ثانوية ابن خلدون ميرامار — وزارة التربية الوطنية — دورة ماي 2016

امتحان بكالوريا تجريبي في مادة الرياضيات

الشعبة : علوم تجريبية — **المدة 03 ساعات ونصف**

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول: (5ن)

الفضاء منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ ، نعتبر النقطتين : $A(12,7,-13)$ $B(3,1,2)$

و المستويان (P) و (P') حيث ، $(P)\ :\ 3x+2y-5z-1=0$ و $(P')\ :\ x+y-2z=0$.

1- بين أن (P) و (P') متقاطعان وفق مستقيم يشمل النقطة B و $\vec{u}(1;1;1)$ شعاع توجيه له.

2- أثبت أن النقطة B هي المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (P) .

3- ليكن المستوي (Q) و المعرف بالتمثيل الوسيطي:
$$\begin{cases} x=2t-2\lambda+6 \\ y=2t+3\lambda+5 \\ z=2t-6 \end{cases} \quad t;\lambda\in\mathbb{R}$$

أ/ بين أن (P) و (Q) متوازيان .

ب/ تحقق أن المعادلة : $3x+2y-5z=58$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (Q) .

ج/ تحقق أن النقطة I منتصف القطعة $[AB]$ تنتمي للمستوي (Q) و استنتج أن (Q) مستوي محوري للقطعة $[AB]$

4- لتكن (S) مجموعة النقط M من الفضاء و التي تحقق $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$.

أ/ تعرف على المجموعة (S) ثم حدد عناصرها المميزة.

ب/ استنتج أن المستوي (Q) يقطع (S) وفق دائرة يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها.

التمرين الثاني : (5ن)

I. لتكن المتتالية (U_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $U_0=\frac{1}{3}$ و من أجل كل عدد طبيعي n :
$$U_{n+1}=\frac{3}{2}\left[1-\frac{1}{1+2U_n}\right]$$

1- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0<U_n<1$

2- أ/ تحقق أن $U_{n+1}-U_n=\frac{2U_n(1-U_n)}{1+2U_n}$ من أجل كل عدد طبيعي n ثم استنتج اتجاه تغيرات المتتالية (U_n)

ب/ بين أن المتتالية (U_n) متقاربة ، ثم أحسب نهايتها .

II. لتكن المتتالية (V_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $V_n=\frac{U_n-1}{2U_n}$.

1- بين أن (V_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

2- أكتب V_n بدلالة n ثم استنتج U_n بدلالة n ثم احسب من جديد نهاية المتتالية (U_n) .

3- أحسب بدلالة n المجموعين $S_n=V_0+V_1+.......+V_n$ و $T_n=V_0+3V_1+9V_2+.......+3^nV_n$.

التمرين الثالث : (04ن)

المستوى منسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-2\sqrt{3}z+4=0$

2- A و B نقطتان من المستوى لاحقتاهما على الترتيب $z_A=\sqrt{3}-i$ و $z_B=\sqrt{3}+i$.

C منتصف القطعة $[OB]$ لاحقتها z_C

أ/ اكتب z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسي .

ب/ تعرف على طبيعة المثلث OAB.

3- نسمي D صورة C بالدوران الذي مركزه O و زاويته $\left(\frac{-\pi}{2}\right)$ و نسمي E صورة D بالانسحاب الذي شعاعه $2\vec{j}$.

أ/ بين أن لاحقة النقطة E هي: $z_E=\frac{1}{2}\left[1+\left(4-\sqrt{3}\right)i\right]$.

ب/ بين أن $OE=BE=\sqrt{5-2\sqrt{3}}$.

4- بين أن النقط A ، C و E في استقامية .

5- عين ثم أنشئ المجموعة (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث $\frac{z-\sqrt{3}+i}{z-\sqrt{3}-i}$ تخيلي صرف.

التمرين الرابع : (06ن)

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $]0,+\infty[$ بـ : $g(x)=\frac{x+1}{2x+1}-\ln x$.

1- ادرس تغيرات الدالة g على المجال $]0,+\infty[$.

2- بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $1.8 \prec \alpha \prec 1.9$

3- استنتج اشارة $g(x)$ على المجال $]0,+\infty[$.

نعتبر الدالة f المعرفة على $]0,+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{2\ln x}{x^2+x}$ و ليكن (Cf) تمثيلها البياني في مستو منسوب الى معلم متعامد $(O;\vec{i};\vec{j})$. $\left(\|\vec{i}\|=1cm \text{ و } \|\vec{j}\|=2cm\right)$

1- عين نهايتي f عند 0 و $+\infty$ ثم فسر النتيجتين هندسيا .

2- بين أن من أجل كل عدد حقيقي x من $]0,+\infty[$: $f'(x)=\frac{2(2x+1)}{(x^2+x)^2}\times g(x)$.

3- استنتج اشارة $f'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f

4- بين أن $f(\alpha)=\frac{2}{\alpha(2\alpha+1)}$ ثم أعط حصرا للعدد $f(\alpha)$ ، بتدوير 0.01.

5- أكتب معادلة المماس (T) عند النقطة ذات الترتيبة 0

6- ارسم (T) ، (Cf) و (C') المنحنى الممثل للدالة $|f|$.

7- لتكن h دالة معرفة على $\mathbb{R}^*$ بالشكل : $h(x)=\left|f\left(|x|\right)\right|$.

أ/ أدرس شفعية الدالة h على $\mathbb{R}^*$.

