مديرية التربية لولاية تيبازة
بكالوريا تجريبي في مادة الرياضيات
الشعبة : علوم تجريبية

المقاطعة الشرقية
دورة ماي 2023
المدة: 03 ساعات و نصف

على التلميذ أن يختار أحد الموضوعين

الموضوع الأول

التمرين الأول : (04 نقاط)

عيّن الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة في كل حالة من الحالات التالية مع التبرير.

1) الحل الخاص للمعادلة التفاضلية : $-y'+2y-2=0$ و الذي يحقق $y(0)=2024$ هو :

أ) $f(x)=2023e^{2x}-1$ ، ب) $f(x)=2023e^{2x}+1$ ، جـ) $f(x)=-2023e^{2x}$.

2) مجموعة حلول المتراجحة : $9^x-4.3^x+4\leq 0$ في المجموعة $\Re$ هو :

أ) $S=\Phi$ ، ب) $S=\left]-\infty;\ln\left(\frac{2}{3}\right)\right]$ ، جـ) $S=\left\{\frac{\ln(2)}{\ln(3)}\right\}$.

3) حلول المعادلة $6.C_n^3+A_n^2=36$ في مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ هي: أ) $S=\{0;4\}$ ، ب) $S=\{4\}$ ، جـ) $S=\Phi$

4) القيمة المتوسطة للدالة f المعرفة بالعبارة $f(x)=\frac{2e^{-x}}{2e^{-x}+1}$ على المجال $[0;\ln 2]$ هي :

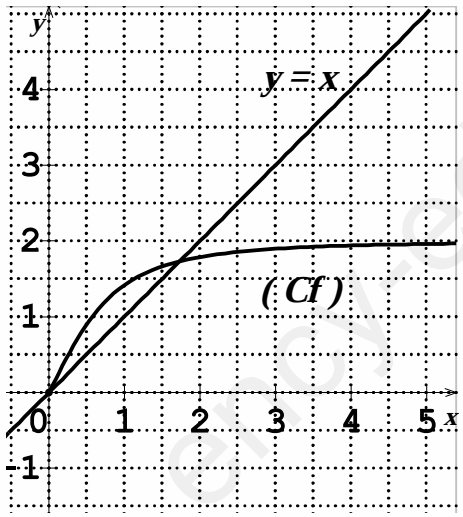
أ) $m=-1+\frac{\ln 2}{\ln 3}$ ، ب) $m=1-\frac{\ln 3}{\ln 2}$ ، جـ) $m=-1+\frac{\ln 3}{\ln 2}$.

5) ليكن Z عدد مركب حيث : $Z=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$. قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون Z^n حقيقي هي :

أ) $n=4k$ ، ب) $n=4k+2$ ، جـ) $n=2k+4$. حيث $k\in\mathbb{N}$.

التمرين الثاني : (05 نقاط)

الشكل المرفق هو التمثيل البياني للدالة f المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$ و المستقيم ذو المعادلة $y=x$ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.



1) أ) أدرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $[0;+\infty[$.

ب) بيّن أنه إذا كان $x\in[0,\sqrt{3}]$ فإن : $f(x)\in[0,\sqrt{3}]$.

2) نعرف المتتالية (u_n) كمايلي : $u_0=1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=f(u_n)$

أ) مثل الحدود u_0 ; u_1 ; u_2 على محور الفواصل مبرزا خطوط التمثيل.

ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها .

جـ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1\leq u_n\leq\sqrt{3}$.

د) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n.\left(2-\sqrt{1+u_n^2}\right)}{\sqrt{1+u_n^2}}$

ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) و استنتج تقاربها .

3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=\frac{u_n^2}{3-u_n^2}$

أ) بيّن أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول ثم أكتب عبارة v_n بدلالة n .

ب) استنتج u_n بدلالة n ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

جـ) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n=\frac{3}{3-u_0^2}+\frac{3}{3-u_1^2}+\cdots+\frac{3}{3-u_n^2}$

www.ency-education.com

التمرين الثالث : (04 نقاط)

نعتبر صندوقين متماثلين U_1 ، U_2 بهما كرات متماثلة لا نفرق بينها باللمس بحيث :

U_1 يحتوي على خمس كرات حمراء تحمل الأرقام 0 ، 2 ، 1 ، 1 ، 1 و ثلاث كرات خضراء تحمل الأرقام 0 ، 1 ، 1.

U_2 يحتوي على ثلاث كرات حمراء تحمل الأرقام 2 ، 1 ، 1 و كرتين خضراوين تحملان الرقمين 0 ، 1.

نختار عشوائيا احد الصندوقين . اذا كان U_1 نسحب منه كرتين على التوالي دون ارجاع واذا كان U_2 نسحب منه كرتين على التوالي و بإرجاع.

1) أحسب احتمال الحوادث التالية : A "سحب كرتين من نفس اللون " و B "سحب كرتين تحملان نفس الرقم "

2) بيّن أن : $P(A\cap B)=\frac{37}{175}$. هل الحدثان A و B مستقلان ؟ علّل .

3) اذا علمت أن الكرتين المسحوبتين من لونين مختلفين ، فما هو احتمال ان تكون من الصندوق U_1؟.

4) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة مجموع رقمي الكرتين المسحوبتين من الصندوق U_1.

أ) عين قيم المتغير العشوائي X ثم عرّف قانون احتماله . **ب)** أحسب $E(-3X+7)$.

التمرين الرابع: (07 نقط)

I) لتكن الدالة العددية g المعرفة والمتزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=(x\ln x)^2+\ln x+1$

- بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $0,32<\alpha<0,33$ ثم استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0;1[\cup]1;+\infty[$ بـ : $f(x)=x-\frac{1}{x.\ln x}$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$. (وحدة الطول $1Cm$)

1) أ) بيّن أن: $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} f(x)=+\infty$ ثم فسّر النتيجة بيانيا.

ب) أحسب $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}1} f(x)$ و $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}1} f(x)$ ثم فسّر النتيجة بيانيا . أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) أ) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;1[\cup]1;+\infty[$: $f'(x)=1+\frac{1+\ln x}{(x.\ln x)^2}$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3) بيّن أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$ مقارب مائل لـ (C_f) ثم أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و للمستقيم (Δ).

4) ليكن المستقيم (T) ذا المعادلة $y=x+\beta$ حيث β عدد حقيقي.عيّن قيمة β حتى يكون المستقيم (T) مماسا للمنحنى (C_f) في نقطة يطلب تعيين إحداثياها.

5) أرسم (Δ)،(T) و المنحنى (C_f). (علما أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها λ حيث: $1,53<\lambda<1,54$. نأخذ $f(\alpha)\simeq 3$).

6) عيّن بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة : $x=e^{\frac{1}{x.m}}$ حلين متمايزين.

7) أحسب بالسنتيمتر المربع مساحة الحيّز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) ، المستقيم (Δ) و المستقيمين المعرفين بالمعادلتين: $x=3$ ، $x=4$.

III) لتكن الدالة h المعرفة على المجال $]0;1[\cup]1;+\infty[$ بـ : $h(x)=[f(x)]^2$.

أ) أحسب $h'(x)$ بدلالة $f'(x)$ و $f(x)$ (دون حساب عبارة $h(x)$).

