الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

الشعبة: علوم تجريبية | نموذج 02 مقترح للبكالوريا | دورة: جوان 2017

مقترح من طرف الاساتذة : حجاج براهيم +يوسف يوسف + بلفاطمي محمد سفيان

اختبار في مادة : الرياضيات | المدة: 02 سا و30 د

التمرين الأول: (05 نقاط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$

نعتبر النقط $A(3;-2;2)$، $B(6;1;5)$، $C(6;-2;-1)$ و $D(0;4;-1)$

1) بين أن الشعاع $\overrightarrow{AD}$ عمودي على المستوي (ABC) ثم استنتج المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC) .

2) بين أن المثلث ABC قائم في A ثم أحسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$.

3) بين أن $\frac{\pi}{4}$ قيس للزاوية BDC .

4) أحسب مساحة المثلث BDC ثم استنتج المسافة بين النقطة A و المستوي BDC

لا يطلب المعادلة الديكارتية للمستوي BDC

التمرين الثاني : (04 نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول Z التالية : $|Z|^2+2\overline{Z}-4+2i=0$.

نعتبر النقط A، B، C ذات اللواحق على الترتيب : $Z_A=1+i$ ، $Z_B=\overline{Z}_A$ ، $Z_C=2Z_B$.

2) بين أن النقط A، B، C تنتمي إلى نفس الدائرة ذات المركز ، النقطة Ω و نصف قطرها $r=\sqrt{5}$ يطلب تعين اللاحقة Z_Ω .

3) نضع $Z_\Omega=3$

اكتب العدد المركب $\frac{Z_C-Z_\Omega}{Z_A-Z_\Omega}$ ، على الشكل الأسي ثم استنتج أن النقطة C صورة النقطة A بتحويل نقطي T يطلب تعيين طبيعته والعناصر المميزة له.

4) D صورة النقطة O مبدأ المعلم بالإنسحاب الذي شعاعه $2\overrightarrow{\Omega C}$ و E صورة النقطة B بالتحويل T.

عين لاحقتي النقطتين D و E و تحقق أن الشعاعين $\overrightarrow{CD}$ ، $\overrightarrow{\Omega E}$ متعامدان.

التمرين الثالث : (04 نقاط)

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0=0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=3u_n+2n+1$

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n=3^n-n-1$.

2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي: $v_n=u_n+\alpha(n+1)$ حيث α عدد حقيقي .

عين α حتى تكون المتتالية (v_n)هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول v_0 .

3) نضع $\alpha=1$ و ليكن $S_n=v_0+v_1+......+v_n$ و $T_n=u_0+u_1+......+u_n$

أ) احسب بدلالة n المجموعين S_n و T_n

ب) عين قيمة n حتى يكون $S_n-T_n=2037171$

التمرين الرابع : (07 نقاط)

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\ln\left(e^x+2e^{-x}\right)$ و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x)=x+\ln\left(1+2e^{-2x}\right)$ ثم احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) بين أن المستقيم (D) الذي معادلته $y=x$ هو مستقيم مقارب للمنحنى (C) ثم ادرس الوضعية النسبية للمنحنى (C) و المستقيم (D) .

3) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x)=-x+\ln\left(2+e^{2x}\right)$ ثم احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

4) بين أن المستقيم (D') الذي معادلته : $y=-x+\ln 2$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C)ثم ادرس الوضعية النسبية للمنحنى (C) و المستقيم (D') .

5) ادرس اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها .

6) ارسم (D) ، (D') و المنحنى (C) .

7) ليكن (Δ_m) المستقيم الذي معادلته : $y=mx+\frac{\ln 2}{2}(1-m)$ حيث m وسيط حقيقي .

أ) بين أن جميع المستقيمات (Δ_m) تشمل النقطة الثابتة $A\left(\frac{\ln 2}{2};\frac{\ln 2}{2}\right)$.

ب) ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد نقاط تقاطع المستقيم (Δ_m) و المنحنى (C) .

تصحيح لموضوع نموذج مقترح 02 لشعبة علوم تجريبية

مقترح من طرف الاساتذة : حجاج براهيم +يوسف يوسف + بلفاطمي محمد سفيان

حل التمرين الأول: (05 نقاط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

نعتبر النقط $A(3;-2;2)$ ، $B(6;1;5)$ ، $C(6;-2;-1)$ و $D(0;4;-1)$

1) إثبات أن الشعاع $\overrightarrow{AD}$ عمودي على المستوي (ABC)

نثبت أولا النقط $A(3;-2;2)$ ، $B(6;1;5)$ ، $C(6;-2;-1)$ تشكل المستوي

$\overrightarrow{AB}(3;3;3)$ $\overrightarrow{AC}(3;0;-3)$ ومنه نلاحظ أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}(3;3;3)$ $\overrightarrow{AC}(3;0;-3)$ غير مرتبطين خطيا و بالتالي النقط تشكل المستوي (ABC)

ولان لكي نثبت أن $\overrightarrow{AD}(-3;6;-3)$عمودي على المستوي (ABC) يكفي إثبات $\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}=-9+18-9=0$ إذن $\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}=-9+0+9=0$ إذن $\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{AC}$

استنتاج المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC) .

