مفاتيح الرياضيات

الأعداد المركبة والتحويلات النقطية

السنة الثالثة ثانوي

علوم تجريبية - رياضيات - تقني رياضي

قواعد أساسية في الأعداد المركبة

100 تمرين نموذجي

جميع مواضيع الأعداد المركبة في البكالوريا

من 2008 إلي 2017

مع حلولها المفصلة

بسم الله الرحمن الرحيم

﴿ فَلَمَّا رَءَاهُ مُسۡتَقِرًّا عِندَهُۥ قَالَ هَٰذَا مِن فَضۡلِ رَبِّي لِيَبۡلُوَنِيٓ ءَأَشۡكُرُ أَمۡ أَكۡفُرُۖ
وَمَن شَكَرَ فَإِنَّمَا يَشۡكُرُ لِنَفۡسِهِۦۖ وَمَن كَفَرَ فَإِنَّ رَبِّي غَنِيّٞ كَرِيمٞ ٤٠ ﴾
﴿ رَبِّ أَوۡزِعۡنِيٓ أَنۡ أَشۡكُرَ نِعۡمَتَكَ ٱلَّتِيٓ أَنۡعَمۡتَ عَلَيَّ وَعَلَىٰ وَٰلِدَيَّ وَأَنۡ أَعۡمَلَ صَٰلِحٗا
تَرۡضَىٰهُ وَأَصۡلِحۡ لِي فِي ذُرِّيَّتِيٓۖ إِنِّي تُبۡتُ إِلَيۡكَ وَإِنِّي مِنَ ٱلۡمُسۡلِمِينَ ١٥ ﴾

الإهداء

إلى روح والدي رحمه الله الذي ضحّى بالنفس و النفيس من أجل وطنه أولا ثمّ من أجل أبنائه ثانيا و مضى إلى ربه دون أن يقطف أيّ من الثمرتين رحمه الله رحمة واسعة وأسكنه فسيح جنته .

إلى الحضن الدافئ و اللمسة الحانية أمي الحبيبة حفظها الله ورعاها وجزاها عني خير ما جزى والدة عن ولدها وألبسها لباس الصحة والعافية .

إلى حبيبة العمر ورفيقة الدرب ومهجة الفؤاد زوجتي وأم أبنائي أكرمها الله وأحسن مثوبتها .

إلى رياحين الدنيا أبنائي وأحبابي وقرة عيني أسامة ، محسن ووائل ، وإلى كنتي ريمة وحفيدي سامي حفظهم الله جميعا ورزقهم الهُدى والتُقى والعفاف والغِنى والعلم النافع والعمل الصالح وجعلهم ذخرا لأمتهم ووطنهم.

إلى كل حرّ أبيّ يسعى لرفع الغبن والجهل والتخلف عن أمته حتى يعود لهذه الأمة مجدها وعزها التي كانت ترفل فيه يوم كانت خير أمة أُخرجت للناس .

إلى هؤلاء جميعا أهدي هذا العمل المتواضع ، سائلا المولى ﷻ أن ينفع به كاتبه وناشره وقارئه .

عبد الكريم واضحي

مُقَدِّمَة

الحمد لله وكفى والصلاة والسلام على المصطفى والرضى عن الذي على آثاره اقتفى.

يسرني أن أقدم إلى إخواني الأساتذة وأبنائي الطلبة الكتاب الرابع من سلسلة مفاتيح الرياضيات الخاص بالأعداد المركّبة والتحويلات النقطية ، وهو الموضوع الذي ينبغي على المترشح لامتحان شهادة البكالوريا أن يوليه عناية كبيرة ويدرسه دراسة شاملة حتى يتمكن من إحراز العلامة الكاملة فيه نظرا لبساطة قواعده وسهولة مسائله.

ولمساعدة الطلبة في التحضير الجيد لهذا الدرس ، وضعت في بداية الكتاب القواعد الأساسية التي ينبغي معرفتها وكيفية تطبيقها ، وأعقبت ذلك بمائة تمرين نموذجي مرتبة ترتيبا تصاعديا بدءا من التطبيقات المباشرة ووصولا إلى المسائل المعقدة التي تحتاج من الطالب تركيزا شديدا خاصة تلك المتعلقة بشعبتي الرياضيات وتقني رياضي ، ثمّ أدرجت جميع مواضيع الأعداد المركّبة والتحويلات النقطية التي جاءت في الدورات السابقة لامتحان شهادة البكالوريا من 2008 لغاية 2017 ، أمّا مسك ختام الكتاب فهي الحلول المفصلة لجميع التمارين النموذجية ومواضيع البكالوريا الواردة فيه.

وللاستفادة الجيدة من هذا الكتاب ، أنصح أبنائي الطلبة بالانطلاق من القواعد الأساسية لفهم الدرس ، ثمّ الارتقاء عبر التمارين النموذجية للوصول إلى آخر محطة والخاصة بمواضيع البكالوريا ، وبهذا ستكونون جاهزين (بإذن الله) لحل أي تمرين في الأعداد المركّبة والتحويلات النقطية يُطرح عليكم سواء خلال السنة الدراسية أو في امتحان شهادة البكالوريا ، مع تمنياتي لجميع الطلبة سنة دراسية موفقة ومختومة بتقدير جيد أو جيد جدا ولما لا ممتاز في البكالوريا.

عبد الكريم واضحي

قواعد أساسية
في الأعداد المركبة
والتحويلات النقطية

قواعد أساسية في الأعداد المركّبة والتحويلات النقطية

الشكل الجبري لعدد مركّب : $\boxed{\boldsymbol{z = x + iy}}$

$Re(z) = x$ (الجزء الحقيقي) ; $Im(z) = y$ (الجزء التخيّلي) ; $i^2 = -1$

$z = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$; $z' = x' + iy'$; $z = z' \Rightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$

مرافق عدد مركّب : $\boxed{\boldsymbol{\bar{z} = x - iy}}$

$z + \bar{z} = 2x \;;\; z.\bar{z} = x^2 + y^2$

$\bar{z} = z \Rightarrow$ حقيقي z ; $\bar{z} = -z \Rightarrow$ تخيّلي صرف z

طويلة عدد مركّب : $\boxed{\boldsymbol{r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}}}$

$|\bar{z}| = |z| \;;\; |z|^2 = z.\bar{z} \;;\; |z.z'| = |z| \times |z'| \;;\; |z^n| = |z|^n \;;\; \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$

عمدة عدد مركّب : $\boxed{\boldsymbol{arg(z) = \theta + 2k\pi}}$

$cos\,\theta = \frac{x}{r} \;; sin\,\theta = \frac{y}{r}$

$arg(\bar{z}) = -arg(z) \;;\; arg(z.z') = arg(z) + arg(z') \;;$

$arg\left(\frac{z}{z'}\right) = arg(z) - arg(z') \;;\; arg(z^n) = n.arg(z)$

حقيقي $z \Rightarrow arg(z) = k\pi$; تخيّلي صرف $z \Rightarrow arg(z) = \frac{\pi}{2} + k\pi$

الشكل المثلّثي لعدد مركّب : $\boxed{\boldsymbol{z = r(cos\,\theta + i\,sin\,\theta)}}$

$z = x + iy \;= r\left(\frac{x}{r} + i\frac{y}{r}\right) = r(cos\,\theta + i\,sin\,\theta) \;;$

$(cos\,\theta + i\,sin\,\theta)^n = cos\,(n\theta) + i\,sin\,(n\theta)$

الشكل الأسّي لعدد مركّب : $\boxed{\boldsymbol{z = re^{i\theta}}}$

$\bar{z} = re^{-i\theta}; z.z' = r.r'e^{i(\theta+\theta')}; \frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}; \left(re^{i\theta}\right)^n = r^n.e^{in\theta}$

$re^{i\frac{\pi}{2}} = i\,r \;;\; re^{i\pi} = -r$

التفسير الهندسي للأعداد المركّبة :

$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A \;;\; \|\overrightarrow{AB}\| = |z_B - z_A| \;;\; [AB]$ منتصف $I \Rightarrow\; z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$

$G\{(A;\alpha),(B;\beta),(C;\gamma\} \Rightarrow z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha + \beta + \gamma}$

$$\left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = \frac{AC}{AB} \;;\; \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$$

$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ حقيقي $\Rightarrow$ C, B, A على استقامة واحدة

$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ تخيّلي صرف $\Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$

مثال 1 :

C, B, A ثلاث نقط من المستوي لواحقها على الترتيب :

$z_A = 1$ ، $z_B = 2i$ و $z_C = -1 - i$

عيّن طويلة وعمدة العدد المركّب $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$ ، ثمّ استنتج طبيعة المثلث ABC.

$$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{2i - 1}{-2 - i} = \frac{(-1 + 2i)(-2 + i)}{(-2 - i)(-2 + i)} = -\frac{5i}{5} = -i$$

$$\begin{cases} \left|\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right| = 1 \\ \arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) = -\frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AB = AC \\ \left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right) = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{المثلث } ABC \text{ متساوي الساقين و قائم في } A}$

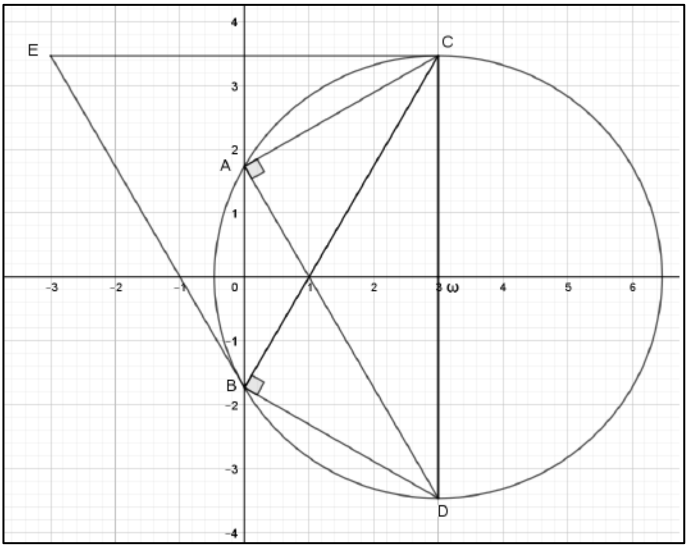
مثال 2 :

E, D, C, B, A نقط من المستوي لواحقها على الترتيب :

$z_A = \sqrt{3}i \,;\, z_B = -\sqrt{3}i \,;\, z_C = 3 + 2\sqrt{3}i \,;$

$z_D = 3 - 2\sqrt{3}i \,;\; z_E = -3 + 2\sqrt{3}i$

مثّل النقط A ، B ، C ، D ، E :



اثبت أنّ النقط A ، B ، C ، D تنتمي إلى دائرة يُطلب تعيين مركزها ونصف قطرها

$\frac{z_C - z_A}{z_D - z_A} = \frac{3+\sqrt{3}i}{3-3\sqrt{3}i} = \frac{\sqrt{3}}{3}i = \frac{\sqrt{3}}{3}e^{i\frac{\pi}{2}} \Rightarrow$ المثلث ACD قائم في A

$\frac{z_C - z_B}{z_D - z_B} = \frac{3+3\sqrt{3}i}{3-\sqrt{3}i} = \sqrt{3}i = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}} \Rightarrow$ المثلث BCD قائم في B

بما أنّ المثلثين ACD و BCD قائمان ولهما نفس الوتر (CD) ، نستنتج أنّ النقط D, C, B, A تنتمي إلى الدائرة التي مركزها ω منتصف $[CD]$ ونصف قطرها $r = \frac{1}{2}CD$.

$$z_\omega = \frac{z_C + z_D}{2} = \frac{3+2\sqrt{3}i+3-2\sqrt{3}i}{2} = 3 \Rightarrow \boxed{\omega(3;0)}$$

$$r = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}|z_D - z_c| = \frac{1}{2}\left|-4\sqrt{3}i\right| = \frac{1}{2}\left(4\sqrt{3}\right) \Rightarrow \boxed{r = 2\sqrt{3}}$$

بيّن أنّ $\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ ، ثمّ استنتج طبيعة المثلث BEC

$$\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = \frac{3+3\sqrt{3}i}{-3+3\sqrt{3}i} = \frac{1+\sqrt{3}i}{-1+\sqrt{3}i} = \frac{\left(1+\sqrt{3}i\right)\left(-1-\sqrt{3}i\right)}{4}$$

$$= \frac{2-2\sqrt{3}i}{4} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \boxed{e^{-i\frac{\pi}{3}}}$$

$$\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = e^{-i\frac{\pi}{3}} \Rightarrow \begin{cases} \left|\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B}\right| = 1 \\ \arg\left(\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B}\right) = -\frac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} BE = BC \\ \left(\overrightarrow{BE};\overrightarrow{BC}\right) = -\frac{\pi}{3} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{المثلث } BEC \text{ متقايس الأضلاع}}$

مثال 3 :

ليكن L عدد مركب حيث : $L = \frac{\bar{z}+2}{z+2}$ و z عدد مركب حيث z ≠ -2. ولتكن M صورة العدد المركب z في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{u},\vec{v})$.

1. **عيّن الجزء الحقيقي والتخيلي للعدد المركب L**

$$L = \frac{\bar{z}+2}{z+2} = \frac{x-iy+2}{x+iy+2} = \frac{(x+2-iy)(x+2-iy)}{(x+2+iy)(x+2-iy)} = \frac{(x+2-iy)^2}{(x+2)^2+y^2}$$

$$L = \frac{(x+2)^2 - y^2 - 2iy(x+2)}{(x+2)^2+y^2} = \boxed{\frac{(x+2)^2 - y^2}{(x+2)^2+y^2} - \frac{2y(x+2)}{(x+2)^2+y^2}i}$$

2. **عيّن مجموعة النقط M من المستوي بحيث يكون L حقيقيا**

L حقيقي $\Rightarrow \begin{cases} 2y(x+2) = 0 \\ (x+2)^2 + y^2 \neq 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 0 \ldots (\Delta) \\ (x; y) \neq (-2; 0) \end{cases} \text{أو} \begin{cases} x = -2 \ldots (\Delta') \\ (x; y) \neq (-2; 0) \end{cases}$$

منه نستنتج أنّ مجموعة النقط M بحيث يكون L حقيقيا هي اتحاد المستقيمين (Δ) و (Δ') باستثناء النقطة $A(-2; 0)$

3. **عيّن مجموعة النقط M من المستوي بحيث يكون L تخيليا صرفا**

$$L \text{ تخيلي صرف} \Rightarrow \begin{cases} (x+2)^2 - y^2 = 0 \\ (x+2)^2 + y^2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 = (x+2)^2 \\ (x; y) \neq (-2; 0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = x + 2 \ldots (D) \\ (x; y) \neq (-2; 0) \end{cases} \text{أو} \begin{cases} y = -x - 2 \ldots (D') \\ (x; y) \neq (-2; 0) \end{cases}$$

منه نستنتج أنّ مجموعة النقط M بحيث يكون L تخيليا صرفا هي اتحاد المستقيمين (D) و (D') باستثناء النقطة $A(-2; 0)$

التحويلات النقطية :

$$\boldsymbol{M(z)} \ ; \ \boldsymbol{M'(z')} \ ; \ \boldsymbol{\omega(z_0)} \ ; \ \boldsymbol{\vec{u}(b)}$$

التحويل النقطي	**العبارة المركّبة**
الانسحاب T الذي شعاعه $\vec{u}$	$\boldsymbol{z' = z + b}$
التحاكي h الذي مركزه ω و نسبته k	$\boldsymbol{z' - z_0 = k(z - z_0)}$
الدوران R الذي مركزه ω و زاويته θ	$\boldsymbol{z' - z_0 = e^{i\theta}(z - z_0)}$
التشابه المباشر S الذي مركزه ω ، نسبته k و زاويته θ	$\boldsymbol{z' - z_0 = ke^{i\theta}(z - z_0)}$

مثال : نعتبر في المستوي المركّب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ النقطتين A و B لاحقتيهما على الترتيب : $z_A = 1 - 2i$ و $z_B = -3 + i$

1. **عيّن النقطة C صورة النقطة B بالانسحاب T الذي شعاعه $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$**

$$C = T(B) \Rightarrow z_C = z_B + z_{\vec{u}} = -3 + i + 2 + i \Rightarrow \boxed{z_C = -1 + 2i}$$

2. **عيّن النقطة D صورة النقطة C بالتحاكي h الذي مركزه A و نسبته 2**

$$D = h(C) \Rightarrow z_D - z_A = 2(z_C - z_A)$$

$$\Rightarrow z_D = 2z_C - z_A = 2(-1 + 2i) - 1 + 2i \Rightarrow \boxed{z_D = -3 + 6i}$$

3. **عيّن النقطة E صورة النقطة D بالدوران R الذي مركزه O و زاويته $-\frac{\pi}{2}$**

$$E = R(D) \Rightarrow z_E - z_O = e^{-i\frac{\pi}{2}}(z_D - z_O)$$

$$\Rightarrow z_E = -iz_D = -i(-3 + 6i) \Rightarrow \boxed{z_E = 6 + 3i}$$

4. عيّن النقطة F صورة النقطة E بالتشابه المباشر S الذي مركزه $\omega(2;1)$ ، نسبته $\frac{1}{2}$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$

$$F=S(E)\Rightarrow z_F-z_\omega=\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}(z_E-z_\omega)\Rightarrow z_F=\frac{1}{2}i(z_E-z_\omega)+z_\omega$$

$$=\frac{1}{2}i(6+3i-2-i)+2+i=\frac{1}{2}i(4+2i)+2+i=2i-1+2+i$$

$$\Rightarrow \boxed{z_F=1+3i}$$

تعيين طبيعة التحويل النقطي المعرّف بعبارته المركّبة $z'=az+b$ ، وذكر عناصره المميّزة

a	طبيعة التحويل	العناصر المميّزة للتحويل
$a=1$	انسحاب شعاعه $\vec{u}$	$z_{\vec{u}}=b$
$a\in\mathbb{R}-\{1\}$	تحاكي مركزه ω ونسبته k	$z_\omega=\frac{b}{1-a}$; $k=a$
$a\in\mathbb{C}$; $\lvert a\rvert=1$	دوران مركزه ω وزاويته θ	$z_\omega=\frac{b}{1-a}$; $\theta=\arg(a)$
$a\in\mathbb{C}$; $\lvert a\rvert\neq1$	تشابه مباشر مركزه ω ، نسبته k وزاويته θ	$z_\omega=\frac{b}{1-a}$; $k=\lvert a\rvert$; $\theta=\arg(a)$

مثال : عيّن طبيعة التحويلات النقطية المعرّفة بالعبارات المركّبة التالية واذكر عناصرها المميّزة

1. $z'=z+2-i$

$a=1$: التحويل هو انسحاب شعاعه $\vec{u}$ حيث $z_{\vec{u}}=2-i$ ، أي $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$

2. $z'=2z+1+3i$

$a=2$: التحويل هو تحاكي مركزه ω ونسبته 2 حيث : $z_\omega=\frac{b}{1-a}=\frac{1+3i}{1-2}=$ $-1-3i$ ، أي $\omega(-1;-3)$

3. $z'=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z+2i$

$|a|=\left|\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|=1$: التحويل هو دوران مركزه ω حيث : $z_\omega=\frac{2i}{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}=$ $-\sqrt{3}+i$ ، أي $\omega(-\sqrt{3};1)$ وزاويته θ حيث : $\theta=\arg a=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ، $\left(\cos\theta=\frac{1}{2}\,;\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

4. $\boldsymbol{z' = 2iz + 1 - 2i}$

$|a| = |2i| = 2$: التحويل هو تشابه مباشر مركزه ω حيث $z_\omega = \frac{1-2i}{1-2i} = 1$

أي $\omega(1;0)$ ، نسبته $k = |a| = 2$ وزاويته $\theta = \arg a = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ،

$(\cos\theta = 0\,;\sin\theta = 1)$

العمليات على الشكل الجبري :

مثال 1 :