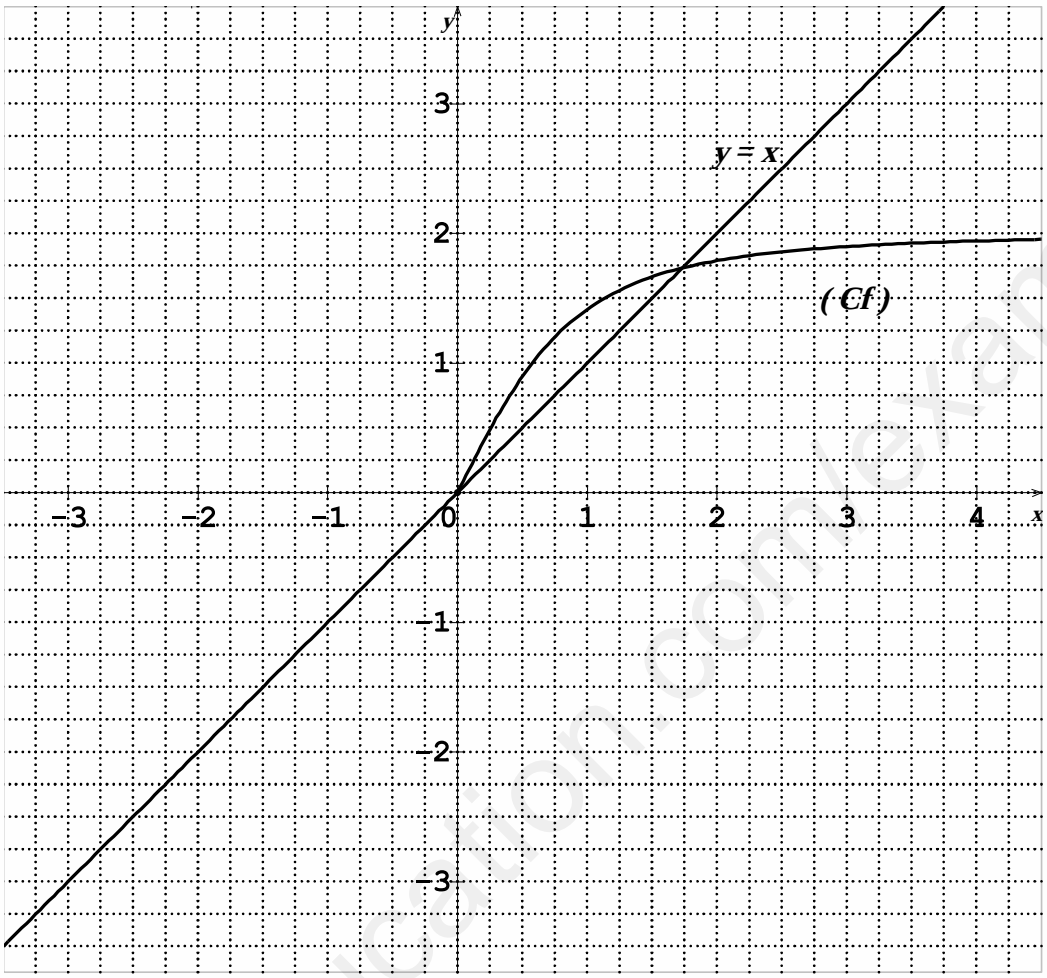
ب) أدرس اتجاه تغير الدالة h ثم شكل جدول تغيراتها.

انتهى الموضوع الاول

www.ency-education.com

الوثيقة المرفقة

الاسم و اللقب : .....



ملاحظة: تعاد الوثيقة المرفقة مع ورقة الإجابة

ency-education.com/exams

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (05 نقاط)

1) لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0=\alpha$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=(\ln 2)u_n+\ln\left(\frac{e^2}{4}\right)$

أ- عين قيمة العدد الحقيقي α حتى تكون المتتالية (u_n) متتالية ثابتة .

2) من أجل: $\alpha=3$

أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2<u_n\leq 3$

ب) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}-u_n=(\ln 2-1)(u_n-2)$.

جـ) استنتج أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ و برّر تقاربها .

د) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n$

3) من أجل كل عدد طبيعي n نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة بـ: $v_n=2u_n-4$

أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\ln 2$ يطلب تعيين حدها لأول v_0 .

ب) أكتب عبارة v_n بدلالة n و استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n=(\ln 2)^n+2$ ثم أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n$ مرة أخرى .

4) تحقق أن : $\frac{(\ln 4)^n}{u_n-2}=2^n$ ثم أحسب بدلالة n المجموع : $S_n=\frac{1}{u_0-2}+\frac{\ln 4}{u_1-2}+\frac{(\ln 4)^2}{u_2-2}+...+\frac{(\ln 4)^n}{u_n-2}$.

التمرين الثاني : (04 نقاط)

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية : $(\overline{z}-1+3i)(z^2-10z+50)=0$

في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط A، B و C لواحقها على الترتيب :

$z_A=5+5i$ ، $z_B=\overline{z_A}$ و $z_C=1+3i$

2) أ) أكتب كل من z_A و z_B على الشكل الأسي.

ب) علّم النقط A، B و C.

جـ) عيّن طويلة و عمدة العدد المركب $\frac{z_A-z_C}{z_B-z_C}$.

د) استنتج طبيعة المثلث ABC ثم أحسب مساحته .

3) أ) أكتب على الشكل الجبري العدد a حيث: $a=\left(\frac{z_B}{5\sqrt{2}}\right)^{2025}-\left(\frac{z_A}{5\sqrt{2}}\right)^{2023}$

ب) عيّن قيم العدد الطبيعي n حتى يكون a^n تخيليا صرفا موجبا.

4) أ) عين z_D لاحقة النقطة D حتى يكون الرباعي $ADBC$ مستطيل.

ب) عين z_I لاحقة النقطة I منتصف القطعة $[BC]$ ثم بين أن النقط I،O،D على استقامة واحدة .

5) عين طبيعة (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z والتي تحقق: $|-iz+i-3|=|z-5-5i|$

ثم أنشئها في المعلم السابق.

التمرين الثالث : (04 نقاط)

يحتوى كيس على 5 كريات حمراء و 3 كريات بيضاء ، كل الكريات متماثلة ولا نفرق بينها عند اللمس ، نسحب من الكيس 3 كريات عشوائيا و في أن واحد . نعتبر الحوادث التالية:

A: "الكريات المسحوبة كلها حمراء " ، B: "توجد كرية واحدة حمراء " ، C: "توجد على الأقل كرية واحدة بيضاء " .

1) أحسب احتمال كل حدث من الحوادث التالية : A ، B ، C.

www.ency-education.com

2) ننزع من الكيس الكريات البيضاء ونضع مكانها n كرية سوداء حيث n عدد طبيعي و يحقق: $n \geq 2$.
نسحب عشوائيا من الكيس كريتين على التوالي وبدون إرجاع .

– نقترح اللعبة التالية: سحب كرية حمراء يخسر 10 نقاط ، وسحب كرية سوداء يربح 5 نقاط .
ليكن المتغيّر العشوائي X الذي يرفق بكل سحب كريتين مجموع النقاط المحصّل عليها .

أ) ماهي القيم الممكنة للمتغير العشوائي X ؟.

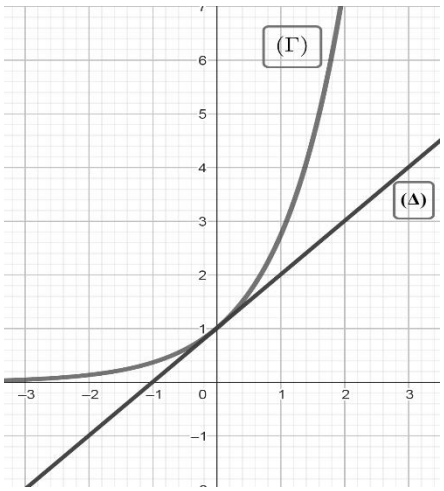
ب) بيّن أن $P(X=10)=\dfrac{n(n-1)}{(n+4)(n+5)}$

جـ) أكتب قانون احتمال المتغير العشوائي X ثم أحسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

د) عين قيمة n حتى تكون اللعبة عادلة .

ه) كيف نختار عدد الكريات السوداء حتى تكون اللعبة مربحة ؟

<u>التمرين الرابع :</u> (07 نقاط)



I) في الشكل المقابل (Δ) مستقيم معادلته $y=x+1$ و (Γ) منحنى الدالة $x \mapsto e^x$

1) بقراءة بيانية برر لماذا من أجل كل عدد حقيقي x : $e^x-(x+1)\geq 0$

2) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة : $g(x)=\dfrac{1}{2}x^2+x-e^x$

أ) أدرس اتجاه تغير الدالة g (لا يطلب حساب النهايات).

ب) برهن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $-2.2<\alpha<-2.1$

جـ) استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$.

II) لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة : $f(x)=e^{2x}-x^2e^x$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

$\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=1cm$

1) أ) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ثم فسر النتيجة بيانيا.

ب) أثبت أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

2) أ) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $f'(x)=-2.e^x.g(x)$.

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

3) عين بدون حساب $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}$ فسر النتيجة بيانيا .

4) أكتب معادلة المماس (T) لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

5) أثبت أن: $f(\alpha)=\alpha^2(1-\dfrac{1}{4}\alpha^2)$ ثم عين حصرا لـ $f(\alpha)$.

6) أحسب $f(1)$ ثم أرسم (T) و (C_f). (نقبل أن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها β حيث: $-0,8<\beta<-0,7$ و نأخذ $f(\alpha)=-0.53$).

7) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x)=2x+|m|$.