بما أن $\overrightarrow{AD}(-3;6;-3)$ عمودي على المستوي (ABC) و منه $\overrightarrow{AD}(-3;6;-3)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC)

لتكن $M(x;y;z)$ النقطة من الفضاء .

$M\in(ABC)$ يكافئ $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AD}=0$ فنجد $-3(x-3)+6(y+2)-3(z-2)=0$ و منه $-3x+6y-3z+27=0$

إذن المعادلة المستوي (ABC) هي $x-2y+z-9=0$.

2) إثبات أن المثلث ABC قائم في A

طريقة 1 : جداء السلمي

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=9+0-9=0$. و منه ABC قائم في A

طريقة 2 :نظرية عكسية لفتاغورث

بما أن $\overrightarrow{AB}(3;3;3)$ و منه $AB=3\sqrt{3}$ و $\overrightarrow{AC}(3;0;-3)$ و منه $AC=3\sqrt{2}$ و $\overrightarrow{BC}(0;-3;-6)$ و منه $BC=3\sqrt{5}$.

$AB^2+AC^2=27+18=45=BC^2$ و منه ABC قائم في A .

حساب حجم رباعي الوجوه $ABCD$: .

$$V_{ABCD}=\frac{1}{3}S_{ABC}\times AD=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}AB\times AC\right]\times AD=\frac{1}{6}AB\times AC\times AD=\frac{1}{6}\times3\sqrt{3}\times3\sqrt{2}\times3\sqrt{6}=27uv \ .$$

3) تبان أن $\frac{\pi}{4}$ قيس للزاوية BDC .

لدينا $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC}=DB\times DC\times\cos(\overrightarrow{DB};\overrightarrow{DC})$ و منه $\cos(\overrightarrow{DB};\overrightarrow{DC})=\dfrac{\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC}}{DB\times DC}$

و كذالك لدينا $\overrightarrow{DB}(6;-3;6)$ و منه $DB=3\sqrt{9}=9$ و $\overrightarrow{DC}(6;-6;0)$ و منه $DC=6\sqrt{2}$

و من جهة أخري $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC}=36+18=54$ اذن : $\cos\left(\overrightarrow{DB};\overrightarrow{DC}\right)=\frac{\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC}}{DB\times DC}=\frac{54}{9\times6\sqrt{2}}=\frac{54}{54\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

و منه $\cos\left(\overrightarrow{DB};\overrightarrow{DC}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ و منه $\left(\overrightarrow{DB};\overrightarrow{DC}\right)=\frac{\pi}{4}$.

4) حساب مساحة المثلث BDC

$$S_{BDC}=\frac{1}{2}DB\times DC\times\cos\left(\overrightarrow{DB};\overrightarrow{DC}\right)=\frac{1}{2}\times9\times6\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=27ua$$

استنتاج المسافة بين النقطة A و المستوي (BDC) (لا يطلب المعادلة الديكارتية للمستوي (BDC))

$V_{ABCD}=\frac{1}{3}S_{BDC}\times d\left[(BDC);A\right]$. و منه $d\left[(BDC);A\right]=\frac{3V_{ABCD}}{S_{BDC}}=\frac{3\times27}{27}=3$

حل التمرين الثاني : (04 نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1) حلول في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول Z التالية : $|Z|^2+2\overline{Z}-4+2i=0$.

$\begin{cases}|Z|^2+2\overline{Z}-4+2i=0\\Z=x+iy\\\overline{Z}=x-iy\\|Z|^2=x^2+y^2\end{cases}$ و منه $\left(x^2+y^2\right)+2(x-iy)-4+2i=0$ نجد ز منه $\left(x^2+y^2+2x-4\right)+i2(1-y)=0$

$\begin{cases}x^2+y^2+2x-4=0\\1-y=0\end{cases}$ و منه $\begin{cases}y=2\\x^2+(1)^2+2x-4=0\end{cases}$ و منه $\begin{cases}y=1\\x^2+2x-3=0\end{cases}$ و منه $\begin{cases}y=1\\x=1;x=-3\end{cases}$.