اكتب الأعداد المركّبة التالية على شكلها الجبري

$$z_1 = (2+i)^2 = 2^2 + i^2 + 4i = 4 - 1 + 4i = \boxed{3+4i}$$

$$z_2 = (4+2i)(4-2i) = 4^2 - (2i)^2 = 16 - 4i^2 = \boxed{20}$$

$$z_3 = (2-i)^2(1+2i)^2 = [(2-i)(1+2i)]^2$$

$$= (2 + 4i - i - 2i^2)^2 = (4+3i)^2 = 16 - 9 + 24i = \boxed{7+24i}$$

$$z_4 = (3-2i)^3 = 3^3 - 3(3)^2(2i) + 3(3)(2i)^2 - (2i)^3$$

$$= 27 - 54i - 36 + 8i = \boxed{-9-46i}$$

$$z_5 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 3\left(-\frac{1}{2}\right)^2\left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 3\left(-\frac{1}{2}\right)\left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$$

$$= -\frac{1}{8} + \frac{3\sqrt{3}}{8}i + \frac{9}{8} - \frac{3\sqrt{3}}{8}i = \frac{8}{8} = \boxed{1}$$

$$z_6 = \frac{4-6i}{3+2i} = \frac{(4-6i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)} = \frac{12 - 8i - 18i - 12}{3^2 - (2i)^2} = \frac{-26i}{9+4}$$

$$= \frac{-26i}{13} = \boxed{-2i}$$

$$z_7 = \frac{1+i}{3-i\sqrt{2}} = \frac{(1+i)\left(3+i\sqrt{2}\right)}{\left(3-i\sqrt{2}\right)\left(3+i\sqrt{2}\right)} = \frac{3 + i\sqrt{2} + 3i + i^2\sqrt{2}}{3^2 - \left(i\sqrt{2}\right)^2}$$

$$= \frac{3 - \sqrt{2} + \left(3+\sqrt{2}\right)i}{9+2} = \frac{3 - \sqrt{2} + \left(3+\sqrt{2}\right)i}{11}$$

$$= \boxed{\frac{3-\sqrt{2}}{11} + \frac{\left(3+\sqrt{2}\right)}{11}i}$$

$$z_8 = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{4n} = \left[\frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}\right]^{4n} = \left(\frac{1+i+i+i^2}{1-i^2}\right)^{4n}$$

$$= \left(\frac{2i}{2}\right)^{4n} = (i)^{4n} = 1$$

$$z_9 = \frac{(\cos\theta + i\sin\theta)}{(\cos\theta - i\sin\theta)} = \frac{(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta + i\sin\theta)}{(\cos\theta - i\sin\theta)(\cos\theta + i\sin\theta)}$$

$$= \frac{(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta + i\sin\theta)}{(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2}$$

$$= (\cos\theta)^2 - (\sin\theta)^2 + 2i\cos\theta\sin\theta = \boxed{\cos 2\theta + i\sin 2\theta}$$

تعيين الجذرين التربيعيين لعدد مركب :

$$\boldsymbol{z^2 = 8 - 6i}\ ;\ z = x + iy \Rightarrow z^2 = (x+iy)^2 = \underbrace{x^2 - y^2}_{8} + \underbrace{2xy}_{-6}\, i;$$

$$|z^2| = x^2 + y^2 = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$$

$$z^2 = 8 - 6i \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x^2 - y^2 = 8 \\ 2xy = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 = 18 \\ xy = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 9 \\ y = -\dfrac{3}{x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases} \text{أو} \begin{cases} x = -3 \\ y = 1 \end{cases}$$

الجذرين التربيعيين للعدد $8 - 6i$ هما : $z_1 = 3 - i$ و $z_2 = -3 + i$.

$$\boldsymbol{z^2 = -15 + 8i}\ ; z = x + iy \Rightarrow z^2 = (x+iy)^2 = \underbrace{x^2 - y^2}_{-15} + \underbrace{2xy}_{8}\, i$$

$$|z^2| = \sqrt{(-15)^2 + 8^2} = 17$$

$$z^2 = -15 + 8i \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 17 \\ x^2 - y^2 = -15 \\ 2xy = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 = 2 \\ xy = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ y = \dfrac{4}{x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases} \text{أو} \begin{cases} x = -1 \\ y = -4 \end{cases}$$

الجذرين التربيعيين للعدد $-15 + 8i$ هما : $z_1 = 1 + 4i$ و $z_2 = -1 - 4i$.

حل معادلات من الدرجة الأولى :

$$\boldsymbol{3z - 2 + i = (1 + i)z - 1 - 2i}$$

$$\Rightarrow 3z - (1+i)z = -1 - 2i + 2 - i \Rightarrow (3 - 1 - i)z = 1 - 3i$$

$$\Rightarrow (2 - i)z = 1 - 3i \Rightarrow z = \frac{1 - 3i}{2 - i} = \frac{(1 - 3i)(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)}$$

$$= \frac{2 + i - 6i - 3i^2}{5} = \frac{5 - 5i}{5} = \boxed{1 - i}$$

$$\boldsymbol{(3-4i)z^2 = iz} \Rightarrow (3-4i)z^2 - iz = 0 \Rightarrow z[(3-4i)z - i] = 0$$

$$\Rightarrow z = 0 \text{ أو } (3-4i)z - i = 0$$

$$(3-4i)z = i \Rightarrow z = \frac{i}{3-4i} = \frac{i(3+4i)}{25} = -\frac{4}{25} + \frac{3}{25}i$$

$$\boxed{S = \left\{0\ ;\ -\frac{4}{25} + \frac{3}{25}i\right\}}$$

$$\boldsymbol{\frac{z+1}{z-1} = 2i} \Rightarrow z + 1 = 2i(z-1) \Rightarrow z - 2iz = -1 - 2i$$

$$\Rightarrow z(1-2i) = -1-2i \Rightarrow z = \frac{-1-2i}{1-2i} = \frac{(-1-2i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}$$

$$\Rightarrow z = \frac{-1-2i-2i+4}{5} = \frac{3-4i}{5} = \boxed{\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i}$$

حل معادلات من الدرجة الثانية :

$$\boldsymbol{z^2 + 2z + 5 = 0}\ ;\ \Delta = -16 = (4i)^2$$

$$z_1 = \frac{-2-4i}{2} = -1-2i\ ;\ z_2 = \frac{-2+4i}{2} = -1+2i$$

$$\boldsymbol{z^2 - 4\bar{z} - 5 = 0} \Rightarrow (x+iy)^2 - 4(x-iy) - 5 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - y^2 + 2ixy - 4x + 4iy - 5 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - y^2 - 4x - 5 + 2iy(x+2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 - 4x - 5 = 0 \\ 2y(x+2) = 0 \end{cases}$$

- $y = 0 \Rightarrow x^2 - 4x - 5 = 0 \Rightarrow x = -1$ أو $x = 5$

  $\Rightarrow z_1 = -1\ ;\ z_2 = 5$
- $x = -2 \Rightarrow y^2 = 7 \Rightarrow y = \sqrt{7}$ أو $y = -\sqrt{7}$

  $\Rightarrow z_3 = -2 + \sqrt{7}i\ ;\ z_4 = -2 - \sqrt{7}i$

$$\boxed{S = \left\{-1\ ;\ 5\ ;\ -2+\sqrt{7}i\ ;\ -2-\sqrt{7}i\right\}}$$

الانتقال بين الأشكال الثلاثة (الجبري ، المثلّثي ، الأسّي) لعدد مركب :

مثال 1 :

$$\boldsymbol{z_1 = 2 + 2i}\ ;\ |z| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{|z|} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\ ;\ \sin\theta = \frac{y}{|z|} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\ ;\ \theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

$$\boxed{z_1 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}$$

$$\boldsymbol{z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right] = \frac{\sqrt{3}}{2}\left[\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right]$$

$$\boxed{z_2 = \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i}$$

$$\underbrace{\boldsymbol{z_3 = 4\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)}}_{\text{ليس شكلا مثلّثيا}} = 4\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] = \boxed{4e^{-i\frac{\pi}{4}}}$$

$$z_3 = 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \boxed{2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i}$$

$$\underbrace{\boldsymbol{z_4 = -3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)}}_{\text{ليس شكلا مثلّثيا}} = 3\left(-\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= 3\left[cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) + i\ sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$= 3\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) = \boxed{3e^{i\frac{4\pi}{3}}}$$

$$z_4 = 3\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \boxed{-\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i}$$

$$\underbrace{\boldsymbol{z_5 = \sqrt{5}\left(\sin\frac{\pi}{6} + i\cos\frac{\pi}{6}\right)}}_{\text{ليس شكلا مثلّثيا}} = \sqrt{5}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$= \sqrt{5}\left(cos\ \frac{\pi}{3} + i\ sin\frac{\pi}{3}\right) = \boxed{\sqrt{5}e^{i\frac{\pi}{3}}}$$

$$z_5 = \sqrt{5}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \boxed{\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{15}}{2}i}$$

طريقة ثانية لحساب z_5 :

$$\boldsymbol{z_5 = \sqrt{5}\left(\sin\frac{\pi}{6} + i\cos\frac{\pi}{6}\right)} = \sqrt{5}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$= \sqrt{5}\left(cos\frac{\pi}{3} + i\ sin\frac{\pi}{3}\right) = \boxed{\sqrt{5}e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{15}}{2}i}$$

مثال 2 :

نعتبر العددين المركّبين z_1 و z_2 حيث : $z_1 = -\sqrt{3} + i$ ، $z_2 = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$

اكتب z_1 و z_2 على الشكل الأسّي

$$\begin{cases} |z_1| = \sqrt{3+1} = 2 \\ \cos\theta_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}\ ;\ \sin\theta_1 = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |z_1| = 2 \\ \arg(z_1) = \frac{5\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow \boxed{z_1 = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}}$$

$$\begin{cases} |z_2| = \sqrt{2+2} = 2 \\ \cos\theta_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\ ;\ \sin\theta_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |z_2| = 2 \\ \arg(z_2) = -\frac{\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \boxed{z_2 = 2e^{-i\frac{\pi}{4}}}$$

استنتج الطويلة وعمدة للعدد المركّب L حيث : $L = \frac{-\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}$

$$L = \frac{z_1}{z_2} \Rightarrow \begin{cases} |L| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \\ \arg(L) = \theta_1 - \theta_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |L| = \frac{2}{2} \\ \arg(L) = \frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} |L| = 1 \\ \arg(L) = \frac{13\pi}{12} \end{cases}}$$

اكتب العدد المركّب L على الشكل الجبري

$$L = \frac{-\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}-\sqrt{2}i} = \frac{\left(-\sqrt{3}+i\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}i\right)}{\left(\sqrt{2}-\sqrt{2}i\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}i\right)}$$

$$\Rightarrow \boxed{L = \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} + \frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}i}$$

استنتج قيمتي $\cos\frac{13\pi}{12}$ و $\sin\frac{13\pi}{12}$

$$L = \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} + \frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}i = \cos\frac{13\pi}{12} + i\ \sin\frac{13\pi}{12}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} \cos\frac{13\pi}{12} = \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \\ \sin\frac{13\pi}{12} = \frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \end{cases}}$$

مجموعات النقط في الأعداد المركّبة :

من الأسئلة الشهيرة والمتكررة في الأعداد المركّبة ، تعيين مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z والتي تحقق علاقة معينة، وللإجابة عن هذه الأسئلة يمكننا استعمال طريقتين مختلفتين إحداهما حسابية (طويلة نوعا ما) والأخرى هندسية (بسيطة ومختصرة) ، وهذه بعض القواعد التي تساعدك على تعيين مجموعة النقط :

1. $\boldsymbol{|z| = k}$: دائرة مركزها O ونصف قطرها k حيث $k > 0$
2. $\boldsymbol{|z - z_A| = k}$: دائرة مركزها A ونصف قطرها k حيث $k > 0$
3. $\boldsymbol{|z - z_A| = |z - z_B|}$: محور القطعة $[AB]$
4. $\boldsymbol{arg(z) = \theta}$: نصف مستقيم مبدؤه O وميله $\tan\theta$
5. $\boldsymbol{arg(z - z_A) = \theta}$: نصف مستقيم مبدؤه A وميله $\tan\theta$
6. $\boldsymbol{arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right) = 2k\pi}$: المستقيم (AB) باستثناء القطعة $[AB]$
7. $\boldsymbol{arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right) = \pi + 2k\pi}$: القطعة $[AB]$ باستثناء النقطتين A وB
8. $\boldsymbol{arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right) = k\pi}$: المستقيم (AB) باستثناء النقطة B
9. $\boldsymbol{arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi}$: نصف الدائرة التي قطرها $[AB]$ باستثناء النقطة B
10. $\boldsymbol{arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi}$: الدائرة التي قطرها $[AB]$ باستثناء النقطة B

ملاحظة: لتعيين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث $z = z_A + ke^{i\theta}$ ، نتعامل دائما مع القيمة الثابتة على النحو التالي:

الحالة الأولى: k ثابت وθ يمسح $\mathbb{R}$

$$z = z_A + 2e^{i\theta} \Rightarrow z - z_A = 2e^{i\theta} \Rightarrow |z - z_A| = 2$$

مجموعة النقط M هي دائرة مركزها A ونصف قطرها 2

الحالة الثانية: θ ثابت وk يمسح $\mathbb{R}_+$

$$z = z_A + ke^{i\frac{\pi}{4}} \Rightarrow z - z_A = ke^{i\frac{\pi}{4}} \Rightarrow \arg(z - z_A) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

مجموعة النقط M هي نصف المستقيم الذي مبدؤه A وميله $\tan\frac{\pi}{4} = 1$

(للمزيد من التفاصيل انظر التمرين 11)

100 تمرين نموذجي
في الأعداد المركبة
والتحويلات النقطية

+

مواضيع
الأعداد المركبة
في البكالوريا

التمرين 1.

اكتب الأعداد المركبة التالية على شكلها الجبري :

$z_1 = (2+i)^2$ ، $z_2 = (4+2i)(4-2i)$ ، $z_3 = (2-i)^2(1+2i)^2$ ،

$z_4 = (3-2i)^3$ ، $z_5 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$ ، $z_6 = \frac{4-6i}{3+2i}$ ، $z_7 = \frac{1+i}{3-i\sqrt{2}}$ ،

$z_8 = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{4n}$ ، $z_9 = \frac{(\cos\theta + i\sin\theta)}{(\cos\theta - i\sin\theta)}$.

* * *

التمرين 2.

حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلات التالية :

$1)\ 3z - 2 + i = (1+i)z - 1 - 2i\ ;\ 2)\ (3-4i)z^2 = iz\ ;\ 3)\ \dfrac{z+1}{z-1} = 2i$

$4)\dfrac{\bar{z}-1}{\bar{z}+1} = i\ \ ;\ 5)\ z^2 + z.\bar{z} - 4 - 6i = 0$

$6)\ (1+i)z - (2-i)\bar{z} + (3+4i) = 0\ ;7)\ (2z+1-i)(i\bar{z}+i-2) = 0$

* * *

التمرين 3.

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - 2i\bar{z} = 0 \ldots (1)$
2. نسمي C, B, A, O صور حلول المعادلة (1) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$. أثبت أنّ المثلث ABC متقايس الأضلاع.

* * *

التمرين 4.

نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ ، النقط A، B ، C وD لواحقها على الترتيب :

$z_A = 2-i$ ، $z_B = 3+2i$ ، $z_C = -1+4i$ ، $z_D = -2+i$.

أثبت أنّ الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع.

* * *

التمرين 5.

نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ ، النقط A ، B وC لواحقها على الترتيب :

$z_A = 3-i$ ، $z_B = -2+3i$ ، $z_C = -1-2i$.

احسب مجموع هذه اللواحق وفسّر النتيجة هندسيا.

* * *

التمرين 6.

نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ ، النقط A ، B وC لواحقها على الترتيب :

$z_A=-1+2i$ ، $z_B=1+3i$ ، $z_C=3$.

1. عيّن z_G لاحقة النقطة G مرجح الجملة $\{(A,-1);(B,2);(C,1)\}$
2. بيّن أنّ المستقيمين (AC) و (BG) متوازيان
3. عيّن مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق $-MA^2+2MB^2+MC^2=6$.

التمرين 7.

ليكن L عدد مركب حيث : $L=\frac{z+1}{z-1}$ و z عدد مركب حيث $z\neq 1$. ولتكن النقطتان M وM' صورتي العددين المركبين z و L على الترتيب في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$.

عيّن مجموعة النقط M ذات اللاحقة z في كل حالة من الحالات التالية :

1. يكون العدد L حقيقيا.
2. يكون العدد L تخيليا صرفا.
3. تكون النقط O ، M وM' في استقامية.

التمرين 8.

يُنسب المستوي المركب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر العدد المركّب L حيث : $L=\frac{z-2+i}{z+2i}$.

1. اكتب العدد المركّب L على شكله الجبري
2. عيّن E مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي يكون من أجلها L حقيقيا.
3. عيّن F مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي يكون من أجلها L تخيليا صرفا.
4. أنشئ المجموعتين E وF.

التمرين 9.

نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ ، النقطتين A وB لاحقتاهما على الترتيب : $z_A=2+i$ ، $z_B=-2-2i$.

1. عيّن z_ω لاحقة النقطة ω مركز الدائرة (Γ) ذات القطر $[AB]$.
2. لتكن C النقطة ذات اللاحقة z_C حيث : $z_C=\frac{4-i}{1+i}$.
   - أ. اكتب z_C على الشكل الجبري.
   - ب. أثبت أنّ النقطة C تنتمي إلى الدائرة (Γ).

* * *

التمرين 10.

اكتب الأعداد المركّبة التالية على شكلها المثلثي :

$z_1 = 1+i$ ، $z_2 = 3-3i$ ، $z_3 = -\sqrt{3}-i$ ، $z_4 = 1-i\sqrt{3}$ ،
$z_5 = -\sqrt{6}+i\sqrt{2}$ ، $z_6 = -\sqrt{5}-i\sqrt{15}$ ، $z_7 = -2+2i$ ، $z_8 = \frac{5+11i\sqrt{3}}{7-4i\sqrt{3}}$ ،
$z_9 = \frac{1+i}{\sqrt{3}+i}$ ، $z_{10} = \frac{2}{1+i\sqrt{3}}$.

التمرين 11.

عيّن وأنشئ في كل حالة من الحالات التالية المجموعة (Γ) للنقط M ذات اللاحقة z حيث :

1) $|z+1+2i| = |z-4|$ ، 2) $|z-3i| = 2$ ، 3) $|\bar{z}-2+i| = 1$
4) $|iz+1-i| = |z-1|$ ، 5) $|z|^2 = z+\bar{z}$ ، 6) $\left|\frac{z+3+i}{z-1+i}\right| = \sqrt{2}$
7) $\arg(z+2-3i) = \frac{\pi}{6}$ ، 8) $\arg\left(\frac{z-1+2i}{z-i}\right) = \frac{\pi}{2}$ ،
9) $\arg\left(\bar{z}-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ، 10) $\arg\left(\frac{z}{\bar{z}}\right) = 2k\pi$
11) $\arg(z-1)-\arg(z-i) = \frac{\pi}{2}+2k\pi$ ، 12) $z = 1+i+2e^{i\theta}$
13) $z = 1+i+ke^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}$ ، 14) $z = k(1+i)e^{i\left(\frac{7\pi}{12}\right)}$.

التمرين 12.

ليكن العدد المركب Z حيث : $Z = \frac{\sqrt{3}+i}{1-i}$

1. احسب طويلة العدد المركب Z وعمدة له.
2. اكتب Z على الشكل الجبري.
3. استنتج $\cos\frac{5\pi}{12}$ و $\sin\frac{5\pi}{12}$.
4. بيّن أنّ $\left(\frac{Z}{\sqrt{2}}\right)^{12n}$ عدد حقيقي.

التمرين 13.

بيّن مع التعليل صحة أو خطأ الجمل التالية :

1. طويلة العدد المركب $cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\,sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$ هي 1
2. عمدة للعدد المركب $\left(1-\sqrt{2}\right)e^{i\frac{\pi}{3}}$ هي $\frac{\pi}{3}$
3. عمدة للعدد المركب $2+3i$ معاكسة لعمدة للعدد المركب $2-3i$
4. $5-i$ و $\frac{5-i}{3\pi+4\sqrt{2}-1}$ لهما نفس العمدة

التمرين 14.

عيّن عمدة لكل عدد من الأعداد المركبة التالية :

$$z_1=\left(cos\frac{\pi}{7}+i\ sin\frac{\pi}{7}\right)\left(cos\frac{\pi}{4}+i\ sin\frac{\pi}{4}\right)\ ;\ z_2=\left(cos\frac{\pi}{7}+i\ sin\frac{\pi}{7}\right)\left(cos\frac{\pi}{4}-i\ sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$z_3=-2\left(cos\frac{\pi}{7}+i\ sin\frac{\pi}{7}\right)\left(cos\frac{\pi}{4}+i\ sin\frac{\pi}{4}\right)\ ;\ z_4=e^{i\frac{\pi}{3}}\times e^{-i\frac{\pi}{2}}\ ; z_5=e^{i\pi}+e^{i\frac{\pi}{3}}$$

* * *

التمرين 15.