8) نعتبر الدالة H المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة : $H(x)=(x^2-2x+2)e^x$

أ) برهن أن H دالة أصلية للدالة $h:x\mapsto x^2e^x$ على $\mathbb{R}$.

ب) أحسب بدلالة α مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و حامل محور الفواصل والمستقيمين المعرفين بالمعادلتين : $x=\alpha$ و $x=-4$.

III) نعتبر الدالة K المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $K(x)=e^{-2|x|}-x^2.e^{-|x|}$

أ) بيّن أن K دالة زوجية.

ب) أشرح كيف يمكن رسم المنحنى (C_K) الممثل للدالة K ثم أرسمه في المعلم السابق.

انتهى الموضوع الثاني

www.ency-education.com

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التربية الوطنية

مديرية التربية لولاية تيبازة — المقاطعة الشرقية

تصحيح بكالوريا تجريبي في مادة الرياضيات دورة ماي2023 الموضوع الأول

التمرين الأول :05نقاط

1) الإجابة (ب)

$-y'+2y-2=0$ .....$(*)$ معناه: $-y'=-2y+2$ معناه: $y'=2y-2$ و منه : $a=2$ و $b=-2$

الحل الخاص للمعادلة التفاضلية $(*)$ هي الدالة التي تحقق: $f(x)=Ce^{2x}+1$ و $f(0)=2024$

أي $C+1=2024$ و منه $C=2023$ — 0, 75

و منه الحل الخاص للمعادلة التفاضلية $(*)$ هو الدالة التي تحقق : $f(x)=2023e^{2x}+1$

2) الإجابة (ج)

حلول المتراجحة : $9^x-4.3^x+4\le 0$ أي : $3^{2x}-4.3^x+4\le 0$ أي : $(3^x)^2-4.3^x+4\le 0$

نضع : $3^x=t$ تصبح المتراجحة $t^2-4.t+4\le 0$.

المعادلة $t^2-4.t+4=0$ تقبل حلا مضاعفا لأن : $\Delta=16-16=0$ و هو : $t_1=t_2=2$ — 0,75

و منه : $t^2-4.t+4\le 0$ تكافئ : $(t-2)^2\le 0$ و تكون المتراجحة محققة من أجل $t=2$

أي : $3^x=2$ أي : $xLn3=Ln2$ و منه : $x=\frac{Ln2}{Ln3}$ إذن حلول المتراجحة هي : $S=\left\{\frac{Ln2}{Ln3}\right\}$.

3) الإجابة (ب)

لدينا : $n\ge 2$ و $n\ge 3$ و منه : $n\ge 3$

المعادلة : $6.C_n^3+A_n^2=36$ تكافئ : $6.\frac{n!}{3!(n-3)!}+\frac{n!}{(n-2)!}=36$

تكافئ: $(n-2).(n-1).n+(n-1).n=36$

تكافئ : $(n^2-3n+2).n+(n^2-n)=36$ — 0,75

تكافئ: $n^3-2n^2+n-36=0$

الجذر : $n=4$ أي : $n^3-2n^2+n-36=(n-4).(n^2+2n+9)$

إما $n=4$ أو $n^2+2n+9=0$ و المعادلة ليس لها حلا في $\Re$ لأن $\Delta<0$ إذن قيمة $n=4$

4) الإجابة (ج)

$$m=\int_0^{Ln2}\frac{2e^{-x}}{2e^{-x}+1}dx$$
$$=\frac{-1}{ln2}\left[ln\left(2e^{-x}+1\right)\right]_0^{Ln2}$$
$$=\frac{-1}{ln2}[ln2-ln3]$$
$$=-1+\frac{\ln 3}{ln2}$$

1

5) الإجابة (أ)

$Z=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ فإن الشكل الاسي لـ Z هو : $Z=2e^{i\frac{\pi}{4}}$.

قيم n التي من أجلها $Z^n\in\Re$ معناه $\arg(Z^n)=k\pi$ أي $n\arg(Z)=k\pi$ أي : $n\frac{\pi}{4}=k\pi$ و منه $n=4k$ حيث k عدد طبيعي.

0,75

www.ency-education.com

التمرين الثاني : (05 نقاط)

1) أ) دراسة اتجاه تغير الدالة f :

الدالة f قابلة للإشتقاق على $[0,+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{2.\sqrt{1+x^2}-\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}.2x}{x^2+1}$

و منه: $f'(x)=\dfrac{2}{(x^2+1).\sqrt{1+x^2}}$ 0, 5

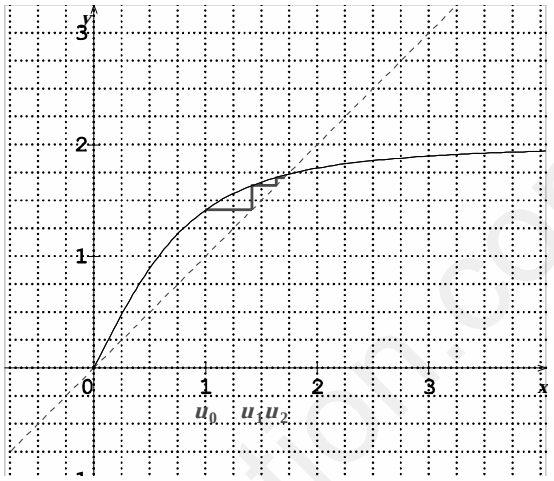
إذن مهما يكن $x\in[0,+\infty[$: $f'(x)>0$ و عليه الدالة f متزايدة تماما على $[0,+\infty[$.

ب) لدينا : $x\in[0,\sqrt{3}]$ أي: $0\le x\le\sqrt{3}$ و الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0,\sqrt{3}]$ لانها متزايدة تماما على المجال $[0,+\infty[$. 0, 25

إذن : $f(0)\le f(x)\le f(\sqrt{3})$.

لدينا: $f(0)=0$ ، $f(\sqrt{3})=\dfrac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$ و منه $f(x)\in[0,\sqrt{3}]$.

2) أ) تمثيل الحدود : u_0 ; u_1 ; u_2



0,7 5

ب) التخمين حول اتجاه تغير المتتالية:

بما ان الحدود مرتبة ترتيبا تصاعديا أي : $u_0<u_1<u_2<.....$ 0,25

فإن المتتالية متزايدة تماما على $\mathbb{N}$ و تتقارب عند العدد $\sqrt{3}$.

جـ) البرهان بالتراجع: $1\le u_n\le\sqrt{3}$

نضع $P(n)$ الخاصية من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $1\le u_n\le\sqrt{3}$

من أجل $n=0$ لدينا $u_0=1$

ولدينا $1\in[1,\sqrt{3}]$ فإن $1\le u_0\le\sqrt{3}$ إذن $P(0)$ محققة . 0,75

نفرض أن الخاصية $P(n)$ صحيحة أي $1\le u_n\le\sqrt{3}$ و نبيّن أن $P(n+1)$ صحيحة أي : $1\le u_{n+1}\le\sqrt{3}$.

لدينا من فرضية التراجع $1\le u_n\le\sqrt{3}$ و الدالة f متزايدة تماما على المجال $[1,\sqrt{3}]$

فإن : $f(1)\le f(u_n)\le f(\sqrt{3})$ أي: $\sqrt{2}\le u_{n+1}\le\sqrt{3}$ و $\sqrt{2}>1$ أي $1\le u_{n+1}\le\sqrt{3}$ و منه $P(n+1)$ صحيحة .

إذن الاستلزام صحيح و بالتالي من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $1\le u_n\le\sqrt{3}$

د) $u_{n+1}-u_n=\dfrac{2u_n}{\sqrt{1+u_n^2}}-u_n$ أي: $u_{n+1}-u_n=\dfrac{2u_n-u_n.\sqrt{1+u_n^2}}{\sqrt{1+u_n^2}}$

www.ency-education.com

أي : $u_{n+1}-u_n=\dfrac{u_n\left(2-\sqrt{1+u_n^2}\right)}{\sqrt{1+u_n^2}}$

0, 5

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $1\le u_n\le\sqrt{3}$ أي: $1\le u_n^2\le 3$ أي : $2\le u_n^2+1\le 4$ و منه :

$\sqrt{2}\le\sqrt{u_n^2+1}\le 2$ ومنه : $-2\le-\sqrt{u_n^2+1}\le-\sqrt{2}$ و منه: $2-2\le 2-\sqrt{u_n^2+1}\le 2-1$ أي : $0\le 2-\sqrt{u_n^2+1}\le 1$

ومنه : $2-\sqrt{u_n^2+1}>0$

و بالتالي $u_{n+1}-u_n>0$ إذن : (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

0, 25

بما أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما و محدودة من الأعلى بـ $\sqrt{3}$ فهي متقاربة.