إذن حلول معادلة $Z_1=1+i$ و $Z_2=-3+i$.

2) نعتبر النقط A ، B ، C ذات اللواحق على الترتيب : $Z_A=1+i$ ، $Z_B=\overline{Z}_A$ ، $Z_C=2Z_B$.

إثبات أن النقط A ، B ، C تنتمي إلى نفس الدائرة ذات المركز ، النقطة Ω و نصف قطرها $r=\sqrt{5}$ مع تعين اللاحقة Z_Ω.

طريقة1 : معادلة الدائرة (C) تكتب على الشكل $x^2+y^2+ax+by+c=0$

لدينا $\begin{cases}A\in(C)\\B\in(C)\\C\in(C)\end{cases}$ و منه $\begin{cases}x_A^2+y_A^2+ax_A+by_A+c=0\\x_B^2+y_B^2+ax_B+by_B+c=0\\x_C^2+y_C^2+ax_C+by_C+c=0\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}1+1+a+b+c=0\\1+1+a-b+c=0\\4+4+2a-2b+c=0\end{cases}$ نجد $\begin{cases}a+b+c=-2 & (1)\\a-b+c=-2 & (2)\\2a-2b+c=-8 & (3)\end{cases}$

من $\begin{cases}(1)\\(2)\end{cases}$ نجد $\begin{cases}a+c=-2-b\\a+c=-2+b\end{cases}$ و منه $-2+b=-2-b$ و منه $b+b=-2+2$ نجد $b=0$

نعوض في جملة $\begin{cases}a+0+c=-2 & (1)\\a-0+c=-2 & (2)\\2a-0+c=-8 & (3)\end{cases}$ و منه $\begin{cases}a+c=-2\\2a+c=-8\end{cases}$.

بالطرح نجد $a=-6$ بعد تعويض نجد $c=4$

و بالتالي $x^2+y^2-6x+4=0$ و منه $(x-3)^2-9+y^2+4=0$ نجد $(x-3)^2+y^2=5$

إذن الدائرة مركزها $\Omega(3;0)$ و نصف قطرها $\sqrt{5}$

طريقة 2 : نفرض أن $Z_\Omega=x_\Omega+y_\Omega$

و منه

$$\Omega A=|Z_A-Z_\Omega|=|1+i-x_\Omega-iy_\Omega|=|(1-x_\Omega)+i(1-y_\Omega)|=\sqrt{(1-x_\Omega)^2+(1-y_\Omega)^2}$$

$$\Omega B=|Z_B-Z_\Omega|=|1-i-x_\Omega-iy_\Omega|=|(1-x_\Omega)+i(-1-y_\Omega)|=\sqrt{(1-x_\Omega)^2+(-1-y_\Omega)^2}=\sqrt{(1-x_\Omega)^2+(1+y_\Omega)^2}$$

$$\Omega C=|Z_C-Z_\Omega|=|2-2i-x_\Omega-iy_\Omega|=|(2-x_\Omega)+i(-2-y_\Omega)|=\sqrt{(2-x_\Omega)^2+(-2-y_\Omega)^2}=\sqrt{(2-x_\Omega)^2+(2+y_\Omega)^2}$$

اذن $\begin{cases}\Omega A=\sqrt{(1-x_\Omega)^2+(1-y_\Omega)^2}\\ \Omega B=\sqrt{(1-x_\Omega)^2+(1+y_\Omega)^2}\\ \Omega C=\sqrt{(2-x_\Omega)^2+(2+y_\Omega)^2}\\ \Omega A=\Omega B=\Omega C=\sqrt{5}\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}\Omega A^2=(1-x_\Omega)^2+(1-y_\Omega)^2={x_\Omega}^2+{y_\Omega}^2-2x_\Omega-2y_\Omega+2\\ \Omega B^2=(1-x_\Omega)^2+(1+y_\Omega)^2={x_\Omega}^2+{y_\Omega}^2-2x_\Omega+2y_\Omega+2\\ \Omega C^2=(1-x_\Omega)^2+(2+y_\Omega)^2={x_\Omega}^2+{y_\Omega}^2-2x_\Omega+4y_\Omega+5\\ \Omega A=\Omega B=\Omega C=\sqrt{5}\end{cases}$

و منه $\begin{cases}{x_\Omega}^2+{y_\Omega}^2-2x_\Omega-2y_\Omega+2=5\\ {x_\Omega}^2+{y_\Omega}^2-2x_\Omega+2y_\Omega+2=5\\ {x_\Omega}^2+{y_\Omega}^2-4x_\Omega+4y_\Omega+8=5\\ \Omega A=\Omega B=\Omega C=\sqrt{5}\end{cases}$ و منه $\begin{cases}{x_\Omega}^2+{y_\Omega}^2-2x_\Omega-2y_\Omega-3=0 & (1)\\ {x_\Omega}^2+{y_\Omega}^2-2x_\Omega+2y_\Omega-3=0 & (2)\\ {x_\Omega}^2+{y_\Omega}^2-4x_\Omega+4y_\Omega+3=0 & (3)\end{cases}$

بالطرح 1 من 2 نجد $4y_\Omega=0$ و منه $y_\Omega=0$.

