الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

ثانوية الحسن ابن الهيثم النزلة — المستوى : 3 ثانوي

الأستاذ: بوقفة عبد الفتاح — شعبة : ع ت - ت ر - ر

الإختبار التجريبي رقم 4 (Bac 2024)

التمرين 01 (4 نقاط)

يحتوي كيس على أربع كريات بيضاء و ثلاث كريات سوداء كل الكريات متماثلة وغير متمايزة عند اللمس نسحب من الصندوق أربع كريات في آن واحد

1. أحسب احتمال الحدث A : " الحصول على الأقل على كرية بيضاء "
2. ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب العدد $ax+y$
   حيث x يمثل عدد الكريات البيضاء و y يمثل عدد الكريات السوداء و a عدد حقيقي
   أ/ عين قيم المتغير العشوائي X
   ب/ عرف قانون احتمال المتغير العشوائي X ، ثم أحسب أمله الرياضي $E(X)$ بدلالة a
   جـ/ عين قيمة العدد الحقيقي a حتى يكون $E(X)=\frac{32396}{7}$
3. نسحب الآن من هذا الكيس أربع كريات على التوالي بالإرجاع
   أحسب احتمال الحدث B : " الحصول على الأقل على كرية بيضاء "

التمرين 02 (4 نقاط)

I) لتكن في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية : $z^2-(3+i)z+4=0 \ldots (E)$

1. عين الجذرين التربيعيين للعدد المركب $-8+6i$
2. حل المعادلة (E) نرمز إلى الحلين بـ z_1 و z_2 حيث $|z_1|<|z_2|$

II) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقط A ، B ، C التي لواحقها على الترتيب i ، z_1 و z_2

1. أكتب العدد المركب $L=\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ على الشكل الأسي
2. بين أن النقطة C هي صورة النقطة B بتحويل نقطي بسيط يطلب تعيين عناصره المميزة
3. استنتج طبيعة المثلث ABC

التمرين 03 (5 نقاط)

(u_n) متتالية عددية معرفة بـ : $u_1=\frac{1}{2}$ من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ: $u_{n+1}=\left(\frac{n+1}{2n}\right)u_n$

1. أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن $u_n\geq 0$
   ب/ أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ثم استنتج أنها متقاربة ، ثم عين نهاية المتتالية (u_n)

2. نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ : $v_n = \frac{u_n}{n}$

أ/ أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول v_1

ب/ أكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n

3. نعتبر المتتالية (w_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ : $w_n = \ln(v_n)$

أ/ أثبت أن المتتالية (w_n) حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول w_1

ب/ أحسب بدلالة n كل من S_n و P_n حيث : $S_n = w_1 + w_2 + \cdots + w_n$ و $P_n = \frac{u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_n}{n!}$

التمرين 04 (7 نقاط)

I- f هي الدالة المعرفة على $[0; +\infty[$ بـ :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{2}x^2(3 - 2\ln x) + 1 & ; x \in]0; +\infty[\\ f(0) = 1 \end{cases}$$

(C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(o; \vec{i}, \vec{j})$ (الوحدة $2cm$)

1. أحسب $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)$ ، فسر بيانيا النتيجة المحصل عليها ، ثم أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

2. أ/ أدرس قابلية الإشتقاق لـ f عند $x_0 = 0$

ب/ أثبت أن f قابلة للإشتقاق على المجال $[0; +\infty[$

3. أحسب $f'(x)$ على المجال $]0; +\infty[$ ، ثم إستنتج إتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

4. بين ان المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حل وحيدا α حيث $4{,}6 < \alpha < 4{,}7$

5. أكتب معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1

II- g هي الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ : $g(x) = f(x) - 2x - \frac{1}{2}$

1. أحسب $g'(x)$ و $g''(x)$ ، ثم أدرس إتجاه تغير الدالة g'

2. إستنتج إشارة $g'(x)$ على المجال $]0; +\infty[$

3. أدرس إتجاه تغير الدالة g

4. إستنتج الوضع النسبي بين (C_f) و (T)

5. أحسب $f(6)$ ثم أنشئ كلا من (C_f) و (T) .