3) أ) نبرهن أن (v_n) متتالية هندسية .

(v_n) متتالية هندسية معناه $v_{n+1}=qv_n$

0, 5

لدينا : $v_{n+1}=\dfrac{u_{n+1}^2}{3-u_{n+1}^2}=\dfrac{\frac{4u_n^2}{1+u_n^2}}{3-\frac{4u_n^2}{1+u_n^2}}=\dfrac{\frac{4u_n^2}{1+u_n^2}}{\frac{-u_n^2+3}{1+u_n^2}}=\dfrac{4u_n^2}{-u_n^2+3}=4\left(\dfrac{u_n^2}{3-u_n^2}\right)$ أي $v_{n+1}=4v_n$ إذن :

و منه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=4$ و حدها الأول $v_0=\dfrac{1}{2}$.

0,25

- عبارة v_n بدلالة n: $v_n=v_0.q=\dfrac{1}{2}4^n$ و منه : $v_n=\dfrac{1}{2}(+4)^n$.

ب) عبارة u_n بدلالة n: $v_n=\dfrac{u_n^2}{3-u_n^2}$ أي : $3v_n-v_n.u_n^2=u_n^2$ أي: $3v_n=v_n.u_n^2+u_n^2$

$u_n^2.(1+v_n)=3v_n$ و منه : $u_n^2=\dfrac{3v_n}{1+v_n}$ أي : $u_n=\pm\sqrt{\dfrac{3v_n}{1+v_n}}$.

0,25

- بما أن : $1\le u_n\le\sqrt{3}$ فإن : $u_n=\sqrt{\dfrac{3v_n}{1+v_n}}$ إذن : $u_n=\sqrt{\dfrac{\frac{3}{2}.(4)^n}{1+\frac{1}{2}.(4)^n}}$.

- حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$: $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{\dfrac{\frac{3}{2}.(4)^n}{1+\frac{1}{2}.(4)^n}}$ أي: $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{\dfrac{3}{2.4^{-n}+1}}$

0,25

أي: $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{\dfrac{3}{2.e^{-nLn4}+1}}=\sqrt{3}$

لأن : $\lim\limits_{n\to+\infty}e^{-nLn4}=0$ و منه : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\sqrt{3}$.

جـ) حساب بدلالة n المجموع S_n : $S_n=\dfrac{3}{3-u_0^2}+\dfrac{3}{3-u_1^2}+\cdots+\dfrac{3}{3-u_n^2}$

لدينا: $v_n=\dfrac{u_n^2}{3-u_n^2}$ أي: $v_n+1=\dfrac{3}{3-u_n^2}$ و منه : $S_n=(v_0+1)+(v_1+1)+\cdots+(v_n+1)$

أي: $S_n=v_0+v_1+\cdots+v_n+(n+1)$ أي: $S_n=\dfrac{v_0}{q-1}.\left(q^{n+1}-1\right)+(n+1)$

0,5

أي: $S_n=\dfrac{\frac{1}{2}}{3}.\left(4^{n+1}-1\right)+(n+1)$ و منه : $S_n=\dfrac{1}{6}.\left(4^{n+1}-1\right)+(n+1)$

ency-education.com/exams

التمرين الثالث : (04 نقاط)

U_1 : السحب على التوالي دون إرجاع الكرتين ، U_2 : السحب على التوالي مع إرجاع الكرتين .

A "سحب كرتين من نفس اللون إما من الصندوق الأول أو من الصندوق الثاني.

عدد الحالات الممكنة لسحب الكرتين من الصندوق U_1 هو : $A_8^2 = 56$.

عدد الحالات الممكنة لسحب الكرتين من الصندوق U_2 هو عدد قوائم : $5^2 = 25$.

0, 5 $P(A) = P(R\cap U_1) + P(V\cap U_1) + P(R\cap U_2) + P(V\cap U_2)$

أي: $P(A) = \frac{1}{2}\left(\frac{A_5^2 + A_3^2}{A_8^2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{3^2+2^2}{5^2}\right)$ و منه: $P(A) = \frac{689}{1400}$.

B "سحب كرتين تحملان نفس الرقم بمعنى كرتين تحملان رقم 1 من U_1 أو كرتين تحملان الرقم 0 من U_1 أو كرتين تحملان الرقم 0 من U_2 أو 1 من U_2 أو 2 من U_2 .

0, 5 $P(B) = \frac{1}{2}\left(\frac{A_5^2 + A_2^2}{56} + \frac{3^2+1^2+1^2}{25}\right)$ و منه : $P(B) = \frac{583}{1400}$.

2) نبيّن أن : $P(A\cap B) = \frac{37}{175}$.

$A\cap B$ تعني سحب كرتين من نفس اللون و من نفس الرقم و من U_1 أو U_2.

0,5 $P(A\cap B) = \frac{1}{2}\left(\frac{A_5^2 + A_2^2}{56} + \frac{1^2+2^2+1^2+1^2}{25}\right)$ و منه : $P(A\cap B) = \frac{37}{175}$.

الحدثان A و B مستقلان معناه : $P(A\cap B) = P(A).P(B)$ أي: $P(A).P(B) = \frac{689}{1400}.\frac{583}{1400}$ أي:

0.5 $P(A).P(B) = \frac{401687}{1960000} \simeq 0,20$ و $P(A\cap B) = \frac{37}{175} \simeq 0,21$.

إذن: $P(A\cap B) \neq P(A).P(B)$ و منه : الحدثان A و B غير مستقلان.

0.25 3) ليكن الحدث C : "سحب كرتين من لونيين مختلفين "

$P(C) = \frac{1}{2}\left(\frac{2(A_5^1\times A_3^1)}{56} + \frac{2(3^1\times 2^1)}{25}\right) = \frac{711}{1400}$.

طريقة 2: $P(C) = P(\overline{A}) = 1 - P(A) = \frac{711}{1400}$.

$P_C(U_1) = \frac{P(U_1\cap C)}{P(C)} = \frac{15}{56}\times\frac{1400}{711}$. حيث: $P(U_1\cap C) = \frac{2(A_5^1\times A_3^1)}{56}\times\frac{1}{2}$

0, 5 $= \frac{15}{56}$

و منه : $P_C(U_1) = \frac{125}{237}$

4) X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة مجموع رقمي الكرتين المسحوبتين من الصندوق U_1 .

0, 5 قيم المتغير العشوائي هي: $X(\Omega) = \{0,1,2,3\}$

$P(X=0) = \frac{A_2^2}{56} = \frac{2}{56}$ ، $P(X=1) = \frac{2(A_2^1\times A_5^1)}{56} = \frac{20}{56}$ ، $P(X=1) = \frac{2(A_2^1\times A_1^1) + A_3^2}{56} = \frac{24}{56}$ ،

$P(X=1) = \frac{2(A_1^1\times A_3^1)}{56} = \frac{10}{56}$.

قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X :

0,75

قيم X	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{2}{56}$	$\frac{20}{56}$	$\frac{24}{56}$	$\frac{10}{56}$

ency-education.com/exams

حساب الامل الرياضياتي: $E(X)=\sum_{i=1}^{i=4} X_i.P_i=\frac{20}{56}+\frac{48}{56}+\frac{30}{56}$ أي: $E(X)=\frac{98}{56}$ و منه : $E(X)=\frac{7}{4}$. 0,25

$E(-3X+7)=-3\left(\frac{7}{4}\right)+7=\frac{7}{4}$. 0,25

التمرين الرابع : (07 نقاط)

I) لتكن الدالة العددية g المعرفة والمتزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=(x\ln x)^2+\ln x+1$.

1) نبيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $0,32<\alpha<0,33$: 0, 5

لدينا : الدالة g متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$ فهي رتيبة تماما و مستمرة.

و : $g(0,32)\approx -0.01$ ، $g(0,33)\approx 0.03$ و $g(0,32).g(0,32)<0$

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α و يحقق: $g(\alpha)=0$.