و منه $\begin{cases}{x_\Omega}^2+0-2x_\Omega-0-3=0 & (1)\\ {x_\Omega}^2+0-2x_\Omega+0-3=0 & (2)\\ {x_\Omega}^2+0-4x_\Omega+0+3=0 & (3)\end{cases}$ و منه $\begin{cases}{x_\Omega}^2-2x_\Omega-3=0\\ {x_\Omega}^2-4x_\Omega+3=0\end{cases}$ و منه $\begin{cases}x_\Omega=-1\ ;x_\Omega=3\\ x_\Omega=1\ \ ;x_\Omega=3\end{cases}$ و منه $x_\Omega=3$

3) نضع $Z_\Omega=3$

كتابة العدد المركب $\frac{Z_C-Z_\Omega}{Z_A-Z_\Omega}$ ، على الشكل الأسي

$$\frac{Z_C-Z_\Omega}{Z_A-Z_\Omega}=\frac{2-2i-3}{1+i-3}=\frac{-1-2i}{-2+i}=\frac{1+2i}{2-i}\times\frac{2+i}{2+i}=\frac{2+i+4i-2}{4+1}=\frac{5i}{5}=i=e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

استنتاج أن النقطة C صورة النقطة A بتحويل نقطي T مع تعيين طبيعته والعناصر المميزة له.

لدينا $\frac{Z_C-Z_\Omega}{Z_A-Z_\Omega}=e^{i\frac{\pi}{2}}$ و منه $\begin{cases}\left|\frac{Z_C-Z_\Omega}{Z_A-Z_\Omega}\right|=1\\ Arg\left(\frac{Z_C-Z_\Omega}{Z_A-Z_\Omega}\right)=\frac{\pi}{2}+2\pi k\ (k\in\mathbb{Z})\end{cases}$. و منه $\begin{cases}\frac{\Omega C}{\Omega A}=1 \quad (\Omega C=\Omega A)\\ (\overrightarrow{\Omega A};\overrightarrow{\Omega C})=\frac{\pi}{2}+2\pi k\ (k\in\mathbb{Z})\end{cases}$.

و منه T عبارة عن دوران مركزه Ω و يحول A إلى C و زاويته $\frac{\pi}{2}$.

4) D صورة النقطة O مبدأ المعلم بالإنسحاب الذي شعاعه $2\overrightarrow{\Omega C}$ و E صورة النقطة B بالتحويل T.

تعيين لاحقتي النقطتين D و E

طريقة 1 : D صورة النقطة O مبدأ المعلم بالإنسحاب الذي شعاعه $2\overrightarrow{\Omega C}$ معناه $\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{\Omega C}$

ومنه $Z_D-Z_O=2(Z_C-Z_\Omega)$ و منه $Z_D-0=2(Z_C-Z_\Omega)=2(2-2i-3)=-2-4i$.

طريقة 2 : كل انسحاب يكتب على الشكل $Z'=Z+b$ حيث b لاحقة شعاع انسحاب معناه

$b=Z_{2\overrightarrow{\Omega C}}=2(Z_C-Z_\Omega)$ و منه $Z'=Z+2(Z_C-Z_\Omega)$

D صورة النقطة O معناه $Z_D=Z_O+2(Z_C-Z_\Omega)=0+2(Z_C-Z_\Omega)=2(2-2i-3)=-2-4i$

E صورة النقطة B بالتحويل T معناه $T(B)=E$ و منه $Z_E-Z_\Omega=e^{i\frac{\pi}{2}}(Z_B-Z_\Omega)$.

و منه $Z_E=e^{i\frac{\pi}{2}}(Z_B-Z_\Omega)+Z_\Omega=i(1-i-3)+3=-2i+1+3=4-2i$.

تحقق أن الشعاعين $\overrightarrow{CD}$ ، $\overrightarrow{\Omega E}$ متعامدان.

