) \text{ اي}$$

- المعادلة الديكارتيية للمستوي (Q) المماس ل (S) في

$$\text{النقطة } B. \text{ شعاعه الناظمي } \overrightarrow{\Omega B}(2, 1, -2)$$

ومنه $B \in (Q)$ يعني ان $d = -8$ أي

$$(Q): 2x + y - 2z - 8 = 0$$

-3 اثبات ان (P) و (Q) متعامدان

$$\vec{n}_{(P)}(1; 2; 2) \text{ و } \overrightarrow{\Omega B}(2, 1, -2) \text{ ومنه}$$

$$(P) \text{ و } \overrightarrow{\Omega B} \cdot \vec{n}_{(P)} = 2 + 2 - 4 = 0 \text{ متعامدان}$$

-4 (D) المستقيم المار من $C(1; 1; 1)$ و الموازي للمستويين

$$(P) \text{ و } (Q).$$

- تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) . شعاع توجيهه

$$\begin{cases} \vec{u} \cdot \overrightarrow{\Omega B} = 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{n}_{(P)} = 0 \end{cases} \text{ يحقق } \vec{u}(a, b, c)$$

$$\text{ومنه نحل الجملة } \begin{cases} 2a + b - 2c = 0 \\ a + 2b + 2c = 0 \end{cases} \text{ نأخذ } c \text{ ثابت نجد}$$

$$\vec{u}(2, -2, 1) \text{ اذن } b = -2c \text{ و } a = -b$$

$$\text{اذن } (D): \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -2t + 1 \\ z = t + 1 \end{cases} t \in \mathbb{R}$$

التمرين الثالث:

(I) دالة عددية لمتغير حقيقي x معرفة على المجال $]0, +\infty[$ بالشكل: $g(x) = 1 - x^2 - \ln(x)$ وليكن (C_g) منحناها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس (O, \vec{i}, \vec{j}) .

(1) تغيرات الدالة g . نعلم ان

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = -\infty; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x)}{x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 1 - x^2 - \ln(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - x^2 - \ln(x) = -\infty$$

المشتقة g : دالة تقبل الاشتقاق ودالتها المشتقة

$$g'(x) = (1 - x^2 - \ln(x))' = -2x - \frac{1}{x} = \frac{-2x^2 - 1}{x}$$

إشارة المشتقة $g'(x) = 0$ يعني ان $-2x^2 - 1 = 0$ ومنه $g'(x) < 0$

جدول التغيرات $g(1) = 0$

x	0	1	$+\infty$
$-2x^2 - 1$		-	
x		+	
$g'(x)$		-	
$g(x)$	$+\infty$	0	0

لما $x \in]0; 1[$ الدالة $g(x) > 0$ ولما $x \in]1; +\infty[$ فان $g(x) < 0$

(II) نعتبر الدالة f معرفة $]0, +\infty[$ بالشكل: $f(x) = \frac{\ln x}{x} - x + 2$

(أ) النهايات

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x} - x + 2 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} - x + 2 = -\infty$$

(1). بين أنه مهما يكن $x \in]0, +\infty[$ $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ ثم

استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

الدالة f تقبل الاشتقاق

$$f'(x) = \left(\frac{\ln x}{x} - x + 2 \right)' = -1 + \frac{1 - \ln x}{x^2} = \frac{-x^2 + 1 - \ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