عيّن الطويلة وعمدة لكل واحد من الأعداد المركبة التالية :

$z_1=4\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ ، $z_2=-3\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ ،

$z_3=\sqrt{5}\left(\sin\frac{\pi}{6}+i\cos\frac{\pi}{6}\right)$ ، $z_4=\sin\frac{\pi}{6}-i\cos\frac{\pi}{6}$.

* * *

التمرين 16.

z ، v و u أعداد مركبة حيث :

$$z=\left(3+\sqrt{3}\right)+i\left(-3+\sqrt{3}\right)\ ; u=3+i\sqrt{3}\ ; v=\frac{z}{u}$$

1. اكتب v على الشكل الجبري.
2. عيّن الطويلة وعمدة لكل من الأعداد المركبة u ، v و z.
3. استنتج $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$.
4. أثبت أنّ العدد z^{2010} تخيّلي صرف.

* * *

التمرين 17.

1. اكتب الأعداد المركّبة التالية على الشكل الجبري :

$$1)\ z=6e^{i\frac{3\pi}{4}}\ ;\ 2)\ z=\sqrt{5}e^{i\frac{3\pi}{2}}\ ;\ 3)\ z=\frac{1}{2}e^{i\pi}\ ;\ 4)\ z=2\sqrt{3}e^{-i\frac{2\pi}{3}}$$

2. اكتب الأعداد المركّبة التالية على الشكل الأسّي

$$1)\ z_1=2-2i\ ;\ 2)\ z_2=3\sqrt{3}-3i\ ;\ 3)\ z_3=\frac{5}{4}i\ \ ;\ 4)\ z_4=-1$$

3. أعط شكلا أسّيا للأعداد المركّبة التالية

$$1)\ z_1=\left(2\sqrt{3}+6i\right)e^{i\frac{\pi}{2}}\qquad ;\qquad 2)\ z_2=\left(\sqrt{3}+i\sqrt{3}\right)e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$3)\ z_3=\left(1-\sqrt{2}\right)e^{i\frac{\pi}{4}}\qquad ;\qquad 4)\ z_4=3\left(\cos\frac{\pi}{7}-i\sin\frac{\pi}{7}\right)$$

* * *

التمرين 18.

نعتبر العددين المركبين z_1 و z_2 حيث : $z_1=-\sqrt{3}+i$ ، $z_2=\sqrt{2}-\sqrt{2}i$

1. اكتب z_1 و z_2 على الشكل الأسّي

2. استنتج الطويلة وعمدة للعدد المركّب L حيث : $L = \frac{-\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}$
3. اكتب العدد المركّب L على الشكل الجبري
4. استنتج قيمتي $\cos\frac{13\pi}{12}$ و $\sin\frac{13\pi}{12}$

التمرين 19.

$d = 2-2i\ ;\ c = 2i\ ;\ b = -1-i\ ;\ a = -1+i$

1. احسب طويلة وعمدة لكل من العددين المركّب $\frac{c-a}{d-a}$ و $\frac{c-b}{d-b}$
2. استنتج طبيعة المثلثين ACD و BCD.
3. بيّن أنّ النقط D, C, B, A تنتمي إلى دائرة يُطلب تحديد مركزها ونصف قطرها.

التمرين 20.

عيّن الجذرين التربيعيين لكل من الأعداد المركّبة التالية :

$z_1 = 8-6i$ ، $z_2 = -15+8i$ ، $z_3 = -3-4i$ ، $z_4 = 2i$ ، $z_5 = -4$ ، $z_6 = 1+4\sqrt{5}i$

التمرين 21.

حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلات التالية :

$$1)\ z^2+2z+10=0\ ;\ 2)\ z^2+4=0\ ;\ 3)\ z^2-8\sqrt{3}z+64=0\ ;$$
$$4)\ z^2-3z+3=0\ ;\ 5)\ (z+2i-1)(z^2-2z+2)=0\ ;$$
$$6)\ z^2+4z+5=0\ ;\ 7)\ 4z^2-2z+1=0\ ;\ 8)\ z^2-z+1=0\ ;$$
$$9)\ z^2-2z\cos\alpha+1=0\ ;\ 10)\ 2z^2+8z\sin\theta+5-3\cos 2\theta=0$$

التمرين 22.

نعتبر كثير الحدود للمتغير المركّب z المعرف بـ : $P(z) = z^3+2z^2-16$

1. تحقق أنّ العدد 2 جذر لـ $P(z)$ ، ثمّ استنتج تحليلا لـ $P(z)$
2. حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z)=0$ ، ثمّ اكتب الحلول على الشكل الأسّي
3. نعتبر في المستوي المركّب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$، النقط D, B, A لواحقها على الترتيب : $z_A = -2-2i$; $z_B = 2$; $z_D = -2+2i$
   - أ. عيّن z_C لاحقة النقطة C حتى يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع
   - ب. عيّن z_E و z_F لاحقتي النقطتين E و F حيث :

$$z_E - z_B = e^{-i\frac{\pi}{2}}(z_C - z_B) \quad \text{و} \quad z_F - z_D = e^{i\frac{\pi}{2}}(z_C - z_D)$$

   - ج. تحقق أنّ $\frac{z_F - z_A}{z_E - z_A} = i$ ، ثمّ استنتج طبيعة المثلث AEF.

* * *

التمرين 23.

نعتبر كثير الحدود للمتغير المركّب z المعرف بـ :

$$P(z) = z^3 - (4+i)z^2 + (5+4i)z - 5i$$

1. تحقّق أنّ المعادلة $P(z) = 0$ تقبل حلا تخيليا صرفا يُطلب تعيينه
2. عيّن $Q(z)$ حيث : $P(z) = (z-i)Q(z)$ ، ثمّ استنتج حلول المعادلة $P(z) = 0$
3. نعتبر في المستوي المركب المزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ النقط A ، B ، C ذات اللواحق : $z_A = i$ ، $z_B = 2+i$ و $z_C = 2-i$ على الترتيب.
عيّن إحداثيات النقطة D حتى يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع.

التمرين 24.

$$\alpha = \sqrt{2-\sqrt{2}} - i\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

1. احسب α^2 و α^4
2. اكتب α^4 على الشكل المثلثي
3. استنتج طويلة وعمدة للعدد α
4. احسب $\cos\frac{13\pi}{8}$ و $\sin\frac{13\pi}{8}$
5. عيّن مجموعة النقط M حيث : $|\alpha z| = 8$

التمرين 25.

I- ليكن L عدد مركب حيث : $L = \frac{\bar{z}+2}{z+2}$ و z عدد مركب حيث $z \neq -2$. و لتكن M صورة العدد المركب z في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{u},\vec{v})$.

1. عيّن الجزء الحقيقي و التخيلي للعدد المركب L
2. عيّن مجموعة النقط M من المستوي بحيث يكون L حقيقيا
3. عيّن مجموعة النقط M من المستوي بحيث يكون L تخيليا صرفا

II- نعتبر العددين المركبيّن : $z_1 = \cos\frac{7\pi}{12} + i\ \sin\frac{7\pi}{12}$ و $z_2 = -\sqrt{3} + 3i$

1. أكتب z_1 و z_2 على الشكل الأسي
2. أكتب $z_1 \times z_2$ على الشكلين المثلثي والجبري ، ثمّ استنتج كتابة z_1 على الشكل الجبري
3. احسب $(z_1)^{36} + (z_1)^{120}$ ، ثمّ $\left(\frac{z_2}{2\sqrt{3}}\right)^{20}$.

التمرين 26.

نعتبر كثير الحدود للمتغير المركب z المعرف بـ : $P(z) = z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63$

1. احسب $P(-\sqrt{3}i)$ ، $P(\sqrt{3}i)$ ، ثمّ عيّن الأعداد الحقيقية a ، b ، c بحيث من أجل كل عدد مركب z : $P(z) = (z^2+3)(az^2+bz+c)$

2. حل في ℂ المعادلة $P(z) = 0$
3. المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$
   أ. مثل النقط A ، B ، C ، D ذات اللواحق على الترتيب :

$$z_A = \sqrt{3}i \text{ ، } z_B = -\sqrt{3}i \text{ ، } z_C = 3 + 2\sqrt{3}i \text{ ، } z_D = \overline{z_C}$$

   ب. أثبت أنّ النقط A ، B ، C ، D تنتمي إلى نفس الدائرة
4. لتكن النقطة E نظيرة D بالنسبة إلى المبدأ O.

بيّن أنّ : $\frac{z_C-z_B}{z_E-z_B} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ ، ثمّ عيّن طبيعة المثلث BEC.

* * *

التمرين 27.

I- نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة ℂ المعادلة :

$$z^3-(4+i)z^2+(13+4i)z-13i = 0 \dots.(E)$$

1. برهن أنّ العدد المركب i حل للمعادلة (E)
2. عيّن الأعداد الحقيقية a ، b ، c بحيث من أجل كل عدد مركب z لدينا :

$$z^3-(4+i)z^2+(13+4i)z-13i = (z-i)(az^2+bz+c)$$

3. استنتج حلول المعادلة (E)

II- نعتبر في المستوي المركب المزود بمعلم متعامد و متجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ النقط A ، B ، C ذات اللواحق : $z_A = i$ ، $z_B = 2+3i$ و $z_C = 2-3i$ على الترتيب

1. ليكن r الدوران الذي مركزه B و زاويته $\frac{\pi}{4}$. عيّن $z_{A},$ لاحقة A' صورة A بالدوران r
2. برهن أن النقط A' ، B ، C في استقامية
3. عيّن الكتابة المركبة للتحاكي ذي المركز B و الذي يحوّل C إلى A'.

* * *

التمرين 28.

في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$.

1. أنشئ النقط C، B، A ذات اللواحق $z_A = 1+i$ ، $z_B = 2-i$ و$z_C = 3+2i$ على الترتيب
2. احسب لاحقتي الشعاعيّن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$
3. فسّر هندسيا الطويلة و العمدة للعدد المركب : $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$
4. بيّن أنّ : $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A} = e^{i\frac{\pi}{2}}$ ، ثمّ استنتج طبيعة المثلث ABC
5. عيّن لاحقة النقطة I مركز الدائرة (Γ) المحيطة بالمثلث ABC ،
6. ثمّ احسب نصف قطرها r. ارسم الدائرة (Γ)
7. عيّن لاحقة النقطة D حتى يكون الرباعي ABDC مربعا.

* * *

التمرين 29.

I- نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة ℂ المعادلة التالية : (1) .... $z^2-6z+18=0$

1. أوجد z_1 و z_2 حلي المعادلة (1)
2. أكتب الحلين على الشكل الأسي
3. بيّن أنّ العدد $(z_1)^{1430}$ تخيلي صرف.

II- في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{u},\vec{v})$. نعتبر النقط A ، B ، C لواحقها على الترتيب الأعداد المركبة : $z_A=3+3i$ ، $z_B=3-3i$ و $z_C=-3+3i$

1. بيّن أنّ : $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=e^{i\frac{\pi}{2}}$
2. استنتج طبيعة المثلث ABC.

* * *

التمرين 30.

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة ℂ المعادلة التالية : (1) .... $z^3-4\sqrt{3}z^2+16z=0$

1. حل في المجموعة ℂ المعادلة (1)
2. في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{u},\vec{v})$. نعتبر النقط A ، B ، C التي لواحقها على الترتيب : $z_A=2\sqrt{3}+2i$ ، $z_B=2\sqrt{3}-2i$ و $z_C=4\sqrt{3}$
   - أ. احسب الطويلة و عمدة للعدد المركب Z : $Z=\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$
   - ب. استنتج طبيعة المثلث ABC.
3. أوجد قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها Z^n حقيقيا سالبا. احسب Z^{2010}
4. ليكن G_α مرجح الجملة المثقلة $\{(A,2\alpha);(B,\alpha);(C,-3\alpha+1)\}$ ، حيث α عدد حقيقي. عيّن مجموعة النقط G_α عندما يتغير α في ℝ.

* * *

التمرين 31.

ليكن العددين المركّبين :

$$z_2=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\sqrt{3}+1+\left(\sqrt{3}-1\right)i\right]\ ;\ z_1=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\sqrt{3}-1+\left(\sqrt{3}+1\right)i\right]$$

1. احسب كلا من : $z_1\times z_2$ و $\frac{z_1}{z_2}$
2. احسب كلا من : $|z_1\times z_2|$ ، $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|$ واستنتج $|z_1|$ ، $|z_2|$
3. احسب عمدة لكل من : $z_1\times z_2$ ، $\frac{z_1}{z_2}$ واستنتج عمدة لكل من : z_1 ، z_2
4. لتكن $\frac{\pi}{12}$ عمدة للعدد المركّب z_2

- أ. اكتب العدد z_2 على شكله المثلثي
- ب. استنتج القيمتين المضبوطتين لـ $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$
- ج. احسب العدد $\left(\frac{z_2}{2}\right)^{2012}$.

* * *

التمرين 32.

1. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $|z|^2 - z^2 - 2\bar{z} - 6 = 0$
2. نعتبر z_1 الحل الحقيقي و z_2 الحل الذي جزؤه التخيلي سالب
   - أ. عيّن الشكل الأسي للعدد المركب $(-z_1 - z_2)$
   - ب. عيّن الأعداد الطبيعية n حيث : $(-z_1 - z_2)^n \in \mathbb{R}$
   - ج. احسب العدد $(-z_1 - z_2)^{2010}$
3. نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{u},\vec{v})$ النقط A(-3;0) ، B(1;2) ، C(1;-2)
   - أ. عيّن إحداثيي G مرجح الجملة $\{(A,1);(B,-1);(C,1)\}$
   - ب. عيّن مجموعة النقط M حيث : $MA^2 - MB^2 + MC^2 = 0$. ماذا تمثل النقطة G بالنسبة لهذه المجموعة ؟

* * *

التمرين 33.

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ كثير الحدود : $P(z) = z^3 - 3z^2 + 3z + 7$

1. احسب P(-1) ، ثمّ حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة P(z) = 0
2. المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{u},\vec{v})$ ، وحدة الطول $2\ cm$.
   لتكن النقط A ، B ، C ، G ذات اللواحق: 1- ، $2 + i\sqrt{3}$ ، $2 - i\sqrt{3}$ و 3 على الترتيب
   - أ. مثّل النقط A ، B ، C ، G في المعلم السابق
   - ب. احسب الأطوال AB ، AC ، BC ، ثمّ استنتج طبيعة المثلث ABC
   - ج. احسب عمدة للعدد المركب $\frac{z_A - z_C}{z_G - z_C}$ ، ثمّ استنتج طبيعة المثلث GAC
3. لتكن (E) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق :
   $$\left(-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\right).\overrightarrow{CG} = 12$$
   - أ. أثبت أنّ G مرجح الجملة $\{(A,-1);(B,2);(C,2)\}$
   - ب. تحقّق أنّ النقطة A تنتمي إلى المجموعة (E)
   - ج. عيّن المجموعة (E) ، ثمّ أنشئها.

* * *

التمرين 34.

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o, \vec{u}, \vec{v})$.

لتكن الأعداد المركبة $z_A = 3 + 2i$ ، $z_B = -3$ ، $z_C = -1 - 6i$ ، $z_I = 1 - 2i$. نضع

$$Z = \frac{z_I - z_A}{z_I - z_B}$$

1. أكتب Z على شكله الجبري
2. عيّن طويلة و عمدة Z ، ثمّ استنتج طبيعة المثلث AIB
3. عيّن إحداثيات النقطة D مرجح الجملة $\{(A, 1); (B, -1); (C, 1)\}$ ، ثمّ استنتج طبيعة الرباعي ABCD
4. عيّن و أنشئ مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق :

أ. $\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\|$

ب. $\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 2\sqrt{10}$

* * *

التمرين 35.

I- نعتبر P(z) كثير حدود ذو المجهول المركب z حيث : $P(z) = z^3 - 8z^2 + 24z - 32$

1. بيّن أن $z_0 = 4$ حل للمعادلة $P(z) = 0$
2. عيّن العددين الحقيقيين a و b حيث : $P(z) = (z - 4)(z^2 + az + b)$
3. حل في C المعادلة : $P(z) = 0$

II- نعتبر A ، B ، C ثلاث نقط من المستوي المركب ذات اللواحق 4 ، $2 - 2i$ ، $2 + 2i$ على الترتيب ، ولتكن G_α مرجح الجملة المثقلة $\{(A,\alpha) ; (B,2) ; (C,2)\}$ و I منتصف القطعة [BC]

1. بيّن أن النقط A ، B ، C تنتمي إلى دائرة مركزها I
2. ما هي قيم α حتى تكون G_α مرجح الجملة المثقلة
3. بيّن أنه إذا كانت G_α مرجح الجملة المثقلة ، فإنها تحقق العلاقة التالية : $\overrightarrow{IG_\alpha} = \frac{\alpha}{\alpha+4}\overrightarrow{IA}$ ، ثم استنتج مجموعة النقط G_α لما α يتغير
4. نضع : $\alpha = -1$. عيّن إحداثيي G_{-1}
5. عيّن المجموعة (E) للنقط M التي تحقق ما يلي : $\|-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = 2\sqrt{10}$، ثم تحقق أن كلا من B و C تنتميان إلى (E).

* * *

التمرين 36.

ليكن Z العدد المركب حيث: $Z = \frac{-5+3i}{4+i}$

1. عيّن طويلة وعمدة للعدد المركب Z
2. استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : Z^{4n} حقيقي

3. نعتبر في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ النقط A، B ، C صور Z_A ، Z_B ، Z_C على الترتيب، حيث $Z_A = -1 + i$ ، $Z_B = 3 + 3i$ ، $Z_C = -5 + 9i$
   - أ. عيّن العبارة المركبة للتحويل النقطي g الذي مركزه A و يحول B إلى C ثم استنتج عناصره المميزة
   - ب. استنتج طبيعة المثلث ABC
4. K نقطة من المستوي تحقق : $2\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CK}$
   - أ. بيّن أن K هي مركز ثقل المثلث ABC ثم عيّن لاحقتها Z_K.
   - ب. عيّن (γ) مجموعة النقط M بحيث : $\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right).\overrightarrow{AB} = 0$

* * *

التمرين 37.

في كل سؤال ، اختر جوابا واحدا صحيحا مع التبرير

1. النقطة M التي تنتمي إلى دائرة مركزها $A(0;1)$ ونصف قطرها $r = 3$ لاحقتها z تحقق:

   أ) $|z + i|^2 = 3$ ب) $|z + i| = 3$ ج) $|z - i| = 3$
2. في المستوي المركّب نعتبر النقطتين A و B لاحقتيهما $z_A = 2$ و $z_B = 3 - 2i$.

   لتكن (E) مجموعة النقط M حيث: $|z - 2| = |z - 3 + 2i|$

   أ) (E) هي محور القطعة $[AB]$ ب) (E) هي القطعة $[AB]$

   ج) (E) هي دائرة مركزها A وقطرها $[AB]$
3. ليكن العدد المركب : $z = \sqrt{2 - \sqrt{3}} - i\sqrt{2 + \sqrt{3}}$.

   α) الشكل الأسي للعدد المركب z^2 هو:

   أ) $z^2 = 4e^{i\frac{\pi}{6}}$ ب) $z^2 = 4e^{-i\frac{\pi}{6}}$ ج) $z^2 = 4e^{i\frac{7\pi}{6}}$

   β) الشكل الأسي للعدد المركب z هو:

   أ) $z = 2e^{i\frac{\pi}{12}}$ ب) $z = 2e^{i\frac{7\pi}{12}}$ ج) $z = 2e^{i\frac{19\pi}{12}}$
4. لتكن النقط A ، B ، C حيث : $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = e^{i\frac{\pi}{2}}$

   أ) المثلث ABC متقايس الأضلاع ب) المثلث ABC قائم ومتساوي الساقين

   ج) النقط A، B، C في استقامية
5. في المستوي المركّب نعتبر النقط A ، B و C لواحقها على الترتيب $z_A = 2i$ ، $z_B = 1$ و $z_C = 4 - i$.