طريقة 1 :

$Z_{\overrightarrow{CD}}=Z_D-Z_C=-2-4i-2+2i=-4-2i$ و $Z_{\overrightarrow{\Omega E}}=Z_E-Z_\Omega=4-2i-3=1-2i$

$\overrightarrow{CD}(-4;-2)$ و $\overrightarrow{\Omega E}(1;-2)$

$\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{\Omega E}=-4+4=0$

طريقة 2 : نحسب $\frac{Z_E-Z_\Omega}{Z_D-Z_C}=\frac{4-2i-3}{-2-4i-2+2i}=\frac{1-2i}{-4-2i}=\frac{-1+2i}{4+2i}\times\frac{4-2i}{4-2i}=\frac{-4+2i+8i+4}{16+4}=\frac{10i}{20}=\frac{1}{2}i=\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}$

لدينا $\frac{Z_E-Z_\Omega}{Z_D-Z_C}=\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}$ و منه $\begin{cases}\left|\frac{Z_E-Z_\Omega}{Z_D-Z_C}\right|=\frac{1}{2}\\ Arg\left(\frac{Z_E-Z_\Omega}{Z_D-Z_C}\right)=\frac{\pi}{2}+2\pi k\,(k\in\mathbb{Z})\end{cases}$. و منه $(\overrightarrow{CD};\overrightarrow{\Omega E})=\frac{\pi}{2}+2\pi k\,(k\in\mathbb{Z})$.

حل التمرين الثالث : (04 نقاط)

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0=0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=3u_n+2n+1$

1) برهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=3^n-n-1$.

مرحلة 1 : نتحقق من صحتها من أجل $n=0$: لدينا $u_0=3^0-0-1=1-1=0$ ومنه خاصية محققة من اجل $n=0$.

مرحلة 2 : نفرض أنها صحيحة من اجل n أي $u_n=3^n-n-1$ و نبرهن صحتها من أجل $n+1$ أي أن $u_{n+1}=3^{n+1}-(n+1)-1=3^{n+1}-n-2$ أي أن $u_{n+1}=3^{n+1}-n-2$

لدينا $\begin{cases}u_n=3^n-n-1\\ u_{n+1}=3u_n+2n+1\end{cases}$ و منه $u_{n+1}=3u_n+2n+1=3(3^n-n-1)+2n+1=3^{n+1}-3n-3+2n+1=3^{n+1}-n-2$

ومنه الخاصية صحيحة من أجل $n+1$ و منه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=3^n-n-1$.

2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي: $v_n = u_n + \alpha(n+1)$ حيث α عدد حقيقي .

تعيين α حتى تكون المتتالية (v_n) هندسية

طريقة 1 :

$$v_{n+1} = u_{n+1} + \alpha(n+1+1) = u_{n+1} + \alpha(n+2) = 3u_n + 2n + 1 + \alpha n + 2\alpha = 3u_n + (2+\alpha)n + 1 + 2\alpha$$

$$v_{n+1} = 3\left[u_n + \frac{(2+\alpha)}{3}n + \frac{1+2\alpha}{3}\right] = 3v_n$$ ((v_n) متتالية هندسية)

$u_n + \frac{(2+\alpha)}{3}n + \frac{1+2\alpha}{3} = u_n + \alpha(n+1)$ و منه $\frac{(2+\alpha)}{3}n + \frac{1+2\alpha}{3} = \alpha n + \alpha$

بالمطابقة نجد $\begin{cases} \frac{(2+\alpha)}{3} = \alpha \\ \frac{1+2\alpha}{3} = \alpha \end{cases}$ و منه $\begin{cases} 2+\alpha = 3\alpha \\ 1+2\alpha = 3\alpha \end{cases}$ إذن $\begin{cases} \alpha = 1 \\ \alpha = 1 \end{cases}$

طريقة 2 :

من جهة 1 لدينا $v_{n+1} = u_{n+1} + \alpha(n+1+1) = u_{n+1} + \alpha(n+2) = 3u_n + 2n + 1 + \alpha n + 2\alpha = 3u_n + (2+\alpha)n + 1 + 2\alpha$

و منه جهة 2 لدينا $v_n = u_n + \alpha(n+1)$ و منه $u_n = v_n - \alpha(n+1)$

و منه $\begin{cases} v_{n+1} = 3u_n + (2+\alpha)n + 1 + 2\alpha \\ u_n = v_n - \alpha(n+1) \end{cases}$ و منه

$$v_{n+1} = 3u_n + (2+\alpha)n + 1 + 2\alpha = 3\left[v_n - \alpha(n+1)\right] + (2+\alpha)n + 1 + 2\alpha = 3v_n - 3\alpha(n+1) + (2+\alpha)n + 1 + 2\alpha$$