6. بإستعمال التكامل بالتجزئة أحسب بدلالة n : $I_n = \int_{\frac{1}{n}}^{1} x^2 \ln x \, dx$ حيث n عدد طبيعي

7. إستنتج بدلالة n المساحة $A(n)$ بـ cm^2 للحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) والمماس (T) والمستقيمين اللذين معادلتيهما : $x = \frac{1}{n}$ و $x = 1$ ،

إذا أدار الله سفينتك لليمين فتأذيت وتألمت ، فاعلم ان اليسار كان موتك المحتم ، فاحمد الله دائما ☺

بالتوفيق إن شاء الله

الحل المفصل لإختبار رقم 04

التمرين 01

عدد الحالات الممكنة : $C_7^4 = 35$

❶ حساب $P(A)$

$$P(A) = \frac{C_4^1C_3^3 + C_4^2C_3^2 + C_4^3C_3^1 + C_4^4C_3^0}{35} = \frac{35}{35} = 1$$

❷ أ/ عين قيم المتغير العشوائي X

عند سحب أربع كريات نميز مايلي : $\begin{cases} a(1)+3 = a+3 \\ a(2)+2 = 2a+2 \\ a(3)+1 = 3a+1 \\ a(4)+0 = 4a \end{cases}$

ومنه قيم المتغير العشوائي X هي

$\{a+3; 2a+2; 3a+1; 4a\}$

ب/ عرف قانون احتمال المتغير العشوائي X

$$P(X = a+3) = \frac{C_4^1C_3^3}{35} = \frac{4}{35}$$
$$P(X = 2a+2) = \frac{C_4^2C_3^2}{35} = \frac{18}{35}$$
$$P(X = 3a+1) = \frac{C_4^3C_3^1}{35} = \frac{12}{35}$$
$$P(X = 4a) = \frac{C_4^4C_3^0}{35} = \frac{1}{35}$$

x_i	$a+3$	$2a+2$	$3a+1$	$4a$
$P(X=x_i)$	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$

❖ أحسب أمله الرياضي $E(X)$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{4} x_iP_i$$
$$= \frac{4(a+3) + 18(2a+2) + 12(3a+1) + 4a(1)}{35}$$
$$E(X) = \frac{80a+60}{35} = \frac{16a+12}{7}$$

جـ/ عين قيمة العدد الحقيقي a حتى يكون $E(X) = \frac{32396}{7}$

لدينا $E(X) = \frac{32396}{7}$ معناه $\frac{16a+12}{7} = \frac{32396}{7}$

ومنه $16a + 12 = 32396$ ، ومنه $a = 2024$

❸ نسحب الآن من هذا الكيس أربع كريات على التوالي بالإرجاع

أحسب احتمال الحدث B : " الحصول على الأقل على كرية بيضاء "

$$P(B) = \frac{4(4^1\times3^3)+6(4^2\times3^2)+4(4^3\times3^1)+4^4}{7^4} = \frac{2320}{2401}$$

التمرين 02

❶ عين الجذرين التربيعيين للعدد المركب $-8+6i$

نضع $w = x+iy$ حيث $w^2 = -8+6i$ ومنه

لدينا $\begin{cases} x^2+y^2 = 10 \ldots.(1) \\ x^2-y^2 = -8 \quad \ldots..(2) \\ 2xy = 6 \ldots\ldots(3) \end{cases}$ بجمع (1) مع (2)

نجد $2x^2 = 2$ ، ومنه $\begin{cases} x = 1 \\ \text{أو} \\ x = -1 \end{cases}$

بالتعويض في (3) نجد

✓ إذا كان $x = 1$ ، فإن $2y = 6$ ، أي أن $y = 3$ ، ومنه نستنتج أن : $w = 1+3i$

✓ إذا كان $x = -1$ ، فإن $-2y = 6$ ، أي أن $y = -3$ ، ومنه نستنتج أن : $w = -1-3i$

❷ حل المعادلة (E)

لدينا : $\Delta = -8+6i$ ، ومنه $\Delta = (1+3i)^2$

ومنه المعادلة (E) تقبل حلان هما

$$z_1 = \frac{3+i+1+3i}{2} = 2+2i$$
$$z_2 = \frac{3+i-1-3i}{2} = 1-i$$

II) ❶ أكتب العدد المركب $L = \frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ على الشكل الأسي

$$L = \frac{1-i-i}{2+2i-i} = \frac{1-2i}{2+i} \times \frac{2-i}{2-i} = -i$$
$$L = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{-\frac{\pi}{2}i}$$

❷ بين أن النقطة C هي صورة النقطة B

لدينا $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A} = e^{-\frac{\pi}{2}i}$ ، ومنه $z_C - z_A = e^{-\frac{\pi}{2}i}(z_B - z_A)$

ومنه نستنتج أن النقطة C هي صورة النقطة B بدوران مركزه A وزاويته $-\frac{\pi}{2}$

❸ استنتج طبيعة المثلث ABC

$$\left|\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right| = 1 \Rightarrow \frac{AC}{AB} = 1 \Rightarrow AC = AB$$
$$arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right) = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{2}$$