جدول تغيرات الدالة g :

$\lim_{x\to 0^{>}} g(x)=-\infty$

$\lim_{x\to +\infty} g(x)=+\infty$

x	0		a		$+\infty$
$g'(x)$			$+$		
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

إشارة $g(x)$: 0,25

x	0		a		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0;1[\cup]1;+\infty[$ بـ : $f(x)=x-\frac{1}{x.\ln x}$

1) أ) $\lim_{x\to 0^{>}} f(x)=\lim_{x\to 0^{>}}\left(x-\frac{1}{x.\ln x}\right)=+\infty$ لأن : $\lim_{x\to 0^{>}} x.\ln x=0^{-}$ و $\lim_{x\to 0^{>}}\frac{-1}{x.\ln x}=+\infty$. 0,25

لدينا :

x	0		1		$+\infty$
$\ln x$		$-$	0	$+$	
$x\ln x$		$-$	0	$+$	

نستنتج أن $x=0$ مستقيم مقارب موازي لحامل محور التراتيب . 0,25

ب) $\lim_{x\to 1^{<}} f(x)=\lim_{x\to 1^{<}}\left(x-\frac{1}{x\ln x}\right)=+\infty$ 0,25

$\lim_{x\to 1^{>}} f(x)=\lim_{x\to 1^{>}}\left(x-\frac{1}{x.\ln x}\right)=-\infty$ 0,25

نستنتج أن $x=1$ مستقيم مقارب موازي لحامل محور التراتيب . 0,25

$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}\left(x-\frac{1}{x.\ln x}\right)=+\infty$. 0,25

2) أ) الدالة f قابلة للإشتقاق على المجالين $]0;1[$ و $]1;+\infty[$ دالتها المشتقة f' حيث: $f'(x)=1+\frac{1+\ln x}{(x.\ln x)^2}$ 0, 5

أي: $f'(x)=\frac{(x.\ln x)^2+\ln x+1}{(x.\ln x)^2}$ و منه : $f'(x)=\frac{g(x)}{(x.\ln x)^2}$.

www.ency-education.com

0,25

ب) إشارة f' من إشارة $g(x)$:

x	0		a		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	

0,25

الدالة f متناقصة تماما على المجال $]0;\alpha]$ و متزايدة تماما على المجالين $[\alpha;1[$ و $]1;+\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f :

0,25

x	0		a		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖ $+$		$+$
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(a)=3$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0 ↗ $+\infty$

3) نبيّن أن المستقيم (Δ) مقارب مائل: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x.lnx}\right)=0$ لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty} x.lnx=+\infty$.

إذن $y=x$ مستقيم مقارب مائل بجوار $+\infty$.

- **دراسة الوضع النسبي بين** (C_f) **و** (Δ)

0,25

x	0		1		$+\infty$
$-x$	0	$-$		$-$	
lnx		$-$	0	$+$	
$f(x)-x$	‖	$+$	‖	$-$	
	‖		‖		

<u>ومنه :</u> على المجال $]0;1[$ (C_f) يقع فوق (Δ) وعلى المجال $]1;+\infty[$ (C_f) يقع تحت (Δ).

4) $y=x+\beta$ تعيين β حتى يكون (T) مماسا للمنحنى (C_f) معناه : $f'(a)=1$

أي: $\frac{(a.lna)^2+lna+1}{(a.lna)^2}=1$ أي : $lna+1=0$ أي: $lna=-1$ و منه : $a=e^{-1}$.

0,25

$f(e^{-1})=e^{-1}-\frac{1}{e^{-1}.lne^{-1}}=e^{-1}+\frac{1}{e^{-1}}$ و منه : $f(e^{-1})=e^{-1}+e$.

0,25

$y=f'(e^{-1}).(x-e^{-1})+e^{-1}+e$ أي: $y=x-e^{-1}+e^{-1}+e$ و منه : $y=x+e$ هي معادلة المماس (T)

0,25

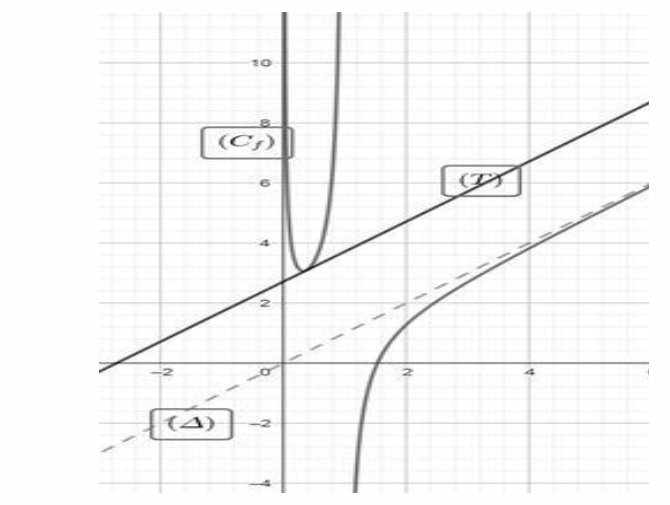
أي : $\beta=e$ و منه نقطة التماس $A(e^{-1},e^{-1}+e)$.

ency-education.com/exams

(5

0, 5

0,25



6) تعيّين قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة $x=e^{\frac{1}{x.m}}$ حلين متمايزين:

لدينا : $x=e^{\frac{1}{x.m}}$

من أجل $x>0$: $x\,lnx=\frac{x}{x.m}$

0,25

من أجل $x\in]0;1[\cup]1;+\infty[$: $\frac{1}{x\,lnx}=m$

أي : $x-\frac{1}{x.lnx}=x-m$.

ومنه : $f(x)=x-m$.

0,25

حلول المعادلة (I) هو ايجاد فواصل النقط المشتركة بين (C_f) و المستقيم $y=x-m$ أي: $\begin{cases} y=f(x) \\ y=x-m \end{cases}$.

المعادلة تقبل حلين متمايزين معناه : $-m>e$ أي : $m<-e$ أي: $m\in]-\infty,-e[$.

7) مساحة الحيّز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) و المستقيمين : $x=3$ ، $x=4$:

0, 5

$A=\int_3^4(x-f(x))\,dx=\int_3^4\left(\frac{1}{x.lnx}\right)dx$ أي: $A=\int_3^4\left(\frac{1}{\frac{x}{lnx}}\right)dx$ أي: $A=\left[ln(lnx)\right]_3^4$ أي: $A=ln(ln4)-ln(ln3)$

ومنه : $A=ln\left(\frac{ln4}{ln3}\right)cm^2$.

I) لتكن الدالة h المعرفة على المجال $]0;1[\cup]1;+\infty[$ بـ : $h(x)=\left[f(x)\right]^2$.

0,25

أ) الدالة h قابلة للاشتقاق على المجالين $]0;1[$ و $]1;+\infty[$ و دالتها المشتقة h' حيث: $h'(x)=2.f'(x).f(x)$.

إشارة $h'(x)$ من إشارة $f(x)$ و $f'(x)$.

0,25

x	0		a		1		λ		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$		$+$	
$f(x)$		$+$		$+$	‖	$-$	0	$+$	
$h'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	

0,25

الدالة h متناقصة تماما على المجال $]0;\alpha]$ و $]1;\lambda]$ و متزايدة تماما على المجالين $[\alpha;1[$ و $]\lambda;+\infty[$.

www.ency-education.com

0,25

جدول التغيرات:

x	0		a		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	$+$
$f(x)$		$+$		$+$	‖	$-$ 0	$+$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$ 0	$+$
$h(x)$	$+\infty$	↘	9	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘ 0	↗ $+\infty$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} h(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} \left[f(x) \right]^2 = +\infty \quad ، \quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} h(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left[f(x) \right]^2 = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} h(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ \mid >}} \left[f(x) \right]^2 = +\infty \quad ، \quad \lim_{x \to +\infty} h(x) = \lim_{x \to +\infty} \left[f(x) \right]^2 = +\infty \quad .$$

ency-education.com/exams

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

مديرية التربية لولاية تيبازةالمقاطعة الشرقية

الشعبة : علوم تجريبية تصحيح الموضوع الثاني بكالوريا تجربي في مادة الرياضيات دورة ماي 2023