كي تكون يجب أن يكون $\begin{cases} v_{n+1} = 3v_n \\ -3\alpha(n+1) + (2+\alpha)n + 1 + 2\alpha = 0 \end{cases}$ و منه $-3\alpha(n+1) + (2+\alpha)n + 1 + 2\alpha = 0$

نجد $-3\alpha n - 3\alpha + 2n + \alpha n + 1 + 2\alpha = 0$ ومنه $-2\alpha n + 2n + 1 - \alpha = 0$ ومنه $(-2\alpha + 2)n + 1 - \alpha = 0$

معناه $\begin{cases} -2\alpha + 2 = 0 \\ 1 - \alpha = 0 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} \alpha = 1 \\ \alpha = 1 \end{cases}$

إذن $\alpha = 1$ متتالية (v_n) هندسية أساسها 3 و حدها الأول $v_0 = u_0 + \alpha(0+1) = 0 + 1(1) = 1$

طريقة 3 :

لدينا $\begin{cases} u_n = 3^n - n - 1 \\ v_n = u_n + \alpha(n+1) \end{cases}$ ومنه $v_n = u_n + \alpha(n+1) = 3^n - n - 1 + \alpha(n+1) = 3^n - (n+1) + \alpha(n+1) =$

و منه $v_n = 3^n - (n+1) + \alpha(n+1) = 3^n + (n+1)[-1+\alpha]$

اذن (v_n) هندسية معناه $[-1+\alpha] = 0$ و منه $\alpha = 1$

3) نضع $\alpha = 1$ و ليكن $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$ و $T_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$

أ) حساب بدلالة n المجموع S_n

$$S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n = v_0 \times \left[\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right] = 1\left[\frac{1-3^{n+1}}{1-3}\right] = \frac{1}{2}\left[1-3^{n+1}\right]$$

حساب بدلالة n المجموع T_n

لدينا $v_n = u_n + \alpha(n+1) = u_n + n + 1$ و منه $u_n = v_n - n - 1$

طريقة1: $T_n = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 ...... + u_n = (v_0 - 0 - 1) + (v_1 - 1 - 1) + (v_2 - 2 - 1) + (v_3 - 3 - 1) .... + (v_n - n - 1)$

و $T_n = [v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + ... + v_n] - [0 + 1 + 2 + 3 + ... + n] - [1 + 1 + 1 + 1 + ... + 1] = S_n - \frac{n(n+1)}{2} - (n+1)$

$$T_n = S_n - \frac{n(n+1)}{2} - (n+1) = S_n - \frac{(n+2)(n+1)}{2}$$

طريقة2: نلاحظ أن $u_n = v_n - n - 1$ عبارة عن مجموع متتالية هندسية (v_n) و أخري حسابية حيث $w_n = -n - 1$

أساسها -1 و حدها الأول $w_0 = -0 - 1 = -1$ إذن $u_n = v_n + w_n$

$$T_n = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 ...... + u_n = (v_0 + w_0) + (v_1 + w_1) + (v_2 + w_2) + ... + (v_n + w_n)$$

$$T_n = (v_0 + v_1 + ... + v_n) + (w_0 + w_1 + ... + w_n) = S_n + \left[(w_0 + w_n)\frac{n+1}{2}\right] = S_n + \left[(-1 - n - 1)\frac{n+1}{2}\right] = S_n - \frac{(n+2)(n+1)}{2}$$

ب) تعيين قيمة n حتى يكون $S_n - T_n = 2037171$

عين قيمة $S_n - T_n = 2037171$ حتى $S_n - S_n + \frac{(n+2)(n+1)}{2} = 2037171$ و منه $\frac{(n+2)(n+1)}{2} = 2037171$

وكمه $n^2 + 3n + 2 = 4074342$ و منه $n^2 + 3n - 4074340 = 0$ نو

منه $\Delta = (3)^2 - 4(-4074340) = 9 + 16297360 = (4037)^2$ إذن $n_1 = \frac{-3-4037}{2} = \frac{-4040}{2} = -2020$ مرفوض

و $n_2 = \frac{-3+4037}{2} = \frac{4034}{2} = 2017$ و منه قيمة n التي تحقق هي 2017

حل التمرين الرابع : (07 نقاط)

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ ب : $f(x) = \ln(e^x + 2e^{-x})$ و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) اثبات أن من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) = x + \ln(1 + 2e^{-2x})$

$$f(x) = \ln(e^x + 2e^{-x}) = \ln e^x\left(1 + 2\frac{e^{-x}}{e^x}\right) = \ln e^x(1 + 2e^{-2x}) = \ln e^x + \ln(1 + 2e^{-2x}) = x + \ln(1 + 2e^{-2x})$$