ومنه نستنتج أن المثلث ABC متساوي الساقين وقائم في A

التمرين 03

1 أ/ برهن بالتراجع أنه $u_n \geq 0$

نسمي الخاصية $p(n) : u_n \geq 0$

من أجل $n = 1$ ، لدينا $u_1 = \frac{1}{2}$ ، ومنه $u_1 = \frac{1}{2} \geq 0$

ومنه الخاصية محققة من أجل $n = 1$

نفرض صحة $p(n)$ من أجل n كيفي حيث $n \geq 1$

ونبرهن صحة $p(n+1)$ أن $u_{n+1} \geq 0$

لدينا $u_n \geq 0$ ، ومنه $\left(\frac{n+1}{2n}\right) u_n \geq 0$

ومنه الخاصية محققة من أجل $n+1$

ومنه نستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n

فإن $u_n \geq 0$

ب/ أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)

$$u_{n+1} - u_n = \left(\frac{n+1}{2n}\right) u_n - u_n = u_n \left[\frac{n+1}{2n} - 1\right]$$

$$u_{n+1} - u_n = u_n \left[\frac{-n+1}{2n}\right]$$

من أجل كل $n \geq 1$ فإن $-n+1 \leq 0$

ومنه $u_{n+1} - u_n \leq 0$ ، ومنه نستنتج أن (u_n) متناقصة

❖ **استنتج أنها متقاربة :** بما أن (u_n) متناقصة

ومحدودة من الأسفل بالعدد 0 فهي متقاربة

❖ **تعيين نهاية المتتالية (u_n)**

بما أن (u_n) متقاربة والدالة f المعرفة بـ $f(x) = x$

مستمرة من أجل كل $x \geq 1$ فإن نهاية (u_n) تحقق

$$l = \frac{1}{2} l$$

حيث $\lim\limits_{n\to+\infty} \left[\frac{n+1}{2n}\right] = \lim\limits_{n\to+\infty} \left[\frac{n}{2n}\right] = \frac{1}{2}$

لدينا $l = \frac{1}{2} l$ معناه $l - \frac{1}{2} l = 0$ معناه $\frac{1}{2} l = 0$ ، ومنه

$l = 0$ ، ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

2 أ/ أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{n+1} = \frac{\left(\frac{n+1}{2n}\right) u_n}{n+1} = \frac{u_n}{2n} = \frac{1}{2} v_n$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$

حدها الأول $v_1 = \frac{u_1}{1} = \frac{1}{2}$

ب/ أكتب عبارة v_n بدلالة n

$$v_n = v_1 \times q^{n-1} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}$$

❖ **استنتج عبارة u_n بدلالة n**

بما أن $v_n = \frac{u_n}{n}$ فإن $u_n = n \times v_n$ ، ومنه $u_n = \frac{n}{2^n}$

3 أ/ أثبت أن المتتالية (w_n) حسابية

$$w_{n+1} = \ln(v_{n+1}) = \ln\left(\frac{1}{2} v_n\right) = \ln\frac{1}{2} + \ln(v_n)$$

$$w_{n+1} = \ln\frac{1}{2} + w_n$$

ومنه (w_n) متتالية حسابية أساسها $r = \ln\frac{1}{2}$

حدها الأول $w_1 = \ln(v_1) = \ln\frac{1}{2}$

عبارة w_n بدلالة n

$$w_n = w_1 + (n-1)r$$

$$w_n = \ln\frac{1}{2} + (n-1)\ln\frac{1}{2} = n \ln\frac{1}{2}$$

ب/ أحسب بدلالة n كل من S_n و P_n

$$S_n = w_1 + w_2 + \cdots + w_n$$

نلاحظ أن S_n هي حدود متتابعة لمتتالية حسابية ومنه

$$S_n = \frac{n}{2}\left(\ln\frac{1}{2} + n \ln\frac{1}{2}\right) = \frac{n}{2}\left[(n+1)\ln\frac{1}{2}\right]$$

$$P_n = \frac{u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_n}{n!}$$

$$P_n = \frac{u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_n}{1 \times 2 \times \ldots \times n} = \frac{u_1}{1} \times \frac{u_2}{2} \times \ldots \times \frac{u_n}{n}$$

$$P_n = v_1 \times v_2 \times \ldots \times v_n$$

$$P_n = \left(\frac{1}{2}\right)^1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \ldots \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{1+2+\cdots+n}$$

$$P_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

التمرين 04

1 أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to0 \\ >}} f(x)$

$$\lim_{\substack{x\to0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to0 \\ >}} \left[\frac{3}{2}x^2 - x^2 \ln x + 1\right] = 1$$