   العبارة المركّبة للتشابه المباشر S حيث: $S(A) = B$ و $S(B) = C$ هي:

   أ) $z' = (1 + i)z + 3 - 2i$ ب) $z' = (1 - i)z + 3 - 2i$

   ج) $z' = (1 + i)z - 3 + 2i$

* * *

التمرين 38.

$p(z)$ كثير حدود للمتغير المركب z حيث:

$$p(z)=z^3-7z^2+41z-87$$

1. احسب $p(3)$ ثم اكتب $p(z)$ من الشكل: $p(z)=(z-3)(a.z^2+b.z+c)$ حيث: a ، b و c أعداد حقيقية يطلب تعيّنها.
2. حل في C المعادلة $p(z)=0$.

لتكن A و B نقطتان من المستوى المركب لاحقتاهما على الترتيب $z_A=3$ و $z_B=2+5i$

3. عيّن W مركز الدوران R و زاويته θ علما أن R يحول النقطة A إلى B و W نقطة من حامل محور التراتيب
4. ما هي طبيعة المثلث WAB

لتكن D نقطة من المستوى المركب لاحقتها z_D .

5. عيّن z_D حتى يكون الرباعي $WADB$ مربع .

* * *

التمرين 39.

المستوي المركّب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ (وحدة الرسم $4\ cm$)

لتكن النقطة A ذات اللاحقة $z_A=i$ و B النقطة ذات اللاحقة $z_B=e^{-i\frac{5\pi}{6}}$

1. ليكن r الدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{2\pi}{3}$. نسمي C صورة B بواسطة التحويل r
   - أ. اكتب العبارة المركّبة للتحويل r
   - ب. بيّن أنّ لاحقة C هي $z_C=e^{-i\frac{\pi}{6}}$
   - ج. اكتب z_B و z_C على الشكل الجبري
   - د. أنشئ النقط A ، B و C
2. لتكن D مرجح النقط A ، B و C المرفقة بالمعاملات 2 ، 1- و 2 على الترتيب
   - أ. بيّن أنّ لاحقة D هي $z_D=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ ، ثمّ أنشئ النقطة D
   - ب. بيّن أنّ النقط A ، B ، C و D تنتمي إلى نفس الدائرة
3. ليكن h التحاكي الذي مركزه A ونسبته 2. نسمي E صورة D بواسطة التحويل h
   - أ. اكتب العبارة المركّبة للتحويل h
   - ب. بيّن أنّ لاحقة E هي $z_E=\sqrt{3}$ ، ثمّ أنشئ النقطة E
   - ج. احسب النسبة $\frac{z_D-z_C}{z_E-z_C}$ واكتب النتيجة على الشكل الأسّي
   - د. استنتج طبيعة المثلث CDE.

* * *

التمرين 40.

1. حل في مجموعة الأعداد المركّبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2 - 4\sqrt{3}z + 16 = 0$
2. لتكن النقطتان A و B لاحقتاهما على الترتيب $a = 2\sqrt{3} - 2i$ و $b = 2\sqrt{3} + 2i$
   - أ. اكتب a و b على الشكل الأسّي
   - ب. مثّل النقطتين A و B
   - ج. بيّن أنّ المثلث OAB متقايس الأضلاع
3. لتكن C نقطة لاحقتها $c = -8i$ و D صورتها بالدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{2\pi}{3}$.
   - أ. مثّل النقطتين C و D
   - ب. بيّن أنّ لاحقة النقطة D هي $d = 4\sqrt{3} + 4i$
4. بيّن أنّ D هي صورة النقطة B بالتحاكي الذي مركزه O ويُطلب تحديد نسبته
5. بيّن أنّ OAD مثلث قائم.

* * *

التمرين 41.

في المستوي المركّب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o, \vec{u}, \vec{v})$، نعتبر النقطتين B, A لاحقتيهما على الترتيب : $a = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ، $b = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

1. اكتب كلا من a و b على الشكل الأسّي ، ثمّ تحقق أنّ : $b^2 = a$
2. لتكن النقطة C لاحقتها c حيث : $c = a + b$
   - أ. علّم النقط C, B, A
   - ب. تحقق أنّ $c = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$
3. نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 + z - c = 0 \dots (E)$
   - أ. تحقق أنّ b حل للمعادلة (E)
   - ب. نرمز بـ d للحل الثاني للمعادلة (E). بيّن أنّ : $d = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}e^{i\frac{13\pi}{12}}$
   - ج. أنشئ النقطة D التي لاحقتها d.

* * *

التمرين 42.

نعتبر في المستوي المركّب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$، المستطيل $OABC$ حيث A لاحقتها $\sqrt{2}$ و C لاحقتها i ، I منتصف $[OA]$ و J منتصف $[BC]$.

1. S التشابه المباشر عبارته المركّبة $z' = -\frac{\sqrt{2}}{2}(iz - 1) + i$
   - أ. عيّن زاوية ونسبة التشابه المباشر S
   - ب. عيّن صورة المستطيل $OABC$ بالتشابه S
2. نسمّي Ω مركز التشابه S

أ. بيّن أنّ الدوائر التي أقطارها $[OJ]$ ، $[BC]$ ، $[AB]$ ، $[AI]$ تلتقي في Ω

ب. حدّد العناصر المميزة للتحويل $h = SoS$

ج. استنتج أنّ النقط I, B, Ω في استقامية ، وكذلك النقط C, A, Ω في استقامية.

التمرين 43.

ليكن كثير الحدود $P(z)$ المعرّف على $\mathbb{C}$ بـ: $P(z) = z^3 + z^2 - 4z - 24$

1. احسب $P(3)$ ، ثمّ حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z) = 0$
2. في المستوي المركّب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$، نعتبر النقط D, C, B, A لواحقها على الترتيب $z_A = 3$، $z_B = -2 + 2i$، $z_C = -2 - 2i$ ، $z_D = -1 - 10i$.
   - أ. احسب الأطوال BC, AC, AB ، ثمّ استنتج طبيعة المثلث ABC
   - ب. عيّن مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z التي تحقق : $|z + 2 + 2i| = |z + 2 - 2i|$
   - ج. اكتب العبارة المركّبة للتشابه S الذي مركزه A ويحوّل B إلى D ، ثمّ عيّن نسبته وزاويته.

التمرين 44.

المستوي المركّب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$. $C; B; A$ ثلاث نقط من المستوي لواحقها على الترتيب z_A ، z_B و z_C. لكل سؤال ثلاث إجابات مقترحة منها واحدة صحيحة عيّنها مع التبرير.

1. إذا كان $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ فإنّ :

أ) المثلث ABC متقايس الأضلاع ب) المثلث ABC متساوي الساقين

ج) النقط A ، B ، C في استقامية

2. إذا كان $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = e^{i\frac{\pi}{2}}$ فإنّ :

أ) المثلث ABC قائم في A ب) المثلث ABC قائم في A ومتساوي الساقين

ج) المثلث ABC متساوي الساقين

3. إذا كان الرباعي $OACB$ متوازي أضلاع وكان $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_O} = e^{i\frac{\pi}{2}}$ فإنّ :

أ) الرباعي $OACB$ مستطيل ب) الرباعي $OACB$ معيّن

ج) الرباعي $OACB$ مربّع

4. إذا كان $\frac{z_B - z_O}{z_A - z_O} = 10e^{i\,2010\pi}$ فإنّ :

أ) المثلث OAB قائم في O ب) المثلث OAB قائم ومتساوي الساقين

ج) النقط A، B ، O في استقامية

5. إذا كان $z_A - z_C = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_B - z_C)$ فإنّ :
   - أ) B صورة A بالدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{3}$
   - ب) A صورة B بالدوران الذي مركزه C وزاويته $\frac{\pi}{3}$
   - ج) A صورة B بالتشابه الذي مركزه C ، نسبته 2 وزاويته $\frac{\pi}{3}$

* * *

التمرين 45.

نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، النقط A ، B ، C التي لاحقاتها على الترتيب: $z_A = -i$ ، $z_B = 2 + 3i$ ، $z_C = -4 + i$.

1. أ. أكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$
   ب. عيّن طويلة العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ و عمدة له ، ثمّ استنتج طبيعة المثلث ABC
2. نعتبر التحويل النقطي T في المستوي الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z ، النقطة M ذات اللاحقة z' حيث: $z' = iz - 1 - i$
   - أ. عيّن طبيعة التحويل T محددا عناصره المميزة
   - ب. ما هي صورة النقطة B بالتحويل T
3. لتكن D النقطة ذات اللاحقة $z_D = -6 + 2i$
   - أ. بيّن أنّ النقط A ، C ، D في استقامية
   - ب. عيّن نسبة التحاكي h الذي مركزه A و يحوّل النقطة C إلى النقطة D
   - ج. عيّن العناصر المميزة للتشابه S الذي مركزه A و يحوّل B إلى D

* * *

التمرين 46.

في المستوي المركّب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{u},\vec{v})$، نعتبر التحويل النقطي f الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z ، النقطة M' ذات اللاحقة z' بحيث :

$$z' + 2 = (1 + i)(z + 2 - 2i)$$

1. بيّن أنّه يمكن كتابة العبارة المركّبة السابقة على الشكل : $z' = az + b$ ، ثمّ عيّن الطبيعة والعناصر المميزة للتحويل f
2. لتكن (Γ) مجموعة النقط M التي تحقق : $|z + 2 - 2i| = \sqrt{2}$
   - أ. A نقطة لاحقتها $z_A = -2 + 2i$. عيّن لاحقتي النقطتين A' و B بحيث : $A' = f(A)$ ، $A = f(B)$
   - ب. تحقق أنّ النقطة B تنتمي إلى المجموعة (Γ)
   - ج. اثبت أنّ صورة (Γ) بالتحويل f هي دائرة (Γ') ذات المركز A' ونصف القطر 2.

* * *

التمرين 47.

1. حل في ℂ مجموعة الأعداد المركّبة المعادلة التالية :
$z^2 - (4\cos\alpha)z + 4 = 0 \ldots (1)$ حيث α وسيط حقيقي
2. من أجل $\alpha = \frac{\pi}{3}$ ، نرمز إلى حلي المعادلة (1) بـ z_1 و z_2. بيّن أنّ : $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2013} = 1$
3. نعتبر في المستوي المركّب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o, \vec{u}, \vec{v})$، النقط C, B, A التي لاحقاتها على الترتيب : $z_A = 1 + i\sqrt{3}$ ، $z_B = 1 - i\sqrt{3}$ ، $z_C = 4 + i\sqrt{3}$
   - أ. أنشئ النقط C, B, A
   - ب. اكتب على الشكل الجبري العدد المركّب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ ، ثمّ استنتج أنّ C هي صورة B بالتشابه S الذي مركزه A ويُطلب تعيين نسبته وزاويته
   - ج. عيّن لاحقة النقطة G مرجح الجملة $\{(A; 1), (B; -1), (C; 2)\}$، ثمّ أنشئ G
   - د. احسب z_D لاحقة النقطة D ، بحيث يكون الرباعي $ABDG$ متوازي أضلاع.

التمرين 48.

α و β عددان مركّبان حيث :

$$\beta = \left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right) - i\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right) \quad ، \quad \alpha = -2\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

1. احسب β^2 ، ثمّ اكتبه على الشكل المثلثي.
2. استنتج طويلة وعمدة β.
3. استنتج قيمتي $\cos\frac{19\pi}{12}$ و$\sin\frac{19\pi}{12}$.
4. جد طويلة وعمدة α.
5. اكتب على الشكل الأسّي العدد $(\alpha\beta)^{2008}$.

التمرين 49.

I- نعتبر P(z) كثير حدود للمتغير المركب z : $P(z) = z^3 - z - 10i$

1. احسب $P(-2i)$
2. عيّن العددين الحقيقيين a و b بحيث : $P(z) = (z + 2i)(z^2 + aiz + b)$
3. حل في ℂ المعادلة $P(z) = 0$

II- المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$. لتكن الجملة المثقلة $\{(A, \alpha); (B, 1); (C, 2\alpha - 1)\}$ حيث : $z_A = -2i$ ،$z_B = -2 + i$ ،$z_C = 2 + i$

1. نسمي G_α مرجح الجملة المثقلة
   - عيّن مجموعة قيم α حتى تكون G_α مرجحا
   - عيّن إحداثيات G_α بدلالة α

- ما هي مجموعة النقط G_α لما α يمسح $\mathbb{R}^*$

2. لتكن E مجموعة النقط M التي تحقق ما يلي : $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 29$
   - تحقق أن B و C تنتميان إلى المجموعة (E)
   - بيّن أنّ مجموعة النقط (E) هي الدائرة التي مركزها O و نصف قطرها r يطلب تعيينه

* * *

التمرين 50.

I- $P(z)$ كثير حدود لمتغير المركب z حيث :

$$P(z) = z^3 - z^2 + 3z - 5$$

1. بيّن أنّ $\overline{P(z)} = P(\bar{z})$. ماذا تستنتج ؟
2. احسب $P(-1)$.
3. عيّن العددين الحقيقيين a ، b حيث :

$$P(z) = (z+1)(z^2 + az + b)$$

ثم استنتج حلول المعادلة $P(z) = 0$.

II- نعتبر النقاط A ، B ، C ذات اللاحقات $z_A = -1$ ، $z_B = 1 - 2i$ ، $z_C = 1 + 2i$

أ- عيّن التشابه الذي مركزه C و يحول النقطة A إلى B ، ثم عيّن عناصر التشابه.

ب- نضع : $L = (z_A - z_C)$

- أكتب L على الشكل الأسي ثم المثلثي.
- عيّن قيمة العدد الطبيعي n بحيث يكون L^n حقيقيا.

* * *

التمرين 51.

1. حلّ في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة : $z^2 - (1-i)^2 = 0$
2. ليكن z_1 ، z_2 عددان مركبان حيث : $z_1 = 1 - i$ ، $z_2 = -1 + i$

أ. أكتب z_1 على الشكل الأسي ، ثمّ استنتج الشكل الأسي لـ z_2

ب. أكتب العدد المركب $\frac{z_2}{z_1}$ على الشكل المثلثي ، ثمّ استنتج أنه عدد حقيقي سالب

3. المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$. لتكن A ، B ، G ، M أربع نقط من المستوي لواحقها z_1 ، z_2 ، $3i$ ، z على الترتيب

أ. عيّن لاحقة النقطة C حتى تكون G مرجح الجملة $\{(A,-1);(B,2);(C,1)\}$

ب. عيّن مجموعة النقط $M(x,y)$ من المستوي حتى تكون النقط A، B، M في استقامية

4. (C) دائرة معادلتها : $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$

أ. عيّن مركز و نصف قطر الدائرة (C)

ب. عيّن صورة (C) بالتشابه المباشر الذي مركزه A و يحوّل B إلى C

* * *

التمرين 52.

المستوي المركّب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{u},\vec{v})$. نأخذ كوحدة للأطوال $5cm$
ليكن f التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z'
حيث : $z' = \frac{1}{2}(1+i)z + 1$

1. برّر أنّ f تشابه مباشر يُطلب تعيين مركزه Ω ذو اللاحقة ω ، نسبته k وزاويته θ
2. نسمي A_0 النقطة O ومن أجل كل عدد طبيعي n نضع : $A_{n+1} = f(A_n)$
   - أ. عيّن لاحقات النقط A_1 ، A_2 ، A_3 ، ثمّ علّم النقط A_0 ، A_1 ، A_2 ، A_3
   - ب. من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $u_n = \Omega A_n$. بيّن أنّ المتتالية (u_n) هندسية ، ثمّ بيّن أنّ عبارة الحد العام u_n هي : $u_n = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$
   - ج. ابتداءً من أي رتبة n_0 تنتمي كل النقط A_n إلى القرص الذي مركزه Ω ونصف قطره 0,1 ؟
3. أ. ما هي نوعية المثلث $\Omega A_0 A_1$ ؟ استنتج من أجل كل عدد طبيعي n نوعية المثلث $\Omega A_n A_{n+1}$
   - ب. من أجل كل عدد طبيعي n ، نرمز بالرمز l_n إلى طول الخط المنكسر $A_0 A_1 A_2 \dots A_n$ ، $(l_n = A_0A_1 + A_1A_2 + \cdots + A_{n-1}A_n)$.
     اكتب l_n بدلالة n ، ثمّ احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} l_n$.

التمرين 53.

نعتبر كثير الحدود P(z) حيث : $P(z) = z^3 - 6z^2 + 12z - 16$

1. احسب P(4) ، ثمّ حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z) = 0$
2. المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$. A ، B ، C نقط لواحقها $z_1 = 4$ ، $z_2 = 1 + \sqrt{3}i$ ، $z_3 = \overline{z_2}$ على الترتيب
   - أ. بيّن أنّ المثلث ABC متقايس الأضلاع
3. لتكن D نقطة لاحقتها $z_4 = -\sqrt{3} + i$ ، ولتكن E صورة D بالدوران الذي مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{3}$ ، و F صورة D بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{OB}$
   - أ. عيّن z_5 و z_6 لاحقتي E و F على الترتيب
   - ب. علّم النقط A ، B ، C ، D ، E ، F في المعلم السابق
   - ج. بيّن أنّ المستقيمين (OC) و (OE) متعامدان
4. لتكن النقطة H الرأس الرابع لمتوازي الأضلاع COEH
   - أ. بيّن أنّ الرباعي COEH مربع
   - ب. احسب z_7 لاحقة النقطة H

* * *

التمرين 54.

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة ℂ المعادلة ذات المجهول z :

$$(1+i)z^2-2z+1-i=0$$

2. ليكن m عدد مركّب طويلته $\sqrt{2}$. حل في ℂ المعادلة ذات المجهول z :

$$mz^2-2z+\overline{m}=0 \dots (E)$$

3. نضع الآن : $m=\sqrt{2}e^{i\alpha}$ ، حيث α عدد حقيقي
   - أ. أثبت أنّ حلّي المعادلة (E) ، z_1 و z_2 يُكتبان كما يلي : $z_1=e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}$ ، $z_2=e^{-i\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}$
   - ب. نعتبر في المستوي المركّب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{u},\vec{v})$، النقط M, M_2, M_1 لواحقها : z_1 ، z_2 و (z_1+z_2) على الترتيب.
     أثبت أنّ $\frac{z_1}{z_2}=i$ ، ثمّ استنتج طبيعة الرباعي OM_1MM_2.

التمرين 55.

نعتبر كثير الحدود $P(z)$ حيث : $P(z)=z^3+2\left(\sqrt{3}-i\right)z^2+4\left(1-\sqrt{3}i\right)z-8i$

1. احسب $P(2i)$ ، ثمّ بيّن أنّه من أجل كل عدد مركّب z لدينا : $P(z)=(z-2i)(z^2+az+b)$ حيث a و b عددين حقيقيين يُطلب تعيينهما.
2. حل في المجموعة ℂ المعادلة $P(z)=0$
3. نعتبر الأعداد المركّبة : $z_A=2i$ ، $z_B=-\sqrt{3}+i$ ، $z_C=-\sqrt{3}-i$
   - أ. اكتب العددين z_A و z_B على الشكل الأسّي ، ثمّ استنتج الشكل الأسّي للعددين z_C و $\frac{z_B}{z_A}$
   - ب. بيّن أنّ $(z_B)^{1434}$ عدد حقيقي وأنّ $(z_B)^{2013}$ عدد تخيلي صرف
4. نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ ، النقط A، B، C لواحقها z_A ، z_B ، z_C على الترتيب
   - أ. احسب قيسا للزاوية $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})$ ، ثمّ استنتج طبيعة المثلث OAB
   - ب. بيّن أنّ الرباعي $OABC$ معيّن يُطلب حساب مساحته
   - ج. عيّن زاوية الدوران **R** الذي مركزه B و يحوّل O إلى A
   - د. عيّن العبارة المركّبة لهذا الدوران.

التمرين 56.

نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ ، النقطتين A و B لاحقتيهما $z_A=7-\sqrt{3}i$ ، $z_B=5+3\sqrt{3}i$ ، و لتكن النقطة C منتصف القطعة $[OB]$

1. بيّن أنّ : $|z_A| = |z_B|$
2. ليكن الدوران **R** الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{3}$
   - أ. اكتب العبارة المركّبة لهذا الدوران
   - ب. أثبت أنّ النقطة B هي صورة النقطة A بالدوران **R**، ثمّ استنتج طبيعة المثلث OAB
   - ج. حدّد z_C لاحقة النقطة C ، ثمّ عيّن z_D لاحقة النقطة D حتى يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع
3. اكتب العدد $\frac{z_D - z_A}{z_D}$ على الشكل الأسّي. ماذا تستنتج بالنسبة للمثلث OAD ؟
4. لتكن النقطة E ذات اللاحقة z_E حيث $z_E = \frac{2}{3}z_A$. احسب $\frac{z_D - z_B}{z_D - z_E}$. ماذا تستنتج بالنسبة للنقط D, B, E؟
5. نعتبر التحويل النقطي S الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث : $z' = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}z + 1$
   - أ. عيّن طبيعة التحويل النقطي S واذكر عناصره المميزة
   - ب. عيّن (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث : $|z - 2| = \sqrt{2}$
   - ج. بيّن أنّ : $z' - 3 - 2i = (1 + i)(z - 2)$
   - د. استنتج أنّه إذا كانت النقطة M تنتمي إلى (Γ) فإنّ النقطة M' تنتمي إلى دائرة يُطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

* * *

التمرين 57.

في المستوي المركّب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$، نعتبر النقط C, B, A لواحقها على الترتيب : $z_A = i$ ، $z_B = \sqrt{2}$ ، $z_C = \sqrt{2} + i$. نسمي K, J, I منتصفات القطع $[BC], [AC], [OB]$ على الترتيب.

1. أ. برهن أنّه يوجد تشابه مباشر وحيد S يحوّل A إلى I ويحوّل O إلى B
   - ب. عيّن نسبة وزاوية هذا التشابه
   - ج. اعط العبارة المركّبة لهذا التشابه
   - د. استنتج ω لاحقة Ω مركز التشابه S
   - ه. ما هي صورة المستطيل $AOBC$ بالتشابه S ؟
2. نعتبر التحويل النقطي $g = SoS$
   - أ. ما هي صورة كل من النقط A, B, O بالتحويل g ؟
   - ب. عيّن طبيعة التحويل g واذكر عناصره المميزة
   - ج. استنتج أنّ المستقيمات $(AK), (BJ), (OC)$ تتقاطع في نقطة واحدة.

* * *

التمرين 58.

في المستوي المركّب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط C, B, A لواحقها على الترتيب: $z_A = 3+5i$، $z_B = -4+2i$ ، $z_C = 1+4i$. أنجز الشكل وأتممه شيئا فشيئا.

1. نعتبر التحويل النقطي f الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' ذات اللاحقة z' بحيث : $z' = (2-2i)z+1$
   - أ. عيّن طبيعة التحويل f واذكر عناصره المميزة
   - ب. عيّن لاحقة B' صورة B بالتحويل f ، ثمّ استنتج أنّ المستقيمين (CB') و(CA) متعامدان
2. لتكن M النقطة ذات اللاحقة $z = x+iy$ ، حيث x و y عددان صحيحان. ولتكن M' صورة M بالتحويل f
   - أ. بيّن أنّ $\overrightarrow{CM'}$ و $\overrightarrow{CA}$ متعامدان إذا وفقط إذا كان (E) ... $x+3y=2$
   - ب. حل في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة (E)
   - ج. استنتج مجموعة النقط M التي إحداثياتها أعداد صحيحة من المجال $[-5;5]$ والتي يكون من أجلها الشعاعان $\overrightarrow{CM'}$ و $\overrightarrow{CA}$ متعامدين.

* * *

التمرين 59.

$P(z)$ كثير حدود في $\mathbb{C}$ حيث : $P(z) = z^4-6z^3+23z^2-34z+26$

1. اثبت أنّه إذا كان z_0 جذرا لـ $P(z)$ ، فإنّ $\overline{z_0}$ هو كذلك جذرا لـ $P(z)$
2. نضع في كل ما يلي : $z_0 = 1+i$
   احسب $P(z_0)$ ، ثمّ حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $P(z)=0$ ... (1)
3. المستوي المركّب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{u},\vec{v})$، E نقطة من المستوي لاحقتها $\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i$ ، b عدد مركّب و S تحويل نقطي للمستوي يقبل نقطة صامدة هي $\Omega(2;-1)$ عبارته المركّبة $z' = z_0z+b$
   - أ. ما طبيعة التحويل S وما هي عناصره المميزة ؟ عيّن $S(E)$
   - ب. لتكن (C) الدائرة ذات المركز $H(1;-1)$ ونصف القطر $4\sqrt{2}$. جد (Γ) مجموعة النقط من المستوي التي صورتها (C) بالتحويل S
4. A و A_n نقطتان من المستوي لاحقتاهما على الترتيب z_0 و z_0^n ، حيث n عدد طبيعي أكبر تماما من 1.
   عيّن قيم n من المجال $[2005;2010]$ حيث تكون النقط O ، A و A_n على استقامة واحدة.

* * *

التمرين 60.

1. حل في مجموعة الأعداد المركّبة المعادلة ذات المجهول z : $z^2-4\sqrt{3}z+16=0$
2. في المستوي المركّب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقط C,B,A لواحقها على الترتيب : $z_A=2\sqrt{3}+2i$ ، $z_B=2\sqrt{3}-2i$ ، $z_C=-1+i\sqrt{3}$.

أ. عيّن الشكل الأسّي لكل من z_A ، z_B و z_C

ب. أنشئ الدائرتين (δ) و (δ') مركزهما O ونصف قطرهما 4 و 2 على الترتيب ، ثمّ علّم بدقّة النقط A ، B و C

3. **R** هو الدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{3}$ وT الانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}$ ذو اللاحقة 2

أ. عيّن $z_{A'}$ و $z_{B'}$ لاحقتي النقطتين A' وB' صورتي النقطتين A وB على الترتيب بالدوران **R**

ب. عيّن $z_{C'}$ لاحقة النقطة C' صورة C بالانسحاب T ، ثمّ علّم بدقّة النقط A' ، B' و C'. ما هي طبيعة المثلث $OA'B'$ ؟

ج. عيّن عمدة العدد المركّب $\frac{z_{A'}-z_{B'}}{z_{C'}}$ مستنتجا أنّ المستقيم (OC') محور في المثلث $OA'B'$

4. ليكن H التحاكي الذي مركزه O ويحوّل (δ) إلى (δ')

أ. عيّن نسبة التحاكي H

ب. ما هي طبيعة والعناصر المميزة للتحويل HoR ؟

ج. ما هي صورة (δ) بالتحويل HoR ؟

* * *

التمرين 61.

1. حل في مجموعة الأعداد المركّبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية :

$$(z^2+4)(z^2-2\sqrt{3}z+4)=0$$

2. نعتبر في المستوي المركّب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{u},\vec{v})$، النقط D,C,B,A لواحقها على الترتيب : $z_A=\sqrt{3}+i$ ، $z_B=\overline{z_A}$ ، $z_C=-2i$ ، $z_D=\overline{z_C}$.

بيّن أنّ النقط A ، B ، C وD تنتمي إلى دائرة (γ) يُطلب تعيين مركزها ونصف قطرها، ثمّ أنشئ النقط A ، B ، C و D

3. نرمز بـ z_E إلى لاحقة النقطة E نظيرة النقطة B بالنسبة إلى المبدأ O

أ. بيّن أنّ : $\frac{z_A-z_C}{z_E-z_C}=e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$

ب. بيّن أنّ النقطة A هي صورة E بدوران **R** مركزه C يُطلب تعيين زاويته

ج. استنتج طبيعة المثلث AEC

د. H هو التحاكي الذي مركزه O ونسبته 2. عيّن طبيعة التحويل RoH وعناصره المميزة ، ثمّ استنتج صورة الدائرة (γ) بالتحويل RoH.

التمرين 62.

1. حل في مجموعة الأعداد المركّبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - 6z + 13 = 0$
2. نعتبر النقط A ، B و C لواحقها على الترتيب : $a = 3 - 2i$ ، $b = 3 + 2i$ ، $.c = 4i$
   - أ. علّم النقط A ، B و C
   - ب. بيّن أنّ الرباعي $OABC$ متوازي أضلاع
   - ج. عيّن لاحقة النقطة Ω مركز ثقل الرباعي $OABC$
   - د. عيّن ثمّ أنشئ مجموعة النقط M من المستوي حيث :

$$\left\|\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = 12$$

3. لتكن M نقطة من المستقيم (AB). نرمز بـ β إلى الجزء التخيلي للاحقة النقطة M ولتكن N صورة النقطة M بالدوران الذي مركزه Ω وزاويته $\frac{\pi}{2}$
   - أ. بيّن أنّ لاحقة النقطة N هي : $z_N = \frac{5}{2} - \beta + \frac{5}{2}i$
   - ب. كيف يمكن اختيار β حتى تنتمي النقطة N إلى المستقيم (BC)؟

التمرين 63.

1. حل في مجموعة الأعداد المركّبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 + 8\sqrt{3}z + 64 = 0$
2. لتكن A و B نقطتين من المستوي لاحقتاهما على الترتيب : $z_A = -4\sqrt{3} - 4i$ ، $.z_B = -4\sqrt{3} + 4i$
   - أ. عيّن لاحقة النقطة G مرجح الجملة $\{(O;1),(A;1),(B;-1)\}$
   - ب. عيّن طبيعة المجموعة (C) للنقط M من المستوي لاحقتها z والتي تحقق :

$$|z|^2 + |z - z_A|^2 - |z - z_B|^2 = 17$$

التمرين 64.

1. نعتبر العددين المركّبين $z_A = 5 - 5i$ و z_B حيث طويلته $5\sqrt{2}$ وعمدة له $-\frac{7\pi}{12}$ ، وهما لاحقتي النقطتين A و B.
   - أ. علّم النقطة A
   - ب. اكتب z_A على الشكل الأسّي
2. نعتبر التحويل النقطي T الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث : $z' = e^{-i\frac{\pi}{3}}z$

أ. عيّن طبيعة التحويل T واذكر عناصره المميزة

ب. بيّن أنّ : $T(A) = B$

ج. أنشئ بعناية النقطة B

3. أ. اكتب $e^{-i\frac{\pi}{3}}$ على الشكل الجبري ، ثمّ استنتج كتابة جبرية للعدد z_B

ب. استنتج القيمة المضبوطة لكل من العددين $\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)$

* * *

التمرين 65.

1. حل في مجموعة الأعداد المركّبة $\mathbb{C}$ كلا من المعادلتين :

$$z^2 - 2z + 5 = 0 \quad ; \quad z^2 - 2z + 3 + 2i\sqrt{3} = 0$$

2. نعتبر النقط E, D, C, B, A لواحقها على الترتيب : $z_A = 1 + 2i$ ، $z_B = 1 + \sqrt{3} + i$ ، $z_C = 1 - 2i$ ، $z_D = 2 - i\sqrt{3}$ ، $z_E = i\sqrt{3}$.

أ. اكتب $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$ على الشكل الجبري ، ثمّ استنتج طبيعة المثلث ABC

ب. اكتب معادلة الدائرة (Γ) المحيطة بالمثلث ABC

ج. أنشئ الدائرة (Γ) والنقط E, D, C, B, A.

* * *

التمرين 66.

نعتبر التحويل النقطي f الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' ذات اللاحقة z' بحيث :

$$2z' = \left(1 + i\sqrt{3}\right)z - 2$$

1. اكتب على الشكل المثلثي العدد المركّب $z_0 = 1 + i\sqrt{3}$ ، ثمّ عيّن العددين الحقيقيين b و θ حيث : $z' = e^{i\theta}z + b$
2. استنتج طبيعة التحويل f والعناصر المميزة له
3. اكتب العبارة التحليلية للتحويل f
4. عيّن B' صورة النقطة B ذات اللاحقة $z_B = 1 - i\sqrt{3}$ بواسطة التحويل f
5. تحقق أنّ $f = t_{\vec{u}}\ o\ r$ ، حيث r دوران مركزه O و $t_{\vec{u}}$ انسحاب يُطلب تعيين شعاعه.

* * *

التمرين 67.

1. حل في مجموعة الأعداد المركّبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$
2. A و B نقطتان من المستوي لاحقتاهما على الترتيب $z_A = \sqrt{3} - i$ ، $z_B = \sqrt{3} + i$ و C منتصف القطعة $[OB]$ لاحقتها z_C

أ. اكتب z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسّي

ب. احسب OA ، OB ، AB ، ثمّ استنتج طبيعة المثلث OAB

3. نسمي D صورة C بالدوران الذي مركزه O وزاويته $-\frac{\pi}{2}$ ، ونسمي E صورة D بالانسحاب الذي شعاعه $2\vec{j}$

أ. بيّن أنّ لاحقة E هي $z_E = \frac{1}{2}[1 + (4 - \sqrt{3})i]$

ب. بيّن أنّ $OE = AD = \sqrt{5 - 2\sqrt{3}}$

4. بيّن أنّ النقط A ، C ، E في استقامية.

* * *

التمرين 68.

z_1 ، z_2 ، z_3 أعداد مركبة حيث : $z_1 = [r_1, \theta_1]$ ، $z_2 = [r_2, \theta_2]$ ، $z_3 = [r_3, \theta_3]$

1. اوجد هذه الأعداد المركبة علما أن :

- $z_1 \times z_2 \times z_3 = 4\sqrt{2}(1 + i)$
- $\theta_1 ; \theta_2 ; \theta_3$ بهذا الترتيب ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية حسابية أساسها $\frac{\pi}{2}$ حيث : $0 < \theta_1 < \frac{\pi}{2}$
- $r_1 ; r_2 ; r_3$ بهذا الترتيب ثلاثة حدود متعاقبة لمتتالية هندسية أساسها 2

المستوي المركّب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ النقط A ، B و C هي صور الأعداد z_1 ، z_2 ، z_3 على الترتيب

2. أنشئ النقط A ، B و C واستنتج $\|\overrightarrow{OA}\|$ ، $\|\overrightarrow{OB}\|$ ، $\|\overrightarrow{OC}\|$

3. عيّن مجموعة النقط M التي تحقق : $OA^2 + OB^2 + OC^2 + OM^2 = 22$

بوضع : $z = x + iy$. ليكن العدد المركب L حيث : $L = \frac{z+z_2}{z}$ حيث : $z \neq 0$

4. اكتب العدد المركب L على الشكل الجبري .

5. عيّن مجموعة النقط حتى يكون العدد L حقيقيا.

* * *

التمرين 69.

1. عيّن الجذرين التربيعيين للعدد $w = -32 + 24i$

2. نعتبر في $\mathbb{C}$ كثير الحدود $P(z)$ حيث :

$$P(z) = z^3 + (5i - 6)z^2 + (9 - 24i)z + 13i + 18$$

أ. بيّن أنّ $-i$ هو جذر لـ $P(z)$

ب. عين الأعداد المركّبة a ، b ، c بحيث :

$$P(z) = (z + i)(az^2 + bz + c)$$

ج. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z) = 0$

3. نعتبر في المستوي المركّب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس$(o,\vec{u},\vec{v})$ ، النقط B,A وC لواحقها على الترتيب $z_A=-i$ ، $z_B=2-5i$ ، $z_C=4+i$
   - أ. اكتب العدد المركّب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ على الشكلين الجبري والمثلثي، ثمّ استنتج طبيعة المثلث ABC
   - ب. عيّن طبيعة التحويل T الذي يحقق $T(A)=A$ و $T(C)=B$ ، واذكر عناصره المميزة.

* * *

التمرين 70.

نعتبر في مجموعة الأعداد المركّبة $\mathbb{C}$ ، كثير الحدود $P(z)$ حيث :

$$P(z)=z^4+2z^3+5z^2+2z+4$$

1. بيّن أنّ المعادلة $P(z)=0$ تقبل حلين تخيليين صرفين ، ثمّ حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z)=0$
2. نعتبر في المستوي المركّب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ النقط A ، B ، C ، D ، I ذات اللواحق :

   $z_A=i$ ، $z_B=\overline{z_A}$ ، $z_C=-1+\sqrt{3}i$ ، $z_D=\overline{z_C}$ ، I منتصف $[CD]$

   - أ. اكتب على الشكل الأسيّ العدد : $L=\frac{z_A-z_I}{z_B-z_I}$ ، ثمّ استنتج طبيعة المثلث ABI
   - ب. عيّن المركز Ω ونصف القطر r للدائرة (γ) المحيطة بالمثلث ABI ، ثمّ أنشئ (γ)
3. ليكن R دوران مركزه I وزاويته $\frac{\pi}{2}$، وليكن التحاكي H الذي يحوّل A إلى C و B إلى D
   - أ. عيّن عبارة التحويلين R و H
   - ب. عيّن طبيعة التحويل HoR محددا عبارته وعناصره المميزة
   - ج. عيّن بطريقتين معادلة (γ') صورة (γ) بالتحويل HoR، ثمّ أنشئ (γ').

* * *

التمرين 71.

نعتبر العدد المركّب : $z=\frac{4+4i}{1-i\sqrt{3}}$

1. اكتب z على الشكل الجبري ، ثمّ على الشكل المثلثي
2. اكتب على الشكل الأسّي الأعداد : z^{2018} ، $\bar{z}$ ، $\frac{1}{z}$
3. استنتج القيمة المضبوطة للعددين : $\cos\left(\frac{19\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{19\pi}{12}\right)$.

* * *

التمرين 72.

1. حل في مجموعة الأعداد المركّبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - 2z + 2 = 0$
2. لتكن النقط K ، L و M التي لواحقها على الترتيب : $z_K = 1 + i$ ، $z_L = 1 - i$ و $z_M = -i\sqrt{3}$
   مثّل هذه النقط في معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$ الوحدة : $4\ cm$
3.
   أ. تحقق أنّ لاحقة النقطة N نظيرة M بالنسبة لـ L هي : $z_N = 2 + i(\sqrt{3} - 2)$
   ب. نعتبر الدوران r الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$ حيث : $r(M) = A$ و $r(N) = C$.
   عيّن اللاحقتين z_A و z_C للنقطتين A و C على الترتيب
   ج. نعتبر الانسحاب t الذي لاحقة شعاعه $2i$ حيث : $t(M) = D$ و $t(N) = B$.
   عيّن اللاحقتين z_D و z_B للنقطتين D و B على الترتيب
4. أ. بيّن أنّ النقطة K منتصف القطعة $[DB]$ هي منتصف القطعة $[AC]$
   ب. بيّن أنّ $\frac{z_C - z_K}{z_B - z_K} = i$ ، ثمّ استنتج طبيعة الرباعي $ABCD$.

التمرين 73.

نعتبر في مجموعة الأعداد المركّبة $\mathbb{C}$ ، كثير الحدود $P(z)$ حيث :

$$P(z) = z^3 - (5 + i)z^2 + (10 + 6i)z - 8 - 16i$$

1. بيّن أنّ المعادلة $P(z) = 0$ تقبل حلا تخيليا صرفا z_0 يُطلب تعيينه
2. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z) = 0$
3. نضع: $z_0 = 2i$ ، $z_1 = 2 - 2i$ و $z_2 = 3 + i$
   أ. اكتب العددين z_0 و z_1 على الشكل المثلثي والشكل الأسيّ
   ب. اكتب العددين $\left(\frac{z_0}{2}\right)^{1429}$ و $\left(\frac{z_1}{2\sqrt{2}}\right)^{2008}$ على الشكل الجبري
4. نضع : $\alpha = \frac{z_2 - 2 + (\sqrt{3} - 1)i}{z_1}$
   أ. عيّن طويلة وعمدة العدد المركّب α
   ب. اكتب العدد α على الشكل الجبري واستنتج كلا من $\sin\frac{7\pi}{12}$ و $\cos\frac{7\pi}{12}$.

التمرين 74.

نعتبر في المستوي المركّب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o, \vec{u}, \vec{v})$، النقط D, C, B, A لواحقها على الترتيب: $z_A = 1 + 2i$، $z_B = 1 + \sqrt{3} + i$ ، $z_C = \overline{z_A}$، $z_D = \overline{z_B}$.

1. أ. علّم النقطتين A و C
   ب. احسب كلا من $|z_A - z_B|$ ، $|z_A - z_C|$ و $|z_B - z_C|$

ج. استنتج طبيعة المثلث ABC

2. أ. اكتب العدد المركّب $\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}$ على الشكل الجبري ثمّ على الشكل المثلثي

ب. استنتج مرة أخرى طبيعة المثلث ABC

3. (γ) هي الدائرة المحيطة بالمثلث ABC

أ. تحقق أنّه إذا كانت z لاحقة نقطة M من الدائرة (γ) فإنّ : $z = 1 + 2e^{i\theta}$ حيث θ يمسح المجموعة $\mathbb{R}$

ب. تحقق أنّ D نقطة من الدائرة (γ)

ج. أنشئ النقطتين B و D.