ب/ وضح كيف يمكن إنشاء (C_h) انطلاقا من (C') ، ثم أنشئه .

الموضوع الثاني

التمرين الأول : (4 ن)

الفضاء منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ ، نعتبر المستقيمين (Δ) و (Δ') المعرفين

بالتمثيلين الوسيطيين الآتيين : $\lambda \in \mathbb{R}$ ، $(\Delta)\begin{cases}x=3+\lambda\\y=2+\lambda\\z=-2-2\lambda\end{cases}$ و $\alpha \in \mathbb{R}$ ، $(\Delta')\begin{cases}x=6+\alpha\\y=1-2\alpha\\z=5+\alpha\end{cases}$.

1- بين أن المستقيمين (Δ) و (Δ') ليسا من نفس المستوي .

2- A نقطة كيفية من (Δ) و B نقطة كيفية من (Δ')

أ/ عين احداثيات النقطتين A و B بحيث يكون المستقيم (AB) عموديا على كل من (Δ) و (Δ') .

ب/ أحسب الطول AB .

3- عين معادلة للمستوي (P) الذي يحوي المستقيم (Δ) و يوازي المستقيم (Δ').

4- أحسب المسافة بين نقطة من (Δ') و المستوي (P) . ماذا تلاحظ ؟

التمرين الثاني (5ن)

i. نعتبر في $\mathbb{C}$ كثير الحدود للمتغير المركب z المعرف كما يلي:

$P(z)=z^3-(4+2i)z^2+8(1+i)z-16i$.

1- بين أن المعادلة $P(z)=0$ تقبل حلا تخيليا صرفا z_0 يطلب تعيينه.

2- بين أنه يوجد عددان حقيقيان a و b بحيث $P(z)=(z-2i)(z^2+az+b)$ ثم حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z)=0$.

ii. في المستوى المركب المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$ لتكن النقط A ، B و C التي لاحقتاها على الترتيب : $z_A=2i$ ، $z_B=2+2i$ و $z_C=\overline{z_B}$

نضع العدد $L=\dfrac{Z_C-Z_B}{Z_A-Z_B}$

1- أوجد الشكل الجبري للعدد المركب L ثم الشكل الأسي له.

2- استنتج أن النقطة C صورة النقطة A بتحويل نقطي يطلب تعيينه مع ذكر عناصره المميزة.

3- أ/ ماهي طبيعة المثلث ABC ؟

ب/ استنتج أن النقط A ، B و C تنتمي إلى نفس الدائرة (C) يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها.

4- عين لاحقة النقطة E حتى يكون $ABCE$ مستطيل .

5- أ/ عين العدد الحقيقي α حتى تكون النقطة E مرجح الجملة : $\{(A,\alpha),(B,-1),(C,1)\}$.

ب/ عين (Ω) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق : $MA^2-MB^2+MC^2=9$.

التمرين الثالث: (4.5ن)

نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $U_0 = 3$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $3U_{n+1} = U_n + 4n + 4$

1- أحسب U_1 ، U_2 ، U_3.

2- أ/ برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $U_n \succ 0$.

ب/ استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ ، $U_n \succ \frac{4}{3}n$ و استنتج نهاية المتتالية (U_n).

3- نعرف المتتالية (V_n) بـ: من أجل كل عدد طبيعي n ، $V_n = U_n - 2n + 1$.

أ/ برهن أن (V_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

ب/ استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $U_n = 4\left(\frac{1}{3}\right)^n + 2n - 1$.

ج/ أحسب بدلالة n المجموع $S_n = V_0 + V_1 + \ldots\ldots + V_n$

ثم استنتج بدلالة n المجموع $S'_n = U_0 + U_1 + \ldots\ldots + U_n$.

التمرين الرابع : (6.5ن)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{(2x-1)e^x - 2x + 2}{e^x - 1}$.

(C) تمثيلها البياني في مستو منسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1- أ/ تحقق أنه من أجل $x \neq 0$: $f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{e^x - 1}$.

ب/ عين العددين الحقيقيين a و b بحيث يكون من أجل x من $\mathbb{R}^*$: $f(x) = 2x + a + \frac{be^x}{e^x - 1}$.

ج/ أحسب نهايات الدالة f عند $-\infty$ ، $+\infty$ و 0

2- نضع : $h(x) = 2(e^x - 2)\left(e^x - \frac{1}{2}\right)$.

أ/ أدرس إشارة $h(x)$ حسب قيم x من $\mathbb{R}^*$.

ب/ بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ $f'(x) = \frac{h(x)}{(e^x - 1)^2}$.

3- شكل جدول تغيراتها.

4- أ/ أثبت أن المنحنى (C) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين يطلب تعيينهما.

ب/ادرس وضعية المنحنى (C) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 2x - 1$.

ج/ أثبت أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$: $f(-x) + f(x) = -3$.ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنى (C)؟

5- انشئ المنحنى (C) ثم احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C) و المستقيمات :

$y = 2x - 1$ و $x = \ln 2$ و $x = \ln 3$.

6- لتكن F الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $F(x) = 2x^2 - 2(m+1)x + \ln(e^x - 1)^2$

حيث m وسيط حقيقي .

أ/ أحسب F' الدالة المشتقة لدالة F بدلالة f

ب/ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد القيم الحدية للدالة F .

أتمنى لكم التوفيق و النجاح في شهادة البكالوريا