فسر بيانيا النتيجة المحصل عليها

بما أن $\lim\limits_{\substack{x\to0 \\ >}} f(x) = f(0) = 1$ فإن الدالة f

مستمرة عند $x_0 = 0$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{2}x^2(3-2\ln x)+1\right] = -\infty$$

❷ أ/ أدرس قابلية الإشتقاق لـ f عند $x_0 = 0$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\left[\frac{3}{2}x - x\ln x\right] = 0$$

ومنه f قابلة للإشتقاق عند $x_0 = 0$

ب/ أثبت أن f قابلة للإشتقاق على المجال $[0;+\infty[$

لدينا من جهة f قابلة للإشتقاق عند $x_0 = 0$

ومن جهة أخرى f هي عبارة عن جداء ومجموع دوال قابلة للإشتقاق على $]0;+\infty[$

ومنه نستنتج أن f قابلة للإشتقاق على المجال $[0;+\infty[$

❸ أحسب $f'(x)$ على المجال $]0;+\infty[$

$$f'(x) = x(3-2\ln x) - \frac{2}{x}\times\frac{x^2}{2}$$

$$f'(x) = 3x - 2x\ln x - x = 2x(1-\ln x)$$

❖ إستنتج إتجاه تغير الدالة f

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ 1-\ln x = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = e\end{cases}$$

x	0		e		$+\infty$
$2x$		$+$		$+$	
$1-\ln x$	‖	$+$	0	$-$	
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	

ومنه f متزايدة تماما على المجال $[0;e]$ ومتناقصة تماما على المجال $[e;+\infty[$

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	↗	$\simeq 4{,}7$	↘	$-\infty$

❹ بين ان المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حل وحيدا α

f مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $[4{,}6;4{,}7]$

$$\begin{cases} f(4{,}6) = 0{,}44 \\ f(4{,}7) = -0{,}05\end{cases} \Rightarrow f(4{,}6)\times f(4{,}7) < 0$$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حل وحيدا α حيث $4{,}6 < \alpha < 4{,}7$

❺ أكتب معادلة المماس (T) عند الفاصلة 1

$$(T): y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

$$(T): y = 2(x-1) + \frac{5}{2}$$

$$(T): y = 2x + \frac{1}{2}$$

g-II دالة معرفة بـ : $g(x) = f(x) - 2x - \frac{1}{2}$

❶ أحسب $g'(x)$ و $g''(x)$ ، ثم أدرس إتجاه تغير الدالة g'

$$g'(x) = f'(x) - 2$$

$$g''(x) = f''(x) = 2(1-\ln x) - \frac{1}{x}\times 2x$$

$$g''(x) = -2\ln x$$

x	0		1		$+\infty$
$g''(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$g'(x)$	‖ -2	↗	0	↘	$-\infty$

ومنه الدالة g' متزايدة تماما على المجال $]0;1]$ ومتناقصة تماما على المجال $[1;+\infty[$

❷ إستنتج إشارة $g'(x)$ على المجال $]0;+\infty[$

بما أن الدالة g' تقبل قيمة حدية عظمى هي 0 عند $x = 1$ ومنه نستنتج أنه من أجل كل $x \in]0;+\infty[$ فإن $g'(x) \le 0$

❸ أدرس إتجاه تغير الدالة g

الدالة g متناقصة تماما على المجال $]0;+\infty[$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$-$	
$g(x)$	$\frac{1}{2}$	↘	0	↘	

❹ إستنتج الوضع النسبي بين (C_f) و (T)

ندرس إشارة الفرق $f(x) - 2x - \frac{1}{2} = g(x)$

✍ لما $x \in]0;1[$ فإن (C_f) يقع فوق (T)