* * *

التمرين 75.

1. نعتبر في مجموعة الأعداد المركّبة $\mathbb{C}$ ، كثير الحدود $P(z)$ حيث :

$$P(z) = z^3 - 4z^2 + 6z - 4$$

أ. بيّن أنّ المعادلة $P(z) = 0$ لا تقبل حلا تخيليا صرفا

ب. عيّن العددين الحقيقيين a و b حيث : $P(z) = (z-2)(z^2 + az + b)$

ج. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z) = 0$

2. في المستوي المركّب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$ ، الوحدة $\|\vec{u}\| = 2cm$ ، نعتبر النقط A ، B ، C التي لواحقها على الترتيب :

$z_A = 2$ ، $z_B = 1 - i$ ، $z_C = 1 + i$

أ. اكتب العددين z_B و z_C على الشكل الأسيّ

ب. اكتب العدد $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ على الشكل الجبري ، ثمّ استنتج طبيعة المثلث ABC

ج. احسب العدد المركّب L حيث : $L = \left(\frac{z_B}{\sqrt{2}}\right)^{1434} - \sqrt{2}\left(\frac{z_C}{\sqrt{2}}\right)^{2013}$

3. ليكن R دوران مركزه A ويحوّل B إلى C

أ. اكتب العبارة المركّبة للدوران R ثمّ عيّن لاحقة النقطة D صورة C بالدوران R

ب. أنشئ بعناية الدائرتين (Γ) و (Γ') حيث (Γ) هي الدائرة التي قطرها $[BC]$ و (Γ') صورتها بالدوران R

4. لتكن M نقطة من الدائرة (Γ) لاحقتها z تختلف عن النقطة C والنقطة M' لاحقتها z' حيث $R(M) = M'$

أ. بيّن أنّ معادلة الدائرة (Γ) تُكتب على الشكل $z = 1 + e^{i\theta}$ من أجل $k \in \mathbb{Z}$ و $\theta \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

ب. عبّر عن z' بدلالة θ

ج. أثبت أنّ : $\frac{z'-z_C}{z-z_C} = \frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}$ ثمّ فسّر النتيجة هندسيا.

* * *

التمرين 76.

نرفق بكل عدد مركّب z يختلف عن 1 العدد المركّب $f(z)$ حيث : $f(z)=\frac{z-i}{z-1}$

1. اكتب العدد $f(1+i)$ على شكله الجبري
2. عبّر عن $\overline{f(z)}$ بدلالة $\bar{z}$
3. في المستوي المركّب نعتبر النقط A ، B وM لواحقها على الترتيب : $z_A=1$ ، $z_B=i$ ، $z=x+iy$
   - أ. عيّن مجموعة النقط M من المستوي بحيث يكون $f(z)$ حقيقيا سالبا تماما
   - ب. عيّن مجموعة النقط M حتى يكون $|f(z)|=1$
4. لتكن C النقطة ذات اللاحقة $z_C=1+i$
   - أ. ما نوع المثلث ABC ؟
   - ب. عيّن لاحقة النقطة D نظيرة C بالنسبة إلى المستقيم (AB) واستنتج طبيعة الرباعي $ACBD$
5. E نقطة لاحقتها $z_E=-1$. نعتبر التحويل النقطي S الذي يحوّل النقطة C إلى B ويحوّل النقطة B إلى E

   عيّن العبارة المركّبة للتحويل S ثمّ استنتج طبيعته وعناصره المميزة.

* * *

التمرين 77.

لكل سؤال أربع إجابات واحدة منها فقط صحيحة يُطلب تعيينها مع التبرير.

1. z عدد مركّب عمدته $\frac{\pi}{6}$. عمدة العدد المركّب $\frac{i}{\bar{z}^2}$ هي :

   أ) $-\frac{\pi}{6}$ ب) $\frac{\pi}{6}$ ج) $\frac{5\pi}{6}$ د) $-\frac{5\pi}{6}$

2. z عدد مركّب حيث $z=-\sqrt{3}+e^{i\frac{\pi}{6}}$. الشكل الأسّي للعدد z هو :

   أ) $e^{i\frac{5\pi}{6}}$ ب) $e^{i\frac{7\pi}{6}}$ ج) $\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{6}}$ د) $e^{-i\frac{5\pi}{6}}$

3. z و z' عددان مركّبان حيث $|z|=2$ و$z'=z-\frac{1}{\bar{z}}$. لدينا :

   أ) $|z'|=1$ ب) $|z'|=\frac{1}{2}$ ج) $|z'|=\frac{3}{2}$ د) $|z'|=\frac{5}{2}$

4. في المستوي المركّب ، مجموعة النقط M ذات اللاحقة $z=x+iy$ التي تحقق : $|z-1|=|z+i|$ هي المستقيم الذي معادلته :

   أ) $y=x-1$ ب) $y=-x$ ج) $y=-x+1$ د) $y=x$

5. ليكن n عددا طبيعيا ، z عدد مركّب حيث $z=\left(1+i\sqrt{3}\right)^n$. العدد z حقيقي معناه:

   أ) $n=3k+1$ ب) $n=3k+2$ ج) $n=3k$ د) $n=6k$

* * *

التمرين 78.

1. λ عدد حقيقي موجب تماما. نعتبر العدد المركّب z_1 حيث : $z_1 = \lambda(1+i)$
   - أ. اكتب z_1 على الشكل الأسّي
   - ب. عيّن الأعداد الطبيعية n التي من أجلها يكون $(z_1)^{7n+1}$ تخيليا صرفا
2. نعتبر في مجموعة الأعداد المركّبة $\mathbb{C}$ كثير الحدود $P(z)$ ذو المتغيّر z حيث :
   $$P(z) = z^3 - (2+i)z^2 + 2(1+i)z - 2i$$
   - أ. عيّن العدد الحقيقي λ حتى يكون z_1 جذرا لكثير الحدود $P(z)$
   - ب. عيّن العددين المركّبين a و b بحيث من أجل كل عدد مركّب z :
     $$P(z) = (z - z_1)(z - a)(z - b)$$
   - ج. استنتج حلول المعادلة $P(z) = 0$
3. نعتبر في المستوي المركّب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$ النقط C, B, A لواحقها على الترتيب : $z_1 = 1 + i$ ، $z_2 = 1 - i$ ، $z_3 = i$.
   α عدد حقيقي حيث $\alpha \neq \frac{3}{2}$. f_α تحويل نقطي يرفق بكل نقطة M النقطة M' مرجح الجملة $\{(A; -1), (B; \alpha - 1), (C; \alpha - 2), (M; 1)\}$
   عيّن حسب قيّم α طبيعة التحويل f_α وعناصره المميزة.

التمرين 79.

I- حل في مجموعة الأعداد المركّبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - 2(1+\sqrt{2})z + 2(2+\sqrt{2}) = 0$

II- نعتبر في المستوي المركّب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$ النقط C, B, A لواحقها على الترتيب: $z_A = 1 + \sqrt{2} - i$ ، $z_B = 1 - i$ ، $z_C = 1 + \sqrt{2} + i$.

1. بيّن أنّ : $z_B \times z_C = \sqrt{2} z_A$
2. جد $\arg(z_B)$ ثمّ استنتج $\arg(z_C)$
3. اكتب على الشكل الأسّي العددين z_A و z_B واكتب $\left(\frac{z_B}{\sqrt{2}}\right)^{2012}$ على الشكل الجبري
4. ما طبيعة المثلث ABC ؟
5. (E) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z والتي تحقق : $Re\left(\frac{z - z_C}{z - z_A}\right) = 0$.
   بيّن أنّ (E) هي دائرة باستثناء نقطة ، يُطلب تعيين نصف قطرها r.

التمرين 80.

1. حل في مجموعة الأعداد المركّبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 + 2\sqrt{3}z + 4 = 0$
2. نضع : $a = 2i$ ، $b = -\sqrt{3} + i$ ، $c = -\sqrt{3} - i$.
   اكتب الأعداد a ، b و c على الشكل الأسّي
3. بيّن أنّ العدد b^{1431} تخيلي صرف

4. نعتبر في المستوي المركّب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ النقط C,B,A لواحقها على الترتيب الأعداد المركّبة a ، b و c
   - أ. احسب قيسا للزاوية $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})$ ، ثمّ استنتج طبيعة المثلث OAB
   - ب. أثبت أنّ الرباعي $OABC$ معيّن يُطلب حساب مساحته
   - ج. حدد زاوية الدوران R الذي مركزه النقطة B ويحوّل O إلى A
   - د. اكتب الصيغة المركّبة للتحاكي H الذي مركزه B ونسبته -3
   - ه. اعط الصيغة المركّبة للتحويل $S = RoH$ ، ثمّ حدّد طبيعته وعناصره المميزة
   - و. عيّن صورة المعيّن $OABC$ بالتحويل S ، ثمّ حدّد طبيعته واحسب مساحته.

التمرين 81.

المستوي المركّب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$.

I) ليكن العددان المركّبان a و z_0 حيث : $a = \frac{\sqrt{3}+1}{4} + \frac{\sqrt{3}-1}{4}i$ و $z_0 = 6 + 6i$ والنقطة A_0 ذات اللاحقة z_0.

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، يرمز A_n للنقطة ذات اللاحقة z_n حيث $z_n = a^n z_0$

1. اكتب كلا من z_1 و a^2 على الشكل الجبري ثمّ الأسّي
2. عبّر عن z_3 و z_7 بدلالة a^2 واستنتج شكلا أسّيا لكل من z_3 و z_7
3. علّم النقط A_0 ، A_1 ، A_3 و A_7 صور الأعداد z_0 ، z_1 ، z_3 و z_7 على الترتيب

II) من أجل كل عدد طبيعي n ، نضع $|z_n| = u_n$

1. بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، فإنّ $u_n = 12\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}$
2. استنتج أنّ (u_n) متتالية هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدّها الأول
3. احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ وفسّر النتيجة هندسيا
4. عيّن أصغر عدد طبيعي p بحيث يكون $OA_p \leq 10^{-3}$ ، ثمّ عيّن قيسا للزاوية الموجهة $(\vec{u};\overrightarrow{OA_p})$.

التمرين 82.

المستوي المركّب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$.

نعرّف التحويل النقطي T الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' لاحقتها z' حيث :

$$z' = -\left(\sqrt{3}+i\right)z - 1 + i(1+\sqrt{3})$$

1. عيّن طبيعة التحويل T واذكر عناصره المميزة. نسمّي Ω مركز التحويل T
2. لتكن النقطة M_0 لاحقتها $z_0 = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4}i$. احسب الطول ΩM_0 وجد قيسا بالراديان للزاوية $(\vec{u};\overrightarrow{\Omega M_0})$

3. من أجل كل عدد طبيعي n نعرّف متتالية النقط (M_n) كما يلي : $M_{n+1} = T(M_n)$.
نسمّي z_n لاحقة النقطة M_n.

أ. أنشئ النقط Ω ، M_1 ، M_2 ، M_3 و M_4

ب. برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $z_n - i = 2^n e^{i\frac{7n\pi}{6}}(z_0 - i)$

ج. احسب ΩM_n بدلالة n ، ثمّ عيّن أصغر قيمة للعدد n التي تحقق: $\Omega M_n \geq 10^2$

د. نضع : $S_n = \Omega M_0 + \cdots + \Omega M_n$. احسب S_n بدلالة n ، ثمّ عيّن $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$

4. نعتبر في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة : $7x - 12y = 1 \ldots (*)$

أ. تحقق أنّ الثنائية $(-5; -3)$ حل خاص ، ثمّ حل المعادلة $(*)$

ب. عيّن وأنشئ (Δ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث :
$Im(z) = 1$ و $Re(z) \geq 0$

ج. عيّن مجموعة الأعداد الطبيعية n بحيث M_n تنتمي إلى (Δ).

* * *

التمرين 83.

المستوي المركّب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$. نعتبر النقط A ، B ، C ، D و E لواحقها على الترتيب $z_A = 1$ ، $z_B = 4 + i$ ، $z_C = 3i$ ، $z_D = -1 + i$ ، $z_E = -2i$

1. بيّن أنّ $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{z_E - z_A}{z_D - z_A}$ ماذا تستنتج ؟

2. عيّن لاحقة صورة النقطة C بالتشابه المباشر S الذي مركزه A ، نسبته $\frac{\sqrt{2}}{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{4}$

3. لتكن I_1 ، I_2 ، I_3 و I_4 منتصفات القطع المستقيمة $[BC]$ ، $[CD]$ ، $[DE]$ و $[EB]$

أ. بيّن أنّه يوجد تحويل نقطي r مركزه I_1 ويحوّل النقطة I_4 إلى I_2

ب. احسب $z_{I_1} + z_{I_3}$ و $z_{I_2} + z_{I_4}$ ، ثمّ استنتج طبيعة الرباعي $I_1 I_2 I_3 I_4$

4. لتكن النقطة $M'(x'; y')$ ذات اللاحقة z' صورة النقطة $M(x; y)$ ذات اللاحقة z بالتشابه S

أ. بيّن أنّ $z' = \frac{1}{2}[(1 + i)z + 1 - i]$ ، ثمّ برهن أنّ :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}(x - y + 1) \\ y' = \frac{1}{2}(x + y - 1) \end{cases}$$

ب. عيّن مجموعة النقط M من المستوي التي إحداثياتها أعداد صحيحة وتحقق $\overrightarrow{HM'} \cdot \overrightarrow{HK} = 0$ ، حيث $H\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ و $K(1; 3)$.

* * *

التمرين 84.

1. حل في مجموعة الأعداد المركّبة $\mathbb{C}$ المعادلة :

$$(z-1+i)[z^2-2(2+\sqrt{3})z+8+4\sqrt{3}]=0$$

2. المستوي المركّب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$. C,B,A نقط من المستوي لواحقها على الترتيب : $z_A=1-i$ ، $z_B=2+\sqrt{3}+i$ ، $z_C=\overline{z_B}$

   أ. بيّن أنّ $z_B-2=2e^{i\frac{\pi}{6}}$. استنتج إنشاء النقطة B ، ثمّ ارسم النقط C,B,A

   ب. عين لاحقة النقطة B' صورة النقطة B بالدوران r الذي مركزه O وزاويته $-\frac{\pi}{6}$

   ج. اكتب العدد $\frac{z_B}{z_{B'}}$ على الشكل الجبري ثمّ على الشكل الأسّي واستنتج عمدة z_B

3. M نقطة تختلف عن O لاحقتها $z=ae^{i\theta}$ ، حيث a عدد حقيقي موجب و θ عدد حقيقي ، M_1 صورة M بالدوران r و M' نظيرة M_1 بالنسبة لحامل محور الفواصل

   أ. بيّن أنّ لاحقة M' هي $z'=ae^{i\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)}$

   ب. عيّن مجموعة قيّم θ التي تحقق $z'=z$ ، ثمّ استنتج مجموعة النقط M من المستوي التي تكون من أجلها $M=M'$.

* * *

التمرين 85.

A_0 و B_0 نقطتان من المستوي بحيث $A_0B_0=8\ cm$

ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه A_0 ، نسبته $\frac{1}{2}$ وزاويته $\frac{3\pi}{4}$

نعرّف متتالية النقط (B_n) بـ : $B_{n+1}=S(B_n)$ من أجل كل عدد طبيعي n

1. أنشئ النقط B_1 ، B_2 ، B_3 و B_4
2. أثبت أنّه من أجل كل عدد طبيعي n المثلثان $A_0B_nB_{n+1}$ و $A_0B_{n+1}B_{n+2}$ متشابهان
3. نعرّف المتتالية (u_n) بـ : $u_n=B_nB_{n+1}$ من أجل كل عدد طبيعي n

   أ. أثبت أنّ (u_n) متتالية هندسية يُطلب تحديد أساسها q

   ب. اكتب عبارة u_n بدلالة n و u_0

   ج. نضع : $\sum_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$. احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_n$

4. حل في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة : $3x-4y=2$
5. ليكن (Δ) المستقيم الذي يعامد المستقيم (A_0B_0) في A_0. عيّن قيّم العدد الطبيعي n التي من أجلها تنتمي النقطة B_n إلى المستقيم (Δ).

* * *

التمرين 86.

1. نعتبر العدد المركّب L حيث : $L = 2(-1 + i\sqrt{3})$
   - أ. اكتب العدد المركّب L على شكله الأسّي
   - ب. حل في مجموعة الأعداد المركّبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - L = 0$
2. z_1 و z_2 عددان مركّبان معرّفان كما يلي : $\overline{z_1} = 1 - i\sqrt{3}$ و $z_2 = -z_1$
   - أ. بيّن أنّ $(z_1)^{2013}$ عدد حقيقي
   - ب. عيّن قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد المركّب $\left(\frac{z_2 \times e^{i\frac{\pi}{2}}}{2}\right)^n$ تخيليا صرفا
3. θ عدد حقيقي من المجال $\left[\frac{4\pi}{3}; \frac{10\pi}{3}\right]$ و M نقطة لاحقتها $z = \frac{2}{z_2}e^{i\theta} + 1$.

   عيّن مجموعة النقط M لمّا يتغيّر العدد الحقيقي θ على المجال $\left[\frac{4\pi}{3}; \frac{10\pi}{3}\right]$.

* * *

التمرين 87.

نعتبر في المستوي المركّب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$ النقطتين A و B حيث : $z_A = \sqrt{3} + i$ ، $z_B = \sqrt{3} - i$

1. اكتب العددين z_A و z_B على الشكل الأسّي ثمّ أنشئ النقطتين A و B
2. R دوران مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{3}$
   - أ. عيّن $z_{A'}$ لاحقة النقطة A' صورة A بالدوران R
   - ب. اكتب $z_{A'}$ على الشكل الجبري ثمّ أنشئ النقطة A'
3. h تحاك مركزه O ونسبته $-\frac{3}{2}$

   اكتب على الشكل المثلثي $z_{B'}$ لاحقة B' صورة B بالتحاكي h ثمّ أنشئ النقطة B'
4. ليكن r نصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث $OA'B'$ التي مركزها ω ذات اللاحقة z_ω
   - أ. باستعمال الخاصية $z\bar{z} = |z|^2$ ، تحقق من صحة العبارات التالية :

$$① \; z_\omega \overline{z_\omega} = r^2 \; ; \; ② \; (z_\omega - 2i)(\overline{z_\omega} + 2i) = r^2$$

$$③ \; \left(z_\omega + \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i\right)\left(\overline{z_\omega} + \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i\right) = r^2$$

   - ب. استنتج أنّ : $z_\omega - \overline{z_\omega} = 2i$ و $z_\omega + \overline{z_\omega} = \frac{-4\sqrt{3}}{3}$
   - ج. استنتج z_ω لاحقة النقطة ω وقيمة r.

* * *

التمرين 88.

نعتبر في المستوي المركّب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$، النقط A ، B و I لواحقها على الترتيب: $z_A=-2$، $z_B=-1+i$ ، $z_I=i$.

من أجل كل عدد مركّب z حيث $z\neq -2$ ، نضع : $z'=\frac{iz+i+1}{z+2}$ ، حيث M صورة العدد المركّب z و M' صورة العدد المركّب z'

1. أ. تحقق من أنّ : $z'=\frac{i(z+1-i)}{z+2}$
   ب. بيّن أنّه إذا كانت النقطة M تنتمي إلى (Δ) محور القطعة $[AB]$ فإنّ النقطة M' تنتمي إلى دائرة (C) يُطلب تعيين عناصرها
   ج. عيّن طبيعة (E) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي بحيث يكون z' تخيليا صرفا
2. أ. تحقق من أنّ : $z'-i=\frac{1-i}{z+2}$
   ب. استنتج أنّ : $IM'\times AM=\sqrt{2}$ وأنّ $\left(\vec{u};\overrightarrow{IM'}\right)+\left(\vec{u};\overrightarrow{AM}\right)=-\frac{\pi}{4}+2k\pi$
   ج. بيّن أنّه إذا كانت النقطة M تنتمي إلى الدائرة (Γ) ذات المركز A ونصف القطر 1 فإنّ النقطة M' تنتمي إلى مجموعة يُطلب تعيينها
3. لتكن النقطة E ذات اللاحقة $z_E=-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$
   أ. بيّن أنّ النقطة E تنتمي إلى الدائرة (Γ) ثم بيّن أنّ $\left(\vec{u};\overrightarrow{AE}\right)=\frac{\pi}{3}+2k\pi$
   ب. باستعمال نتائج السؤال 2 أنشئ النقطة E' المرفقة بالنقطة E.