التمرين الأول :05نقاط

1) أ- لدينا $u_0=\alpha$ $u_{n+1}=(\ln 2)u_n+\ln\left(\frac{e^2}{4}\right)$ تعين α حتى تكون المتتالية ثابتة معناه $u_{n+1}=u_n=\cdots=u_0=\alpha$ ومنه $\alpha=(\ln 2)\alpha+\ln\left(\frac{e^2}{4}\right)$ $\alpha=\frac{\ln\left(\frac{e^2}{4}\right)}{1-\ln(2)}=\frac{\ln\left(\left(\frac{e}{2}\right)^2\right)}{\ln(e)-\ln(2)},\ \alpha=\frac{2\ln\left(\frac{e}{2}\right)}{\ln\left(\frac{e}{2}\right)},\alpha=2$ إذن $\alpha=2$.	0.25×2
2) نضع $u_0=3$ ومنه $\begin{cases}u_0=3\\ u_{n+1}=(\ln 2)u_n+\ln\left(\frac{e^2}{4}\right)\end{cases}$ أ- برهان بالتراجع : نسمى $P_{(n)}$ الخاصية من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $2<u_n\le 3$ نتحقق من أجل $p_{(0)}$ لدينا $u_0=3$ ومنه $2<u_0<3$ محققة	0.25
نفرض صحة الخاصية $p_{(n)}$ من أجل n عدد طبيعي كيفي ،ثم نبرهن صحتها من اجل $(n+1)$. لدينا من فرضية التراجع $2<u_n\le 3$ ومنه	0.25

www.ency-education.com

$$2\ln 2 < (\ln 2)u_n \le 3\ln 2$$

$$2\ln 2 + \ln\left(\frac{e^2}{4}\right) < (\ln 2)u_n + \ln\left(\frac{e^2}{4}\right) \le 3\ln 2 + \ln\left(\frac{e^2}{4}\right)$$

0.25×2

$\ln(2^2) + \ln\left(\frac{e^2}{4}\right) < u_{n+1} \le \ln(2^3) + \ln\left(\frac{e^2}{4}\right)$ إذن $2 < u_{n+1} \le 3$.

$$\ln\left(4 \times \frac{e^2}{4}\right) < u_{n+1} \le \ln\left(2^3 \times \frac{e^2}{4}\right)$$

$$2 < u_{n+1} \le 2 + \ln(2) \le 3$$

حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع (حسب الخاصية الوراثية) فإنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن :

$2 < u_n \le 3$.

$$u_{n+1} - u_n = (\ln 2)u_n + \ln\left(\frac{e^2}{4}\right) - u_n$$

ب-حساب $u_{n+1} - u_n = (\ln 2)u_n + \ln(e^2) - \ln(4) - u_n$ ..

0.5

$$u_{n+1} - u_n = (\ln 2 - 1)u_n + 2 - 2\ln 2 = (\ln 2 - 1)u_n - 2(-1 + \ln 2)$$

$$u_{n+1} - u_n = (\ln 2 - 1)(u_n - 2)$$

ومنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_{n+1} - u_n = (\ln 2 - 1)(u_n - 2)$.

ت-دراسة اتجاه تغير المتتالية (v_n) :

لدينا $u_{n+1} - u_n = (\ln 2 - 1)(u_n - 2)$ و $2 < u_n \le 3$ فإن $u_{n+1} - u_n < 0$ من أجل $(\ln 2 - 1) < 0$

0.25 كل عدد طبيعي $\mathbb{N}$ اذن المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ . .....

0.25 بما ان المتتالية (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة . .....

بما ان المتتالية (u_n) متقاربة فإن : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$

0.25 نحل المعادلة : $l = (\ln 2)l + \ln\left(\frac{e^2}{4}\right)$ أي $l = (\ln 2)l + 2 - 2\ln 2$ أي : $l(1 - \ln 2) = 2(1 - \ln 2)$

ومنه: $l = 2$

www.ency-education.com

أ- اثبات ان المتتالية (v_n) متتالية هندسية : حساب v_{n+1} :

0.75

$$v_n = 2u_n - 4;\ v_{n+1} = 2u_{n+1} - 4 \quad ;\ v_{n+1} = 2\left((\ln 2)u_n + \ln\left(\frac{e^2}{4}\right)\right) - 4$$

...

$$v_{n+1} = 2\left((\ln 2)u_n + 2 - \ln 4\right) - 4\ ;\ v_{n+1} = 2(\ln 2)u_n + 4 - 4\ln 2 - 4;\ v_{n+1} = \ln 2\left(2u_n - 4\right)$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \ln 2$ وحدها الأول $v_0 = 2$ . .....

ب-كتابة عبارة v_n بدلالة n :

0.25

بما أن (v_n) متتالية هندسية فإن : $v_n = 2(\ln 2)^n$ ثم كتابة u_n بدلالة v_n

$$v_n = 2u_n - 4 \quad ;$$

$$2u_n = v_n + 4 \qquad ; \qquad u_n = \frac{1}{2}v_n + 2$$

0.25

بالتعويض نجد $u_n = (\ln 2)^n + 2$.

0.25

ت- حساب : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left[(\ln 2)^n + 2\right] = 2$ لأن $\lim\limits_{n\to+\infty}(\ln 2)^n = 0$.

6) حساب المجموع : $s_n = \dfrac{1}{u_0 - 2} + \dfrac{\ln 4}{u_1 - 2} + \dfrac{(\ln 4)^2}{u_2 - 2} + \cdots + \dfrac{(\ln 4)^n}{u_n - 2}$

0.25

تحقق أن $\dfrac{(\ln 4)^n}{u_n - 2} = 2^n$

$$v_n = 2u_n - 4\ ;\ \frac{v_n}{2} = u_n - 2\ ;\ \frac{1}{\frac{v_n}{2}} = \frac{1}{u_n - 2}\ ;$$

لدينا :

$$\frac{1}{u_n - 2} = \frac{2}{v_n} = \frac{2}{2(\ln 2)^n}\ ; \qquad \frac{(\ln 4)^n}{u_n - 2} = \frac{(2\ln(2))^n}{(\ln 2)^n} = \frac{2^n(\ln 2)^n}{(\ln 2)^n} = 2^n$$

0.5

المجموع

$$S_n = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n = \frac{1}{1-2}\left(1 - 2^{n+1}\right)$$

$$S_n = -1 + 2^{n+1}$$

www.ency-education.com

التمرين الثاني 04 نقاط

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$:

$$\overline{z_1}-1+3i=0\,;z_1=1+3i$$

$$\Delta=(-10)^2-4(50)(1)=-100\ ;\ \Delta=100i^2$$

0.5

$$z_2=5+5i\quad;\ z_3=5-5i\ ;S=\{1+3i\,;5+5i\,;5-5i\}$$

2) أ- كتابة كل من $z_A\,;\,z_B$ على الشكل الأسي :

$$|z_A|=\sqrt{(5)^2+(5)^2}=5\sqrt{2}$$

0.25

$$\arg(z_A)=\theta\begin{cases}\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}\quad\theta=\frac{\pi}{4}+2k\pi\,(k\in\mathbb{Z})$$

ومنه $z_A=5\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

$$|z_B|=|\overline{z_A}|=\sqrt{(5)^2+(-5)^2}=5\sqrt{2}$$

أي

$$\arg(z_B)=\arg(\overline{z_A})=\theta\begin{cases}\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\theta=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}\quad\theta=-\frac{\pi}{4}+2k\pi\,(k\in\mathbb{Z})$$

0.25

$$z_B=5\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

0.25

ب) تعليم النقط :

جـ) طويلة العدد المركب $\dfrac{z_A-z_C}{z_B-z_C}$

$$\left|\frac{z_A-z_C}{z_B-z_C}\right|=\left|\frac{(5+5i)-(1+3i)}{(5-5i)-(1+3i)}\right|=\left|\left(\frac{4+2i}{4-8i}\right)\frac{4+8i}{4+8i}\right|=\left|\frac{16-16+40i}{16+64}\right|$$

0.25×2

$$\left|\frac{z_A-z_C}{z_B-z_C}\right|=\left|\frac{1}{2}i\right|=\frac{1}{2}$$

عمدة العدد المركب: $\dfrac{z_A-z_C}{z_B-z_C}$: $\arg\left(\dfrac{z_A-z_C}{z_B-z_C}\right)=\arg\left(\dfrac{1}{2}i\right)=\dfrac{\pi}{2}$

www.ency-education.com

0.25

د) $\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}$; $\left(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CA}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$\left|\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}\right| = \frac{CA}{CB} = \frac{1}{2}$

0.25

المثلث ABC قائم في C

و $CB = 2CA;\ CA = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$

مساحة المثلث ACB هي $\frac{CB \times CA}{2} = \frac{2\left(2\sqrt{5}\right)\left(2\sqrt{5}\right)}{2} = 20\,u.a$.