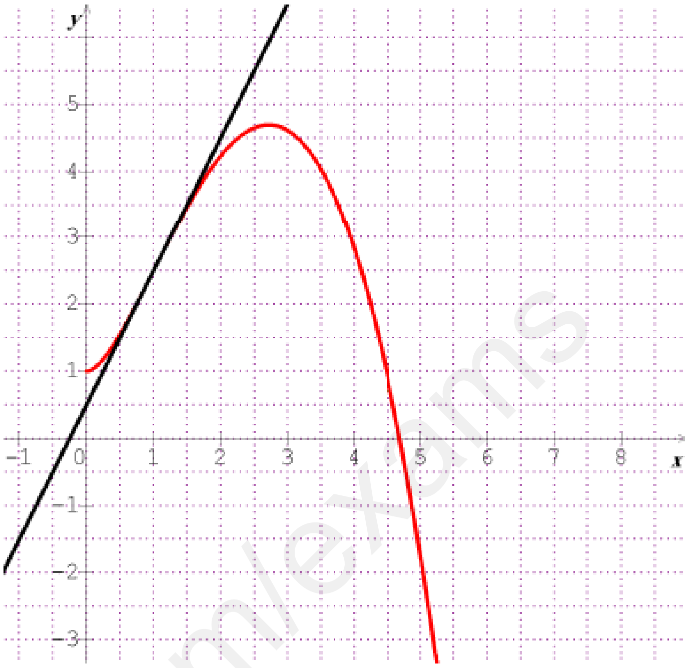
✍ لما $x \in]1;+\infty[$ فإن (C_f) يقع تحت (T)

✍ لما $x = 1$ فإن (C_f) يخترق (T) في $\left(1;\frac{5}{2}\right)$

❺ أحسب $f(6)$

$$f(6) = -9,5$$

أنشئ كلا من (C_f) و (T)



❻ أحسب بدلالة n : $I_n = \int_{\frac{1}{n}}^{1} x^2 \ln x \, dx$

$u(x) = \ln x$	$u'(x) = \frac{1}{x}$
$v(x) = \frac{x^3}{3}$	$v'(x) = x^2$

$$I_n = \left[\frac{x^3}{3}\ln x\right]_{\frac{1}{n}}^{1} - \frac{1}{3}\int_{\frac{1}{n}}^{1} x^2 dx$$

$$I_n = \left[\frac{x^3}{3}\ln x\right]_{\frac{1}{n}}^{1} - \left[\frac{x^3}{9}\right]_{\frac{1}{n}}^{1} =$$

$$I_n = -\left(\frac{\left(\frac{1}{n}\right)^3}{3}\ln\frac{1}{n}\right) - \left(\frac{1}{9} - \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^3}{9}\right)$$

$$I_n = -\left(\frac{1}{3n^3}(-\ln n)\right) - \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{9n^3}\right)$$

$$I_n = \frac{\ln n}{3n^3} + \frac{1}{9n^3} - \frac{1}{9}$$

❼ إستنتج المساحة $A(n)$ بـ cm^2 لحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) والمماس (T) و المستقيمين اللذين معادلتيهما : $x = \frac{1}{n}$ و $x = 1$

بما أن $0 < \frac{1}{n} \le x \le 1$ أي أن $0 \le x \le 1$

ومنه (C_f) يقع فوق (T) في المجال $[0;1]$ ومنه

$$A(n) = \int_{\frac{1}{n}}^{1}\left(f(x) - 2x - \frac{1}{2}\right)dx = \int_{\frac{1}{n}}^{1} g(x)dx$$

$$A(n) = \int_{\frac{1}{n}}^{1}\left(\frac{3}{2}x^2 - x^2\ln x + 1 - 2x - \frac{1}{2}\right)dx$$

$$A(n) = \int_{\frac{1}{n}}^{1}\left(\frac{3}{2}x^2 - 2x - x^2\ln x + \frac{1}{2}\right)dx$$

$$A(n) = \int_{\frac{1}{n}}^{1}\left(\frac{3}{2}x^2 - 2x + \frac{1}{2}\right)dx - I_n$$

$$A(n) = \left[\frac{x^3}{2} - x^2 + \frac{x}{2}\right]_{\frac{1}{n}}^{1} - I_n = \left[\frac{x^3 - 2x^2 + x}{2}\right]_{\frac{1}{n}}^{1} - I_n$$

$$A(n) = -\left(\frac{\left(\frac{1}{n}\right)^3 - 2\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}}{2}\right) - I_n$$

$$A(n) = -\left(\frac{\frac{1}{n^3} - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n}}{2}\right) - I_n$$

$$A(n) = -\left(\frac{\frac{1-2n+n^2}{n^3}}{2}\right) - I_n = -\frac{1-2n+n^2}{2n^3} - I_n$$

$$A(n) = \frac{-n^2+2n-1}{2n^3} - \frac{\ln n}{3n^3} - \frac{1}{9n^3} + \frac{1}{9}$$

$$A(n) = \frac{-9n^2 + 18n - 9 - 6\ln n - 2 + 2n^3}{18n^3}$$

$$A(n) = \left(\frac{2n^3 - 9n^2 + 18n - 11 - 6\ln n}{18n^3}\right) \times 4\ (u.a)$$