* * *

التمرين 89.

r عدد حقيقي موجب تماما و θ عدد حقيقي حيث $\theta\in[0;\pi]$

نعتبر الأعداد المركّبة : $z_0=r(-\cos\theta+i\sin\theta)$ ، $z_1=r^2(\sin\theta+i\cos\theta)$ ، $z_2=\sqrt{3}(1+i)$

1. اكتب الأعداد z_0 ، z_1 و z_2 على الشكل المثلثي
2. أ. عيّن العددين الحقيقيين r و θ بحيث يكون : $z_1=\overline{z_0}$
   ب. عيّن عندئذ قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون العدد $\left(\frac{z_0}{z_1}\right)^n$ حقيقيا
3. نفرض $r=1$ و $\theta=\frac{\pi}{3}$
   نعتبر في المستوي المركّب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ النقط A,B,C لواحقها على الترتيب : z_0 ، z_1 و z_2.
   أ. عيّن z_G لاحقة النقطة G مرجح الجملة $\{(A;2),(B;2),(C;-1)\}$

ب. عيّن طبيعة (Γ) مجموعة النقط M من المستوي حيث :

$$\left\|2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}\right\|=3$$

* * *

التمرين 90.

1. عيّن العددين الحقيقيين a و b بحيث :
   $(a-i)^2=2+2i\sqrt{3}$ و $(b-i)^2=2-2i\sqrt{3}$
2. أ. حل في مجموعة الأعداد المركّبة المعادلة : $z^2-4z+16=0$
   ب. استنتج في المجموعة C حلول المعادلة : $z^4-4z^2+16=0$
3. نعتبر العدد المركّب المعرّف كما يلي : $y_k=\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i\right)^k-\left(\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}i\right)^k$ ، حيث k عدد صحيح.
   أ. بيّن أنّ $y_k=\frac{1}{2^{k-1}}i\sin\frac{k\pi}{3}$ ، ثمّ استنتج أنّ $y_{2013}=0$
   ب. اكتب العدد $2^{2017}y_{2017}$ على الشكل $\sqrt{\alpha i}$ حيث α عدد طبيعي يُطلب تعيينه.
4. المستوى المركّب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقها على الترتيب $z_A=2+2i\sqrt{3}$ ، $z_B=2-2i\sqrt{3}$ و $z_C=5+2^{2017}y_{2017}$
   أ. تحقق أنّ $z_C=\frac{3}{2}z_A+z_B$
   ب. بيّن أنّ : $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=2^{2017}y_{2017}$ ، ثمّ عيّن طبيعة التحويل النقطي f الذي يحوّل النقطة A إلى B معينا عناصره المميزة وعبارته المركّبة
5. لتكن A_0 النقطة ذات اللاحقة $z_0=\sqrt{3}-i$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $A_{n+1}=f(A_n)$ حيث z_n لاحقة A_n. نعتبر المتتالية (u_n) المعرّفة كما يلي: $u_0=A_0A_1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=A_nA_{n+1}$
   أ. بيّن أنّ (u_n) متتالية هندسية يُطلب تحديد حدّها الأول u_0 وأساسها q
   ب. استنتج عبارة u_n بدلالة n ، ثمّ احسب المجموع S_n حيث :
   $$S_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$$
   ج. برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n :
   $$u_0\times u_1\times\ldots\times u_n=\left[\left(128-32\sqrt{3}\right)^2\times 3^n\right]^{\frac{n+1}{4}}$$

* * *

التمرين 91.

I- نعتبر في مجموعة الأعداد المركّبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة ذات المجهول z والوسيط α التالية :

$$z^3-(4+\alpha i)z^2+(13+4\alpha i)z-13\alpha i=0\ \dots(E)$$

1. بيّن أنّ المعادلة (E) تقبل حلا تخيليا صرفا يُطلب تعيينه
2. عيّن العددين الحقيقيين a وb حيث تكافئ المعادلة (E) المعادلة :
   $(z-\alpha i)(z^2+az+b)$
3. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E)

II- في المستوي المركّب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ ، نعتبر النقط A ، B ، C وG التي لواحقها على الترتيب : $z_A=\alpha i$ ، $z_B=2+3i$ ، $z_C=\overline{z_B}$ و $z_G=5$

1. بيّن أنّ لاحقة النقطة E صورة B بالتشابه S الذي مركزه A ، نسبته $\frac{\sqrt{2}}{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{4}$ هي : $z_E=\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)+i\left(\frac{5+\alpha}{2}\right)$
2. عيّن z_F لاحقة النقطة F صورة G بالدوران r الذي مركزه I منتصف $[AB]$ وزاويته $-\frac{\pi}{2}$
3. احسب z_G-z_A و z_F-z_E ثمّ اكتب العدد $\frac{z_G-z_A}{z_F-z_E}$ على شكله الأسّي. ماذا تستنتج؟
4. أ. بيّن أنّ : $\frac{z_F-z_E}{z_A-z_E}=\frac{\left(2\alpha^2-12\alpha+50\right)+i\left(2\alpha^2-10\right)}{(1-\alpha)^2+(\alpha-5)^2}$
   ب. عيّن قيمتي α التي تكون من أجلها النقط A ، E وF في استقامية
   ج. من أجل قيمتي α المتحصل عليمها سابقا ، بيّن أنّ A تنتمي إلى الدائرة (Γ) التي قطرها $[BC]$
   د. استنتج في هذه الحالة طبيعة المثلث ABC.

التمرين 92.

ليكن العددان المركبان z_1 وz_2 حيث :

$$z_1=\frac{1}{\tan\alpha}+i \quad \text{و} \quad z_2=\frac{1}{z_1\sin\alpha} \quad \text{و} \quad \left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$$

1. احسب طويلة وعمدة كلا من z_1 وz_2
2. بيّن أنّ $z_2=\overline{z_1}\sin\alpha$ ، ثمّ استنتج العددين z_1 وz_2 حيث $z_2\times z_1=2$
3. نضع: $\alpha=\frac{\pi}{4}$. عيّن العدد الطبيعي n حتى يكون $\left(\frac{z_1}{\sqrt{2}}\right)^n-(z_2)^n$ حقيقي سالب

4. لتكن الدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}$ و (C_f) تمثيلها البياني حيث :

$$f(x)=\frac{\sin x}{\cos^3 x}$$

- أ. بيّن أنّ الدالة f فردية ودورية دورها π ، ثمّ استنتج مجال دراستها
- ب. ادرس تغيّرات الدالة f ، ثمّ أنشئ المنحنى (C_f) على المجال $[-\pi;\pi]$
- ج. احسب مساحة الحيّز المحدّد بالمنحنى (C_f) ، محور الفواصل والمستقيمين $x=\frac{\pi}{4}$ و $x=-\frac{\pi}{4}$.

التمرين 93.

1. نعتبر في مجموعة الأعداد المركّبة $\mathbb{C}$ ، كثير الحدود $P(z)$ حيث :

$$P(z)=z^3-(3+2\sqrt{3})z^2+\left(7+4\sqrt{3}\right)z-(5+2\sqrt{3})$$

- أ. عيّن العددين الحقيقيين a و b حيث : $P(z)=(z-1)(z^2+az+b)$
- ب. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z)=0$

2. في المستوي المركّب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ ، نعتبر النقط A ، B ، C التي لواحقها على الترتيب :

$$z_A=1 \text{ ، } z_B=1+\sqrt{3}-i \text{ ، } z_C=1+\sqrt{3}+i$$

- أ. اكتب العدد $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ على الشكل المثلثي ، ثمّ استنتج طبيعة المثلث ABC
- ب. بيّن أنّ لاحقة ω مركز الدائرة (γ) المحيطة بالمثلث ABC هي $z_\omega=1+\frac{2\sqrt{3}}{3}$
- ج. عيّن (E) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي حيث : $\left|\frac{z_C-z}{z_B-z}\right|=1$

3. أ. احسب $\cos\theta$ حيث : $\theta=\left(\overrightarrow{\omega A};\overrightarrow{\omega B}\right)$

ب. اكتب العبارة المركّبة للدوران R الذي مركزه ω ويحوّل النقطة A إلى B

4. ليكن التحويل T الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ حيث :

$$z'=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)\bar{z}+\left(\frac{3}{2}+\sqrt{3}\right)+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)i$$

بيّن أنّ $T=Rot$ حيث t تحويل نقطي يُطلب تعيينه.

التمرين 94.

1. عيّن الجذرين التربيعيين للعدد المركّب $3-4i$
2. a ، b و c ثلاثة أعداد مركّبة تشكل بهذا الترتيب حدودا متتابعة لمتتالية حسابية

- أ. عيّن الأعداد المركّبة a ، b و c حيث : $\begin{cases} a+b+c=6+6i \\ a.b.c=-30+18i \end{cases}$
- ب. نفرض $u_0=3i$ و $r=2-i$. عيّن رتبة الحدّ الذي قيمته $38-16i$

3. في المستوي المركّب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ ، نعتبر النقط A ، B ، C التي لواحقها على الترتيب : $z_A = 3i$ ، $z_B = 2 + 2i$ ، $z_C = 4 + i$
   - أ. بيّن أنّ النقط A ، B و C في استقامية
   - ب. عيّن لاحقة النقطة D نظيرة B بالنسبة إلى O
   - ج. عيّن لاحقة النقطة F صورة D بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AC}$
   - د. عيّن (Δ) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي حيث $|iz + 3| = |z - 2 + 4i|$
   - ه. عيّن معادلة (Δ') صورة (Δ) بالتحاكي h الذي مركزه A ونسبته $\frac{1}{2}$
   - و. اكتب العبارة المركّبة للدوران r الذي مركزه D وزاويته $-\frac{\pi}{3}$.

التمرين 95.

نعتبر في مجموعة الأعداد المركّبة المعادلة (E) ذات المجهول z التالية :

$$(E): z^2 + (1 - 2i)z + 3 - 3i = 0$$

1. تحقّق أنّ $z_1 = -1 - i$ حل للمعادلة (E) ، ثمّ استنتج الحل الثاني z_2
2. نضع : $P(z) = z^3 - 2(1 + i)z^2 + 3iz + 9i - 9$
   - أ. بيّن أنّ $P(z)$ يقبل حلا حقيقيا يُطلب تعيينه ، ثمّ حلل $P(z)$
   - ب. استنتج حلول المعادلة $P(z) = 0$
3. في المستوي المركّب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ ، نعتبر النقط A ، B ، C التي لواحقها على الترتيب : $z_A = -1 - i$ ، $z_B = 3$ ، $z_C = 3i$
   - أ. احسب كلا من $|z_B - z_A|$،$|z_C - z_A|$و$|z_C - z_B|$. ما نوع المثلث ABC ؟
   - ب. عيّن z_I لاحقة النقطة I التي تحقق الجملة التالية : $\begin{cases}|z_I - z_B| = |z_I - z_A| \\ |z_I - z_C| = |z_I - z_A|\end{cases}$
   - ج. احسب مساحة الدائرة المحيطة بالمثلث ABC.

التمرين 96.

المستوي المركّب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر النقطة A ذات اللاحقة 2 و (Γ) الدائرة ذات المركز O وتشمل النقطة A

1. نضع : $\alpha = 1 + i\sqrt{3}$
   - أ. بيّن أنّ $\alpha^2 - 4\alpha = 2\bar{\alpha} - 8$
   - ب. بيّن أنّ النقطتين B و C لاحقتاهما على الترتيب α و $\bar{\alpha}$ تنتميان إلى الدائرة (Γ)
   - ج. أنشئ النقط A ، B و C والدائرة (Γ)

2. لتكن D نقطة من الدائرة (Γ) لاحقتها $2e^{i\theta}$ حيث θ عدد حقيقي ينتمي إلى المجال $]-\pi;\pi[$ و E صورة D بالدوران R الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{3}$
برّر أنّ لاحقة E هي $z_E = \alpha e^{i\theta}$
3. لتكن النقطتان F وG منتصفا القطعتين $[BD]$ و$[CE]$ على الترتيب
   أ. برّر أنّ لاحقة F وG هما $z_F = \frac{\alpha}{2} + e^{i\theta}$ و $z_G = \frac{\alpha e^{i\theta}+\overline{\alpha}}{2}$ على الترتيب
   ب. باستعمال السؤال 1.أ بيّن أنّ $\frac{z_G-2}{z_F-2} = \frac{\alpha}{2}$ واستنتج طبيعة المثلث AFG.

* * *

التمرين 97.

المستوي المركّب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$

I- نريد إيجاد الأعداد المركّبة u التي تحقق : $u^2 = 21 - 20i$

1. اثبت أنّ u حل للمعادلة ذات المجهول المركّب z التالية :
$$z^4 - 42z^2 + 841 = 0 \ldots (E)$$
2. بيّن أنّ (E) تكافئ $(z^2+29)^2 - 100z^2 = 0$ ، ثمّ حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E)
3. استنتج قيم u

II- نعتبر النقط A, B, C وD لواحقها على الترتيب : $z_A = 2 - i$ ، $z_B = 5 - 2i$ ، $z_C = -3 + i$ و $z_D = -5 + 2i$.

نعتبر التحويل f الذي يحوّل A إلى B ويحوّل C إلى D ، ولتكن M نقطة لاحقتها z وM' لاحقتها z' صورة M بالتحويل f

1. اكتب z' بدلالة z
2. عيّن طبيعة التحويل f واذكر عناصره

III- نعتبر المتتالية (u_n) المعرّفة بـ $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = 2u_n + 1$

1. بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، العددان u_{n+1} وu_n أوليان فيما بينهما
2. فسّر هندسيا باستعمال التحويل f ، حدود المتتالية (u_n)
3. بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 2^n - 1$
4. أ. بيّن أنّه من أجل كل عددين طبيعيين غير معدومين n وp حيث $n \geq p$ ، لدينا :
$$u_n = u_p + 2^p u_{n-p}$$
   ب. بيّن أنّه من أجل كل $n \geq p$ ، $PGCD(u_n; u_p) = PGCD(u_p; u_{n-p})$

* * *

التمرين 98.

1. ليكن العدد المركّب β بحيث : $\beta = 4\sqrt{2}(\ 1 + \mathrm{i})$
   - **أ.** اكتب العدد β على الشكل المثلثي
   - **ب.** حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^3 = \beta \ldots (1)$
   - **ج.** لتكن z_1 ، z_2 و z_3 حلول المعادلة (1). برهن أنّ :

$$\frac{z_1 \times z_2}{z_3^2} = \frac{z_2 \times z_3}{z_1^2} = \frac{z_1 \times z_3}{z_2^2}$$

2. في المستوى المركّب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط A ، B ، C ، D و H لواحقها على الترتيب $z_A = \alpha$ ، $z_B = 1 + \frac{\alpha-1}{\alpha} i$ ، $z_C = i\alpha$ ، $z_D = -\frac{1}{\alpha} i$ و $z_H = 1 + z_D$ حيث α عدد حقيقي موجب تماما يختلف عن 1
   - أ. تحقق أنّ $z_B - z_D = \overline{z_D}(z_A - z_C)$ ، ثمّ بيّن أنّ :

$$\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(z_B - z_D)\right]^{2016} = iz_A \times z_D$$

   - ب. استنتج أنّ المستقيمين (AC) و (BD) متعامدان
   - ج. عيّن العبارة المركّبة للتشابه المباشر S الذي يحوّل A إلى B ويحوّل C إلى D ، ثمّ جد عناصره المميّزة
   - د. بيّن أنّ المثلثين OAC و BHD متشابهان ، ثمّ جد علاقة بين مساحتيهما
3. عيّن مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي تحقق :

$$\arg(\bar{z} + i\alpha) = -\arg(z_A - z_C) + 2k\pi$$ ، حيث $k \in \mathbb{Z}$

* * *

التمرين 99.

المستوي المركّب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$

I- نعتبر النقط A ، B و I التي لواحقها على الترتيب : $z_A = 3 + 2i$ ، $z_B = -3$ و $z_I = 1 - 2i$

1. اكتب العدد $\frac{z_I - z_A}{z_I - z_B}$ على الشكل الأسّي ، ثمّ استنتج طبيعة المثلث IAB
2. احسب z_C لاحقة النقطة C صورة I بالتحاكي h الذي مركزه A ونسبته 2
3. عيّن z_D لاحقة النقطة D مرجح الجملة $\{(A,1);(B,-1);(C,1)\}$
4. بيّن أنّ الرباعي $ABCD$ مربّع
5. عيّن (Γ) مجموعة النقط M من المستوي حيث :

$$\left\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\right\|$$

II- E نقطة لاحقتها $3i$ و f التحويل التي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z حيث $M \neq E$ ، النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث : $z' = \frac{3iz-7}{z-3i}$

1. انشر $(z-7i)(z+i)$ ، ثمّ بيّن أنّ للتحويل f نقطتان صامدتان F و K يُطلب تعيين لاحقتيهما
2. لتكن (γ) الدائرة التي قطرها $[FK]$ ، M نقطة من (γ) تختلف عن F و K ، و M' صورة M بالتحويل f
   - أ. برّر أنّ لاحقة النقطة M هي $z = 3i + 4e^{i\theta}$ حيث $\theta \in \mathbb{R}$
   - ب. اكتب z' بدلالة θ ، ثمّ استنتج أنّ $M' \in (\gamma)$
   - ج. برهن أنّ $z' = -\bar{z}$ واستنتج الإنشاء الهندسي للنقطة M'
3. لتكن (σ) الدائرة التي مركزها E ونصف قطرها r حيث $r > 0$
   عيّن (σ') صورة (σ) بالتحويل f.

* * *

التمرين 100.

1. حل في مجموعة الأعداد المركّبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^3 - 4z^2 + 8z - 8 = 0$
2. المستوي المركّب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$
   نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقها على الترتيب : $z_A = 2$ ، $z_B = 1 + i\sqrt{3}$ و $z_C = 1 - i\sqrt{3}$
   - أ. اكتب الأعداد z_B ، z_C و $\frac{z_B}{z_C}$ على الشكل الأسّي
   - ب. عيّن قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد $\left(\frac{z_B}{z_C}\right)^n$ حقيقيا
   - ج. بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي فردي n يكون : $z_B^{3n} + z_C^{3n} + 2^{3n+1} = 0$
   - د. أنشئ النقط A ، B و C ، ثمّ عيّن طبيعة الرباعي $OBAC$.
3. نرفق بكل نقطة M من المستوي ذات اللاحقة z ، النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث : $z' = \frac{z_A\bar{z} - z_C}{\bar{z} - z_C}$
   - أ. عيّن ثمّ أنشئ (D) مجموعة النقط M من المستوي حيث :
     $(z - z_B)(\bar{z} - z_C) = 1$
   - ب. تحقق أنّ : $z' = z_A + \frac{z_C}{\bar{z} - z_C}$
   - ج. بيّن أنّه إذا كانت النقطة M تنتمي إلى (D) فإنّ النقطة M' تنتمي إلى دائرة (Γ) يُطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

* * *

التمرين 1. (بكالوريا 2008 ع ت)

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة : $z^2-(1+2i)z-1+i=0$
نرمز للحلين z_1 و z_2 حيث :$|z_1|<|z_2|$. بيّن أن : $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2008}$ عدد حقيقي.
2. المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o\,;\vec{u}\,;\vec{v})$ ولتكن النقط A ، B و C من المستوي التي لاحقاتها على الترتيب هي : 1 ، z_1 و z_2.
وليكن العدد المركب $Z=\frac{z_2-1}{z_1-1}$.
   - أ. انطلاقا من التعريف :$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ و من الخاصية :
$e^{i(\theta_1+\theta_2)}=e^{i\theta_1}\times e^{i\theta_2}$ حيث θ ، θ_1 و θ_2 أعداد حقيقية.
برهن أن :$e^{-i\theta}=\frac{1}{e^{i\theta}}$ و $\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}}=e^{i(\theta_1-\theta_2)}$.
   - ب. أكتب العدد Z على الشكل الأسي.
   - ج. أكتب Z على الشكل المثلثي و استنتج أن النقطة C هي صورة النقطة B بتشابه مباشر مركزه A ، يُطلب تعيين عناصره.