حساب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty}\left[x + \ln(1 + 2e^{-2x})\right] = +\infty + \ln 1 = +\infty$$

أو نستعمل عبارة الدالة الأولي : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty}\left[\ln(e^x + 2e^{-x})\right] = \ln(+\infty + 0) = +\infty$

2) اثبات أن المستقيم (D) الذي معادلته $y = x$ هو مستقيم مقارب للمنحنى (C)

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-y]=\lim_{x\to+\infty}\left[x+\ln\left(1+2e^{-2x}\right)-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left(1+2e^{-2x}\right)\right]=\ln 1=0$$

دراسة الوضعية النسبية للمنحنى (C) و المستقيم (D) .

$f(x)-y=\ln\left(1+2e^{-2x}\right)\succ 0$ و منه المنحنى (C) فوق المستقيم (D)

لأنه لدينا $2e^{-2x}\succ 0$ و منه $1+2e^{-2x}\succ 1$ فيصبح $\ln\left(1+2e^{-2x}\right)\succ \ln 1=0$

3) إثبات أن من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x)=-x+\ln\left(2+e^{2x}\right)$

$$f(x)=\ln\left(e^{x}+2e^{-x}\right)=\ln e^{-x}\left(\frac{e^{x}}{e^{-x}}+2\right)=\ln e^{-x}\left(e^{2x}+2\right)=\ln e^{-x}+\ln\left(e^{2x}+2\right)=-x+\ln\left(e^{2x}+2\right)$$

حساب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[-x+\ln\left(2+e^{2x}\right)\right]=+\infty+\ln 2=+\infty$$

أو نستعمل عبارة الدالة الأولى : $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[\ln\left(e^{x}+2e^{-x}\right)\right]=\ln(0+\infty)=+\infty$

4) إثبات أن المستقيم (D') الذي معادلته : $y=-x+\ln 2$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C)

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-y]=\lim_{x\to-\infty}\left[-x+\ln\left(2+e^{2x}\right)-(-x+\ln 2)\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[-x+\ln\left(2+e^{2x}\right)+x-\ln 2\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\ln\left(2+e^{2x}\right)-\ln 2\right]=0$$

الوضعية النسبية للمنحنى (C) و المستقيم (D') .

$f(x)-y=\left[\ln\left(2+e^{2x}\right)-\ln 2\right]=\ln\left(\frac{2+e^{2x}}{2}\right)=\ln\left(1+\frac{e^{2x}}{2}\right)\succ 0$ و منه المنحنى (C) فوق المستقيم (D')

لأنه لدينا $\frac{e^{2x}}{2}\succ 0$ و منه $1+\frac{e^{2x}}{2}\succ 1$ فيصبح $\ln\left(1+\frac{e^{2x}}{2}\right)\succ \ln 1=0$

5) دراسة اتجاه تغير الدالة f

$f'(x)=\frac{\left(e^{x}+2e^{-x}\right)'}{\left(e^{x}+2e^{-x}\right)}=\frac{e^{x}-2e^{-x}}{\left(e^{x}+2e^{-x}\right)}$ ومنه $f'(x)=0$ معناه $\frac{e^{x}-2e^{-x}}{\left(e^{x}+2e^{-x}\right)}=0$ ومنه $e^{-x}\left(e^{2x}-2\right)=0$ نجد $e^{2x}=2$

$2x=\ln 2$ و منه $x=\frac{\ln 2}{2}$.

لدينا $f'(x)=\frac{e^{x}-2e^{-x}}{\left(e^{x}+2e^{-x}\right)}=\frac{e^{-x}\left(e^{2x}-2\right)}{\left(e^{x}+2e^{-x}\right)}$

و منه إشارة $f'(x)$ هي إشارة $\left(e^{2x}-2\right)$ لانه $\left(e^{-x}\succ 0\right)$ و $e^{x}+2e^{-x}\succ 0$.