3)أ) كتابة العدد a على الشكل الجبري:

0.25

$$a = \left(\frac{-z_B}{5\sqrt{2}}\right)^{2025} - \left(\frac{z_A}{5\sqrt{2}}\right)^{2021}$$
$$= -e^{i.\frac{-\pi}{4}} - e^{i\frac{5\pi}{4}}$$
$$= -\left(\cos\frac{\pi}{4} - i.\sin\frac{\pi}{4}\right) - \left(\cos\frac{5\pi}{4} + i.\sin\frac{5\pi}{4}\right)$$
$$= \frac{-\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$a = \sqrt{2}\,i$$

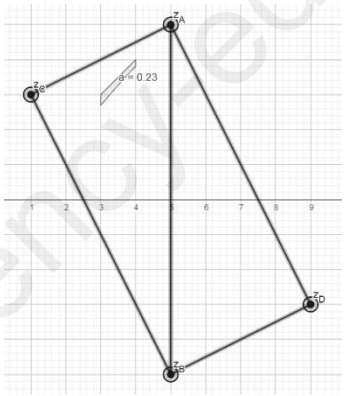
0.25

ب) تعيين قيم n حتى يكون a^n تخيليا صرفا:

a^n تخيليا صرفا معناه : $\arg\left(a^n\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi$

لدينا : $a = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{2}}$ معناه : $a^n = \sqrt{2}\,e^{i\frac{n\pi}{2}}$ معناه : $\frac{n\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ و منه: $n = 1 + 2k$

3) أ- تعين z_D حتى يكون الرباعي $ABDC$ مستطيل معناه $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB}$ و منه



$$z_D - z_A = z_B - z_C$$

$$z_D = z_B - z_C + z_A$$

ومنه $z_D = 5 - 5i - 1 - 3i + 5 + 5i$

$$z_D = 9 - 3i$$

0.25

ب- لاحقة z_I منتصف القطعة المستقيمة $[BC]$

$$z_I = \frac{z_B + z_C}{2} = \frac{1 + 3i + 5 - 5i}{2} = 3 - i$$

0.25

$\frac{z_D - z_O}{z_I - z_O} == \frac{9 - 3i}{3 - i} = 3$ أي : $\overrightarrow{OD} = 3\overrightarrow{OI}$

www.ency-education.com

تبين أن نقاط على استقامية ومنه النقاط O ، I ، D في استقامية واحدة	**0.25**
$\lvert -i.z+i-3\rvert=\lvert z-5-5i\rvert$	
طبيعة (Γ) حيث $\left\lvert -i.\left(z+\frac{i-3}{-i}\right)\right\rvert=\lvert -i\rvert\left\lvert z+\frac{i-3}{-i}\right\rvert=\lvert z-1-3i\rvert$ حور القطعة $[CA]$	0.25
$\lvert z-(3+i)\rvert=\lvert z-(5+5i)\rvert$; $\lvert z-z_C\rvert=\lvert z-z_A\rvert$	
$CM=AM$	0.25
الإنشاء:	

التمرين الثالث 04 نقاط	
عدد الحالات الممكنة هو : $C_8^3=\frac{8!}{3!(8-3)!}$ ومه $C_8^3=\frac{8\times7\times6}{3\times2}=56$.	0.25
-حساب $P(A)$: $P(A)=\frac{10}{56}=\frac{5}{28}$; $P(A)=\frac{C_5^3}{C_8^3}=\frac{\frac{5!}{3!(5-3)!}}{56}$	0.5
حساب $P(B)$: $P(B)=\frac{5\times3}{56}=\frac{15}{56}$; $P(B)=\frac{C_5^1\times C_3^2}{C_8^3}$	0.5
حساب $P(C)$:نلاحظ أن الحدث C هو الحدث المعاكس لـ A ومنه $P(C)=1-P(A)$ $P(C)=1-\frac{5}{28}$ $P(C)=\frac{23}{28}$	0.5
2) القيم الممكنة لـ $X=\{-5;10;-20\}$	0.25×3
حساب : $p(X=-5)=\frac{2A_n^1\times A_5^1}{A_{n+5}^2}=\frac{10n}{(n+4)(n+5)}$	
$p(X=10)=\frac{A_n^2}{A_{n+5}^2}=\frac{n(n-1)}{(n+4)(n+5)}$	0.25
$p(X=-20)=\frac{A_5^2}{A_{n+5}^2}=\frac{20}{(n+4)(n+5)}$	

www.ency-education.com

قانون الاحتمال

0.5

X_i	-20	-5	10
$p(X=X_i)$	$\frac{20}{(n+4)(n+5)}$	$\frac{10n}{(n+4)(n+5)}$	$\frac{n(n-1)}{(n+4)(n+5)}$
$p(X=X_i)X_i$	$\frac{-400}{(n+4)(n+5)}$	$\frac{-50n}{(n+4)(n+5)}$	$\frac{10n^2-10n}{(n+4)(n+5)}$

الأمل الرياضياتي $E(x)=\frac{10n^2-60n-400}{(n+4)(n+5)}$. 0.25

قيم n حتى تكون اللعبة عادلة اذا كان : $E(x)=0$ ، $10n^2-60n-400=0$ ومنه : $n=10$. 0.25

قيم n حتى تكون اللعبة في صالح اللاعب : $E(X)>0$ ومنه $n>10$. 0.25

يمكن اختيار عدد الكريات السوداء احدى عشرة كرية على الأقل لكي تكون اللعبة مربحة.

التمرين الرابع 07 نقاط

I)

1) – بقراءة بيانية بما أن (Γ) فوق (Δ) من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن $e^x-(x+1)\geq 0$. 0.25

2) أ– دراسة اتجاه تغير الدالة g :

حساب $g'(x)$: $g'(x)=2x+1-e^x=-(e^x-(x+1))$ ، $g'(x)\leq 0 \;;\; x\in\mathbb{R}$ 0.5

ومنه الدالة g متناقصة تماما على كل من المجالين $]-\infty;0]$ و $[0;+\infty[$.

ب– برهان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $-2.2<\alpha<-2.1$

(مبرهنة القيم المتوسطة)

www.ency-education.com

0.25 بما أن الدالة g مستمرة و رتيبة تماما لأنها متناقصة تماما على المجال $]-2.2;-2.1[$

0.25 $g(-2.2)\times g(-2.1)<0$ $\begin{cases} g(-2.2)=0.11 \\ g(-2.1)=-0.02 \end{cases}$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة

المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-2.2<\alpha<-2.1$ و $g(\alpha)=0$.

0.25 جـ- جدول إشارة $g(x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x :

x	$-\infty$	a	$+\infty$
$g(x)$	$+$	0	$-$

II)

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{2x}-x^2e^x\right)=0$

0.5 إذن المنحى (C_f) يقبل مستقيم مقارب موازي لمحور الفواصل بجوار $-\infty$ معادلته $y=0$

ب-

0.25 $$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(e^{2x}-x^2e^x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left[e^{2x}\left(1-\frac{x^2}{e^x}\right)\right]=+\infty$$

1) أ- حساب $f'(x)$: الدالة f معرفة وتقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ دالتها المشتقة

0.25 $$f'(x)=2e^{2x}-2x.e^x-x^2.e^x=2e^x\left(-\frac{1}{2}x^2-x+e^x\right)$$

$$f'(x)=-2e^x.g(x)$$

0.25 إشارة $f'(x)$ من إشارة $-g(x)$

x	$-\infty$	a	$+\infty$
$g(x)$	$+$	0	$-$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

ب) اتجاه تغير : جدول الإشارة $f'(x)$

0.25 الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;\alpha]$ و الدالة f متزايدة تماما على المجال $[\alpha;+\infty[$.

www.ency-education.com

0.25

– جدول تغيرات :

x	$-\infty$		a		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$f(a)$	$\nearrow$	$+\infty$

0.25×2

2) تعين $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h+\alpha)-f(\alpha)}{h}=f'(\alpha)=0$.

منحنى (C_f) يقبل مماس أفقي عند النقطة ذات الفاصلة $x_\alpha=\alpha$ معادلته $y=f(\alpha)$.

0.25

3) معادلة المماس (T) عند 0 : $\left.\begin{array}{l} f'(0)=2 \\ f(0)=1 \end{array}\right\} y=2x+1\cdots(T)$.