إشارة المشتق $f'(x)$: يعني ان $g(x) = 0$ ومنه $x = 1$

لدينا $f(1) = 1$

2- حساب طولية لواحق النقط $C; B; A$ لدينا

$$|Z_B| = |2 - 2i| = 2\sqrt{2} \text{ و } |Z_A| = |2 + 2i| = 2\sqrt{2}$$

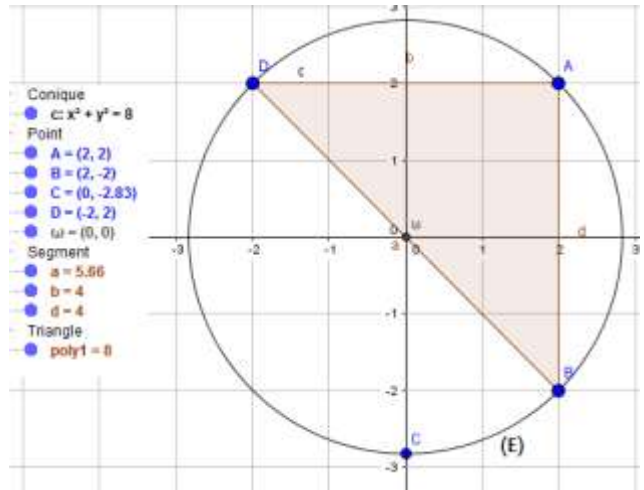
$$|Z_C| = |-2\sqrt{2}i| = 2\sqrt{2}$$

نستنتج ان النقط $C; B; A$ تنتمي الى نفس الدائرة (Γ) ذات

المركز O ونصف قطرها $r = 2\sqrt{2}$

3- عمدة العدد المركب Z_A :

$$\arg(Z_A) \begin{cases} \cos \theta = \sqrt{2}/2 \\ \sin \theta = \sqrt{2}/2 \end{cases} \theta = \frac{\pi}{4}$$



و عمدة العدد المركب Z_B :

$$\arg(Z_B) \begin{cases} \cos \theta = \sqrt{2}/2 \\ \sin \theta = -\sqrt{2}/2 \end{cases} \theta = -\frac{\pi}{4}$$

اثبات ان

$$(\vec{OB}; \vec{OA}) = (\vec{OI}; \vec{OA}) - (\vec{OI}; \vec{OB}) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

4- عين z_D لاحقة النقطة D حيث O منتصف $[BD]$

$$z_D = -2 + 2i \text{ ومنه } \frac{z_D + z_B}{2} = 0$$

5- اثبات ان $\frac{z_B - z_A}{z_D - z_A} = e^{i\pi/2}$ ومنه

$$\frac{z_B - z_A}{z_D - z_A} = \frac{2 - 2i - 2 - 2i}{-2 + 2i - 2 - 2i} = i = e^{i\pi/2}$$

صرف موجب

تفسير النتيجة المثلث ABD قائم في A ومتساوي الساقين

6- لتكن (E') مجموعة النقط M ذات اللاحقة Z حيث

$$z = 2\sqrt{2}e^{i\theta} \text{ . .}$$

(أ) التحقق أن النقطة D تنتمي إلى المجموعة (E') .

بما ان $z_D = 2\sqrt{2}e^{i\theta}$ يعني ان $-2 + 2i = 2\sqrt{2}e^{i\theta}$

$$D \in (E') \text{ فان } |z_D| = |-2 + 2i| = 2\sqrt{2}$$

(ب) المجموعة (E') هي دائرة مركزها O ونصف

قطرها $2\sqrt{2}$ ثم أنشئها.

وبما ان $f(2,2) \times f(2,5) \leq 0$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة

المعادلة $f(\alpha_2) = 0$ تقبل حلا وحيدا على المجال

$$\alpha_2 \in](2,2);(2,5)[$$

نستنتج بياننا ان المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في

النقطة ذات الفاصلة α_2 و α_1

(4.) النقطة الوحيدة B يكون عندها المماس للمنحنى (C_f)

موازيا لـ (D) أي $f'(x) = -1$ ومنه $f'(x) + 1 = 0$ ومنه

$$x = e \text{ ومنه } 1 - \ln x = 0$$

(ب) معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) في النقطة B هي :