إذا كان $x\in\left]-\infty;\frac{\ln 2}{2}\right[$ فان $f'(x)\prec 0$ و الدالة f متناقصة

إذا كان $x\in\left]\frac{\ln 2}{2};+\infty\right[$ فان $f'(x)\succ 0$ و الدالة f متزايدة

أو وضع جدول

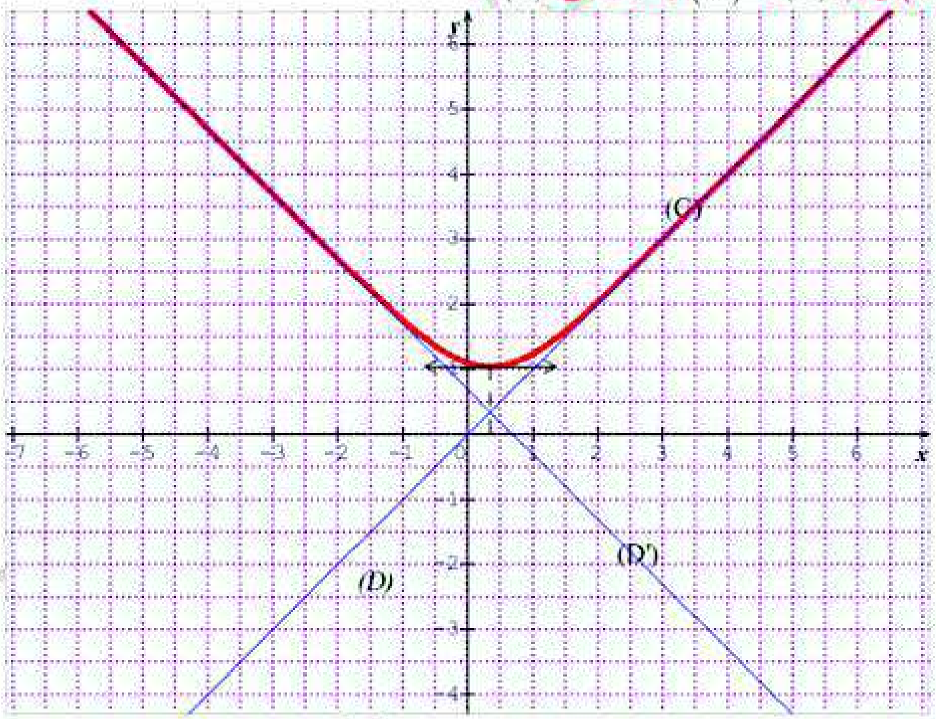
x	$-\infty$	$\frac{\ln 2}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$+$

جدول تغيراتها .

x	$-\infty$	$\frac{\ln 2}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$\frac{3}{2}\ln 2$	↗ $+\infty$

$$f(x)=\ln\left(e^{\frac{\ln 2}{2}}+2e^{-\frac{\ln 2}{2}}\right)=\ln\left(e^{\ln\sqrt{2}}+2e^{\ln\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)=\ln\left(\sqrt{2}+\frac{2}{\sqrt{2}}\right)=\ln\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}\right)=\ln\left(2\sqrt{2}\right)=\ln 2^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}\ln 2$$

6) رسم (D) ، (D') و المنحنى (C) .



7) ليكن (Δ_m) المستقيم الذي معادلته : $y=mx+\frac{\ln 2}{2}(1-m)$ حيث m وسيط حقيقي .

أ) إثبات أن جميع المستقيمات (Δ_m) تشمل النقطة الثابتة $A\left(\frac{\ln 2}{2};\frac{\ln 2}{2}\right)$.

طريقة 1 : $y=mx+\frac{\ln 2}{2}(1-m)$ و منه $mx-y+\frac{\ln 2}{2}-m\frac{\ln 2}{2}=0$ و منه $m\left(x-\frac{\ln 2}{2}\right)-y+\frac{\ln 2}{2}=0$

و منه $\begin{cases} x-\frac{\ln 2}{2}=0 \\ -y+\frac{\ln 2}{2}=0 \end{cases}$ و منه $\begin{cases} x=\frac{\ln 2}{2} \\ y=\frac{\ln 2}{2} \end{cases}$.

طريقة 2 : $y_A = mx_A + \frac{\ln 2}{2}(1-m) = m\left(\frac{\ln 2}{2}\right) + \frac{\ln 2}{2} - m\frac{\ln 2}{2} = \frac{\ln 2}{2}$

ب) مناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد نقاط تقاطع المستقيم (Δ_m) و المنحنى (C) .

ملاحظة :

المستقيم (Δ_m) يدور حول النقطة ثابتة A

إذا كان $m=1$ المستقيم يصبح (D) و يشمل A

إذا كان $m=-1$ المستقيم يصبح (D') و يشمل A

إذا كان $m=0$ المستقيم يصبح مماس يشمل A و يوازي محور فواصل

حالة 1 : $m \in]-\infty;-1[$ معادلة تقبل حل و حيد

حالة 2 : $m \in [-1;1]$ معادلة لا تقبل حلول

حالة 3 : $m \in]1;+\infty[$ معادلة تقبل حل و حيد

https://www.facebook.com/groups/1817169711901083/permalink/1905837056367681/