0.25

$$\begin{cases} g(\alpha)=0\ ;\ e^{\alpha}=\dfrac{1}{2}\alpha^2+\alpha \\ f(\alpha)=e^{2\alpha}-\alpha^2e^{\alpha}=\left(\dfrac{1}{2}\alpha^2+\alpha\right)^2-\alpha^2\left(\dfrac{1}{2}\alpha^2+\alpha\right) \\ f(\alpha)=\alpha^2\left(1-\dfrac{1}{4}\alpha^2\right) \end{cases}$$

4) إثبات أن

0.25

الحصر

$$-2.2<\alpha<-2.1\ ;\ (-2.1)^2<\alpha^2<(-2.2)^2$$

$$1-\frac{(-2.2)^2}{4}<1-\frac{1}{4}\alpha^2<1-\frac{(-2.1)^2}{4}$$

$$(-2.1)^2\left(1-\frac{(-2.2)^2}{4}\right)<\alpha^2\left(1-\frac{1}{4}\alpha^2\right)<(-2.2)^2\left(1-\frac{(-2.1)^2}{4}\right)$$

$$-0.9261<f(\alpha)<-0.4961$$

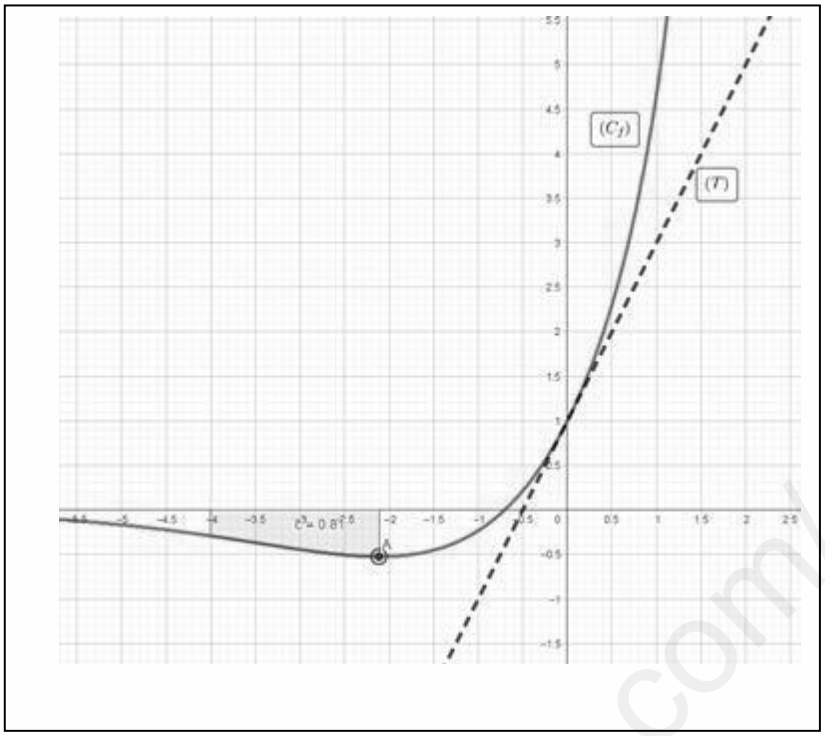
نأخذ $f(\alpha)=-0,53$

www.ency-education.com

0.25

6) حساب $f(1)$ ومنه $f(1)=e^2-e$

الرسم :



0.25

7) مناقشة بيانية :

1) $f(x)=2x+|m|.....(I)$ تعني : $\begin{cases} f(x)=2x+|m|.....(I) \\ y=f(x) \end{cases}$

هو ايجاد فواصل النقط المشتركة بين (C_f) و المستقيم (Δ_m) معادلته : $y=2x+|m|$

إذا كان $|m|<1$ معناه $-1\le m\le 1$ فإن المعادلة (I) ليس لها حلا في $\Re$.

إذا كان $|m|=1$ معناه $m=1$ أو $m=-1$ فإن المعادلة (I) تقبل حلا مضاعفا معدوما.

0.25

إذا كان $|m|>1$ أي: $m\in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ فإن المعادلة (I) تقبل حلين مختلفين في الإشارة .

8) أ) حساب $H'(x)$ الدالة H معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي :

$$H'(x)=(2x-2+x^2-2x+2)e^x$$

H أصلية الدالة h على $\mathbb{R}$. ; $H'(x)=h(x)$ $\quad H'(x)=x^2e^x$

0.25×2

www.ency-education.com

ب) حساب مساحة الحيز بدلالة α .

0.5

$$A=\int_{-4}^{\alpha}\left(0-f(x)\right)=-\frac{1}{2}\int_{-4}^{\alpha}2e^{2x}dx+\int_{-4}^{\alpha}x^{2}e^{x}dx$$

$$A=\left[H(x)-\frac{1}{2}e^{2x}\right]_{-4}^{\alpha}$$

$$A=\left[\frac{-1}{2}e^{2\alpha}+\left(\alpha^{2}-2\alpha+1\right)e^{\alpha}+\frac{1}{2}e^{-8}-26e^{-4}\right]$$

III) أ- إثبات أن الدالة K زوجية : من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ فإن $-x\in\mathbb{R}$

0.25

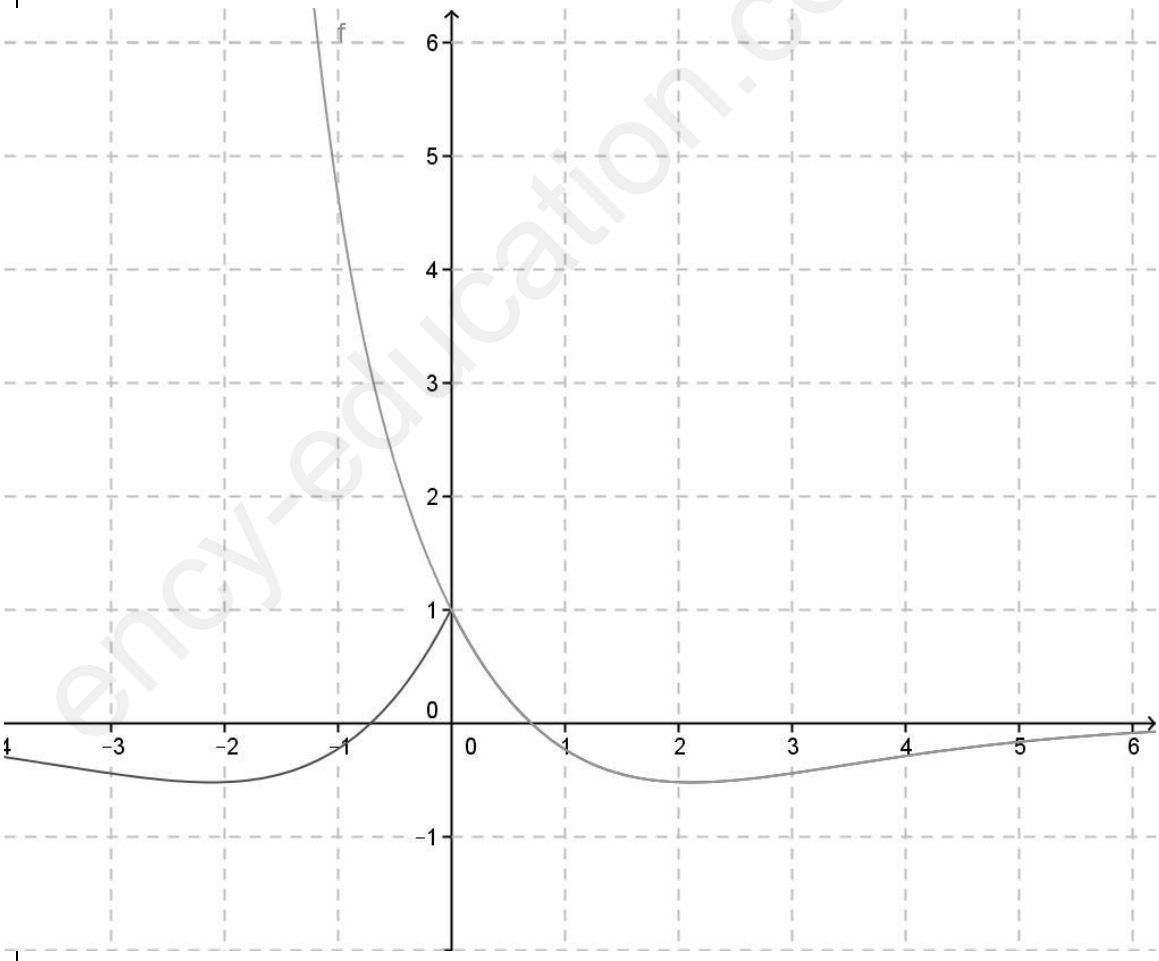
حساب $K(-x)=K(x)$

ب- كيفية إنشاء (C_K) :

على المجال $]-\infty;0]$ المنحنى (C_K) ينطبق على (C_f).

0.25

على المجال $[0;+\infty[$ $K(x)=f(-x)$ و عليه المنحنى (C_K) يناظر (C_f) بالنسبة لمحور التراتيب.



ency-education.com/exams

www.ency-education.com