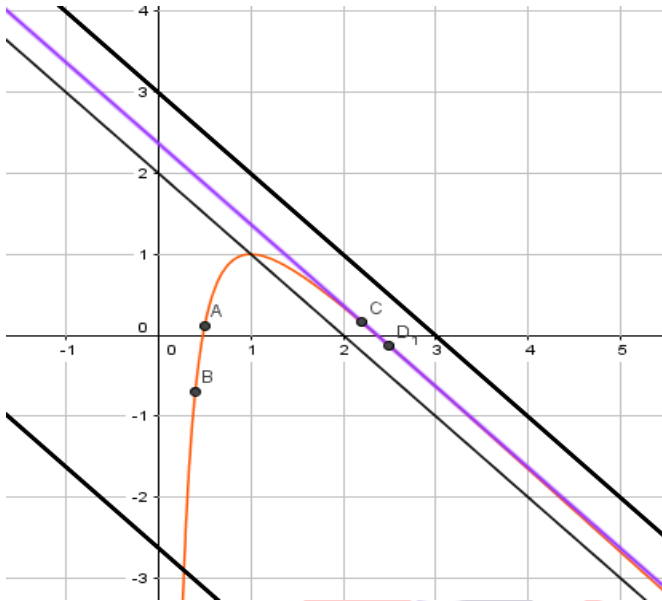
$$y = -(x - e) + f(e)$$

$$\text{لان } f(e) = \frac{1}{e} - e + 2 = \frac{1 - e^2 + 2e}{e} \text{ ومنه}$$

$$y = -x + \frac{1}{e} + 2 \text{ أي } y = -x + e + \frac{1 - e^2 + 2e}{e}$$

(5.) أنشئ المنحنى (C_f) والمستقيمان (D) و (Δ)

(6.) المناقشة البيانية حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد



حلول المعادلة $(m-2)x = \ln x$

$$\text{ومنه } f(x) = -x + m \text{ و } -x + m = \frac{\ln x}{x} - x + 2$$

$$m \in]-\infty; \frac{1}{e} + 2[\text{ المعادلة تقبل حل وحيد}$$

$$m \in \left[\frac{1}{e} + 2; +\infty \right[\text{ المعادلة لا تقبل حلول}$$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	--
$f(x)$	$-\infty$	1	$-\infty$

(2.) اثبت أن المستقيم (D) الذي معادلته $y = -x + 2$

هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$

(ب) ادرس الوضع النسبي بين (D) و (C_f) لدينا

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} - x + 2 + x - 2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

ومنه $y = -x + 2$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى

(ب) وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (D)

$$[f(x) - y] = \frac{\ln x}{x} \text{ ومنه } \ln x = 0 \text{ أي } x = 1$$

$x \in]0; 1[$ المنحنى (C_f) فوق (D) ولما $x \in]1; +\infty[$ المنحنى

(C_f) تحت (D)

(3.) المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا على المجال

$](0,4);(0,5)[$ بما ان الدالة f متزايدة على المجال

$]0;1[$ ومستمرة فهي رتيبة و متزايدة ومستمرة على المجال

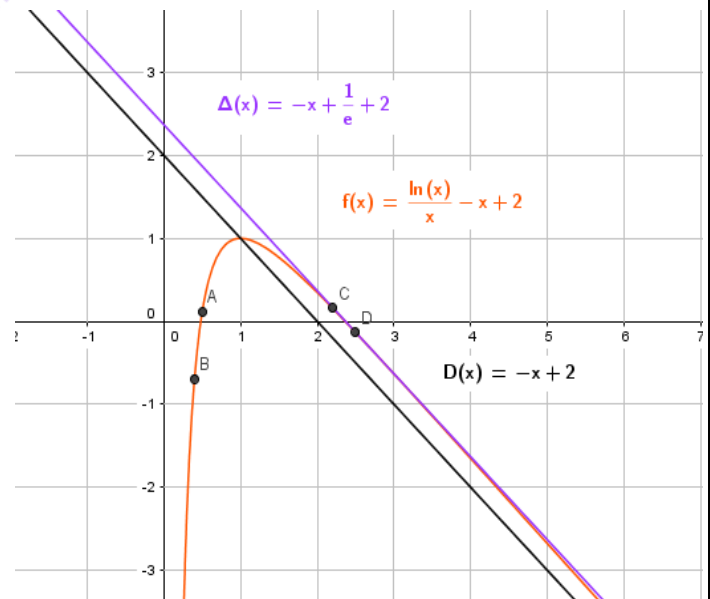
$](0,4);(0,5)[$ فهي رتيبة

وبما ان $f(0,4) = -0,69$ و $f(0,5) = 0,11$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة

$f(\alpha_1) = 0$ تقبل حلا وحيدا على المجال

$$\alpha_1 \in](0,4);(0,5)[$$



بما ان الدالة f متناقصة ومستمرة على المجال $]1; +\infty[$ فهي

رتيبة فهي متناقصة ومستمرة على المجال $](2,2);(2,5)[$

وهي رتيبة وبما ان $f(2,2) = 0,11$ و $f(2,5) \approx -0,13$