التمرين 2. (بكالوريا 2008 ع ت)

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة : $z^2+iz-2-6i=0$
2. نعتبر في المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ النقطتين A و B اللتين لاحقتاهما على الترتيب هما : $z_A=2+i$ و $z_B=-2-2i$.
عيّن z_ω لاحقة النقطة ω مركز الدائرة (Γ) التي قطرها [AB].
3. لتكن C النقطة التي لاحقتها $z_c=\frac{4-i}{1+i}$. أكتب z_c على الشكل الجبري ثمّ أثبت أن C تنتمي إلى (Γ).
4. برهن أن عبارة التشابه المباشر S الذي مركزه $M_0(z_0)$ و نسبته k ،$(k>0)$ و زاويته θ و الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ ، هي :$z'-z_0=ke^{i\theta}(z-z_0)$.
5. تطبيق : عيّن الطبيعة و العناصر المميزة للتحويل S المعرّف بالعبارة :
$z'+\frac{1}{2}i=2e^{i\frac{\pi}{3}}(z+\frac{1}{2}i)$.

التمرين 3. (بكالوريا 2008 ت ر)

لتكن في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة (*) المعرفة كما يلي :

$$z^3+(2-4i)z^2-(6+9i)z+9(-1+i)=0$$

1. بيّن أن $z_0=3i$ هو حل للمعادلة (*)
2. حل في C المعادلة (*) ثمّ اكتب حلولها z_0 ، z_1 و z_2 على الشكل الأسي حيث :
$|z_1|<|z_2|$.

3. لتكن النقط A، B و C صور الحلول z0 ، z1 و z2 على الترتيب في مستو منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{u};\vec{v})$.
عيّن النقطة G مرجح الجملة $\{(A;1),(B;1),(C;-1)\}$.
4. عيّن المجموعة (E) للنقط M من المستوي حيث: $AM^2+BM^2-CM^2=-13$.
بيّن أن النقطة A تنتمي إلى (E) ثمّ أنشئ (E).
5. تحقّق أن النقط O ، B و G على استقامة واحدة ثمّ عيّن صورة المجموعة (E) بالتحاكي الذي مركزه O و يحوّل B إلى G ، محددا عناصره المميزة.

* * *

التمرين 4. (بكالوريا 2008 ت ر)

r عدد حقيقي موجب تماما و θ عدد حقيقي كيفي.

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة ذات المجهول z :
$$z^2-2i\left(r\cos\frac{\theta}{2}\right)z-r^2=0$$
أكتب الحلين على الشكل الأسي.
2. في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{u};\vec{v})$ نعتبر النقطتين A و B صورتي حلي المعادلة. عيّن θ حتى يكون المثلث OAB متقايس الأضلاع.

* * *

التمرين 5. (بكالوريا 2008 ر)

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{u};\vec{v})$. نعتبر النقطتين A و B اللتين لاحقتيهما $\sqrt{3}-i$ و $\sqrt{3}+3i$ على الترتيب.

1. أكتب العبارة المركبة للتشابه المباشر S الذي مركزه O و يحوّل A إلى B ، ثمّ عيّن زاويته و نسبته
2. نعرّف متتالية النقط من المستوي المركب كما يأتي : A0 = A و من أجل كل عدد طبيعي n ، $A_{n+1}=S(A_n)$. نرمز إلى لاحقة A_n بالرمز z_n
   - أ. أنشئ في المستوي المركب النقط A_0 ، A_1 و A_2
   - ب. برهن أنّ : $z_n=2\left(\sqrt{3}\right)^n e^{i\left(\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}$
   - ج. عيّن مجموعة الأعداد الطبيعية n التي تنتمي من أجلها النقطة A_n إلى المستقيم (OA_1)
3. نعتبر المتتالية (u_n) المعرّفة كما يلي : $u_0=A_0A_1$ و $u_n=A_nA_{n+1}$ من أجل كل عدد طبيعي n
   - أ. بيّن أنّ المتتالية (u_n) هندسية يُطلب تحديد حدها الأول u_0 و أساسها q
   - ب. استنتج عبارة u_n بدلالة n
   - ج. أحسب بدلالة n ، المجموع S_n حيث : $S_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$ ، ثمّ احسب $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$

* * *

التمرين 6. (بكالوريا 2008 ر)

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة كثير الحدود $P(z)$ المعرّف كما يلي :

$$P(z) = 2z^4 - 2iz^3 - z^2 - 2iz + 2$$

1. بيّن أنّه إذا كان α جذرا لكثير الحدود $P(z)$ فإنّ $\frac{1}{\alpha}$ جذر له أيضا
2. تحقّق أنّ $1 + i$ جذر لكثير الحدود $P(z)$
3. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z) = 0$
4. أكتب الحلول على الشكل الأسي
5. لتكن A ، B ، C ، D النقط من المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ و التي لاحقاتها على الترتيب $1 + i$ ، $-1 + i$ ، $-\frac{m}{2} - \frac{m}{2}i$ ، $\frac{m}{2} - \frac{m}{2}i$ ، حيث m عدد حقيقي.
   - عيّن m حتى يكون الرباعي ABCD مربعا.

التمرين 7. (بكالوريا 2009 ع ت)

P(z) كثير حدود مركب حيث : $P(z) = (z - 1 - i)(z^2 - 2z + 4)$

1. حل في المجموعة C المعادلة : $P(z) = 0$
2. نضع $z_1 = 1 + i$ و $z_2 = 1 - \sqrt{3}i$.
   - أ. أكتب العددين z_1 و z_2 على الشكل الأسي.
   - ب. أكتب العدد $\frac{z_1}{z_2}$ على الشكل الجبري ثمّ الشكل الأسي.
   - ج. استنتج القيمة المضبوطة لكل من $cos\frac{7\pi}{12}$ و $sin\frac{7\pi}{12}$.
3. n عدد طبيعي. عيّن قيم n بحيث يكون العدد $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$ حقيقيا.
4. أحسب قيمة العدد $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{456}$.

التمرين 8. (بكالوريا 2009 ع ت)

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة : $z^2 - 2z + 4 = 0$
2. نرمز لحلي المعادلة z_1 و z_2.
   - أ. أكتب العددين z_1 و z_2 على الشكل الأسي.
   - ب. A ، B وC النقط من المستوي التي لواحقها على الترتيب: $z_A = 1 - i\sqrt{3}$، $z_B = 1 + i\sqrt{3}$ و $z_C = \frac{1}{2}(5 + i\sqrt{3})$. أحسب الأطوال AB ، AC وBC، ثمّ استنتج طبيعة المثلث ABC.
   - ج. جد الطويلة و عمدة للعدد المركب Z حيث: $Z = \frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$.

د. أحسب z^3 و z^6 ثمّ استنتج أن العدد z^{3k} عدد حقيقي من أجل كل عدد طبيعي k.

* * *

التمرين 9. (بكالوريا 2009 ت ر)

1. حل في C المعادلة: $z^2 - 2z + 2 = 0$
2. استنتج في C حلول المعادلة : $(\bar{z} + 3)^2 - 2(\bar{z} + 3) + 2 = 0$
3. المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o; \vec{u}; \vec{v})$. نعتبر النقط A ، B و M التي لواحقها $1 - i$ ، $1 + i$ و z على الترتيب.

أ. عيّن (Γ) مجموعة النقط M من المستوي حيث : $z = 1 - i + ke^{i\frac{5\pi}{4}}$ عندما k يمسح R^+.

ب. عيّن (E) مجموعة النقط M من المستوي حيث : $|z - 1 - i| = |z - 1 + i|$.

* * *

التمرين 10. (بكالوريا 2009 ت ر)

1. حل في المجموعة C المعادلة: $z^2 - 6z + 18 = 0$.
2. ليكن العدد المركب z_1 حيث: $z_1 = 3 - 3i$.

أ. أكتب z_1 على الشكل الأسي.

ب. أحسب طويلة العدد z_3 و عمدة له حيث: $z_1 \times z_3 = 6\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$.
استنتج $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$.

3. نعتبر في المستوي المزوّد بمعلم متعامد و متجانس $(o; \vec{u}; \vec{v})$ النقط A ، B و C التي لواحقها $3 + 3i$ ، $3 - 3i$ و $\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2}$ على الترتيب.

أ. عيّن قيم العدد الحقيقي α حتى تقبل الجملة المثقلة :
$\{(A;1), (B;-1), (C;\alpha)\}$ مرجحا نرمز له G_α.

ب. عيّن مجموعة النقط G_α لما يتغير α في R^*.

* * *

التمرين 11. (بكالوريا 2009 ر)

نرفق بكل عدد مركب z يختلف عن 1 العدد المركب $f(z)$ حيث : $f(z) = \frac{z-i}{z-1}$

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة :
$(45 + 45i)f(z) = 23 + 45i - 2z$
2. لتكن M صورة العدد المركب z في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$

أ. عين مجموعة النقط M بحيث يكون $f(z)$ عددا حقيقيا سالبا تماما

ب. أحسب العدد المركب z_0 بحيث : $|f(z_0)| = 1$ و $Arg(f(z_0)) = \frac{3\pi}{2}$

3. في المستوي المركب نعتبر النقط A ، B ، C صور الأعداد المركبة 1 ، i ، z_0 على الترتيب
   - أ. ما نوع المثلث ABC ؟
   - ب. عيّن النقطة D نظيرة C بالنسبة إلى المستقيم (AB) ، و استنتج طبيعة الرباعي ADBC.

التمرين 12. (بكالوريا 2010 ع ت)

نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقطتين A و B اللتين لاحقتيهما على الترتيب : $z_A = 1 + i$ و $z_B = 3i$

1. أكتب على الشكل الأسي z_A و z_B
2. ليكن S التشابه المباشر الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' لاحقتها z' حيث: $z' = 2iz + 6 + 3i$
   - أ. عيّن العناصر المميزة للتشابه المباشر S
   - ب. عيّن z_C لاحقة النقطة C صورة النقطة A بالتشابه المباشر S
   - ج. استنتج طبيعة المثلث ABC
3. لتكن D مرجح الجملة $\{(A;2),(B;-2),(C;2)\}$
   - أ. عيّن z_D لاحقة النقطة D
   - ب. عيّن مع التبرير طبيعة الرباعي ABCD
4. لتكن M نقطة من المستوي تختلف عن B و عن D لاحقتها z ، و لتكن (Δ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي يكون من أجلها $\frac{z_B-z}{z_D-z}$ عددا حقيقيا موجبا تماما
   - أ. تحقق أن النقطة E ذات اللاحقة $z_E = 6 + 3i$ تنتمي إلى (Δ)
   - ب. أعط تفسيرا هندسيا لعمدة العدد المركب $\frac{z_B-z}{z_D-z}$. عيّن حينئذ المجموعة (Δ).

التمرين 13. (بكالوريا 2010 ع ت)

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - 6z + 18 = 0$ ، ثمّ اكتب الحلين على الشكل الأسي
2. في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، نعتبر النقط A ، B ، C و D لاحقاتها على الترتيب : $z_A = 3 + 3i$ ، $z_B = \overline{z_A}$ ، $z_C = -z_A$ و $z_D = -z_B$
   - أ. بيّن أنّ النقط A ، B ، C و D تنتمي إلى نفس الدائرة ذات المركز O مبدأ المعلم
   - ب. عيّن زاوية للدوران R الذي مركزه O و يحوّل النقطة A إلى النقطة B
   - ج. بيّن أنّ النقط A ، O و C في استقامية و كذلك النقط B ، O و D
   - د. استنتج طبيعة الرباعي ABCD.

* * *

التمرين 14. (بكالوريا 2010 ت ر)

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(z-3+2i)(z^2+6z+10)=0$
2. علّم في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، نعتبر النقط A، C، D و I ذات اللاحقات : $z_A=3-2i$ ، $z_C=-3+i$ ، $z_D=-3-i$ و $z_I=1$ على الترتيب
3. z عدد مركب يحقق الجملة : $\begin{cases} arg(z-3+2i)=arg(z-1)+\frac{\pi}{2} \\ |z-3+2i|=|z-1| \end{cases}$
   - أ. بيّن أنّ الجملة تكافئ: $\frac{z-3+2i}{z-1}=i$ ، ثمّ عيّن قيمة z
   - ب. B النقطة التي لاحقتها $z_B=3$ ، تحقق أنّ : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$. ما هي طبيعة الرباعي $ABCD$ ؟
   - ج. لتكن J النقطة التي لاحقتها z_J حيث : $z_J=1-2i$. أكتب على الشكل الأسي العدد المركب Z حيث : $Z=\frac{z_A-z_I}{z_B-z_J}$. تحقق أنّ : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{JI}$.

     ما هي طبيعة الرباعي $ABIJ$ ؟

* * *

التمرين 15. (بكالوريا 2010 ت ر)

1. أ. أكتب على الشكل الأسي العدد المركب a حيث : $a=-2+2i\sqrt{3}$
   - ب. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول Z :

     $\mathrm{z}^2=-2+2\mathrm{i}\sqrt{3}$
2. ينسب المستوي إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. A ، B ، C النقط التي لاحقاتها : $z_A=-2$ ، $z_B=-1-\sqrt{3}i$ ، $z_C=1+\sqrt{3}i$ على الترتيب.
   - أ. احسب طويلة العدد المركب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ و عمدة له
   - ب. استنتج طبيعة المثلث ABC
3. لتكن (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث : $arg(\bar{z}+2)=\frac{\pi}{3}$
   - أ. تحقق أن B تنتمي إلى (E)
   - ب. عيّن المجموعة (E).

* * *

التمرين 16. (بكالوريا 2010 ر)

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^3-3\mathrm{z}^2+3\mathrm{z}-9=0\ ...\ (E)$

1. أ. تحقق أنّ 3 حل للمعادلة (E) ، ثمّ عيّن الأعداد الحقيقية a ، b ، c بحيث ، من أجل كل عدد مركب z فإنّ: $z^3-3\mathrm{z}^2+3\mathrm{z}-9=(z-3)(az^2+bz+c)$
   - ب. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E)

2. المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. النقط A ، B ، C صور الأعداد المركبة : $z_A = 3$ ، $z_B = i\sqrt{3}$ ، $z_C = -i\sqrt{3}$.
بيّن أنّ المثلث ABC متقايس الأضلاع

3. D النقطة التي لاحقتها $z_D = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$ و E صورتها بالدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{3}$. عيّن لاحقة النقطة E

4. F النقطة التي لاحقتها $z_F = 1 - i\sqrt{3}$
   - أ. أحسب $\frac{z_F}{z_E}$ و استنتج أنّ المستقيمين (OE) و (OF) متعامدان
   - ب. عيّن z_G لاحقة النقطة G بحيث يكون $OEGF$ مربعا.

* * *

التمرين 17. (بكالوريا 2010 ر)

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1. نسمي A ، B ، I النقط التي لاحقاتها على الترتيب : $z_A = 1 - 4i$ ، $z_B = -1 - 2i$ ، $z_I = 1 - 2i$.
   - أ. علّم النقط A ، B ، I
   - ب. أكتب على الشكل الجبري العدد المركب $Z = \frac{z_I - z_A}{z_I - z_B}$
   - ج. ما هو نوع المثلث IAB ؟
   - د. C صورة I بالتحاكي الذي مركزه A و نسبته 2. احسب اللاحقة z_C للنقطة C
   - ه. D مرجح الجملة $\{(A;1),(B;-1),(C;1)\}$. احسب اللاحقة z_D للنقطة D
   - و. بيّن أنّ ABCD مربع

2. عيّن و أنشئ (Γ_1) مجموعة النقط M من المستوي حيث :
$$\left\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\right\|$$

3. عيّن و أنشئ (Γ_2) مجموعة النقط M من المستوي حيث :
$$\left\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = 1$$

* * *

التمرين 18. (بكالوريا 2011 ع ت)

نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، النقط A ، B ، C التي لاحقاتها على الترتيب: $z_A = -i$ ، $z_B = 2 + 3i$ ، $z_C = -4 + i$.

1. أ. أكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$
   - ب. عيّن طويلة العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ و عمدة له ، ثمّ استنتج طبيعة المثلث ABC

2. نعتبر التحويل النقطي T في المستوي الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z ، النقطة M ذات اللاحقة z' حيث: $z' = iz - 1 - i$

أ. عيّن طبيعة التحويل T محددا عناصره المميزة

ب. ما هي صورة النقطة B بالتحويل T

3. لتكن D النقطة ذات اللاحقة $z_D = -6 + 2i$

أ. بيّن أنّ النقط A ، C ، D في استقامية

ب. عيّن نسبة التحاكي h الذي مركزه A و يحوّل النقطة C إلى النقطة D

ج. عيّن العناصر المميزة للتشابه S الذي مركزه A و يحوّل B إلى D

التمرين 19. (بكالوريا 2011 ع ت)

نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، النقط A ، B ، C التي لاحقاتها على الترتيب: $z_A = 3 - 2i$ ، $z_B = 3 + 2i$ ، $z_C = 4i$.

1. أ. علم النقط A ، B ، C

ب. ما طبيعة الرباعي OABC ؟ علل إجابتك

ج. عين لاحقة النقطة Ω مركز الرباعي OABC

2. عيّن ثمّ أنشئ (E) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق :

$$\left\|\overrightarrow{\mathrm{M}O} + \overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{MB}} + \overrightarrow{\mathrm{MC}}\right\| = 12$$

3. أ. حلّ في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية :

$z^2 - 6z + 13 = 0$. نسمي z_0 ، z_1 حلي هذه المعادلة

ب. لتكن M نقطة من المستوي لاحقتها العدد المركب z.

عيّن مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق: $|\mathrm{z} - z_0| = |\mathrm{z} - z_1|$

التمرين 20. (بكالوريا 2011 ت ر)

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $(E) \dots z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$.

1. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) ، ثمّ اكتب حلولها على الشكل المثلثي

2. المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. نعتبر النقط A ، B ، C التي لاحقاتها على الترتيب: $z_A = 2i$ ، $z_B = \sqrt{3} + i$ ، $z_C = \sqrt{3} - i$.

نضع: $L = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

أ. أكتب L على الشكل الأسي

ب. أثبت أنّ: $z_A - z_B = L(z_C - z_B)$ ، ثمّ استنتج أنّ A صورة C بتحويل نقطي يُطلب تعيينه و تحديد عناصره المميزة

ج. استنتج نوع المثلث ABC ، ثمّ احسب مساحته S.

التمرين 21. (بكالوريا 2011 ت ر)

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

L العدد المركب المعرّف كما يلي: $L = \frac{-4\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{5+3i}$

1. أ. أكتب L على الشكل الجبري ثمّ على الشكل الأسي

ب. بيّن أنّ: $L^{12} + 1 = 0$ ، ثمّ احسب: $\left(-4\sqrt{2} + i\sqrt{2}\right)^{12} + (5+3i)^{12}$

ج. n عدد طبيعي فردي و p عدد طبيعي زوجي. أثبت أنّ: $L^{4n} + L^{4p} = 0$

2. النقطتان A و B لاحقتاهما على الترتيب: $z_A = 5 + 3i$ ، $z_B = 5 - 3i$

أ. عيّن اللاحقة $z_{A'}$ للنقطة A' صورة A بالتشابه المباشر الذي مركزه النقطة B و نسبته $\sqrt{2}$ و زاويته $\frac{3\pi}{4}$

ب. عيّن z_G لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ABA'.

* * *

التمرين 22. (بكالوريا 2011 ر)

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، A ، B ، C ثلاث نقط من المستوي لاحقاتها على الترتيب: $z_A = 1 - i$ ، $z_B = -1 + i$ ، $z_C = \sqrt{3}(1+i)$.

1. اكتب على الشكل الأسّي الأعداد المركبة : z_A ، z_B ، z_C

2. أ. احسب الطويلة وعمدة للعدد المركب $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ ، ثمّ فسّر هندسيا النتائج المحصّل عليها

ب. حدّد طبيعة المثلث ABC

3. عيّن لاحقة النقطة D بحيث يكون الرباعي $ACBD$ معيّنا

4. T التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z ، النقطة M ذات اللاحقة z' حيث: $z' = (-1+i)z + 1 - 3i$

أ. عيّن طبيعة التحويل T وعناصره المميزة

ب. استنتج طبيعة التحويل ToT وعناصره المميزة.

* * *

التمرين 23. (بكالوريا 2011 ر)

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير في كل حالة من الحالات الآتية:

1. أ. الشكل المثلثي للعدد المركب $a = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ هو $-\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$

ب. $a^{2011} + \bar{a} = 0$ ، حيث: $\bar{a}$ مرافق a.

2. في المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

أ. التحويل T الذي كتابته المركبة: $z' = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)z$ دوران زاويته $-\frac{\pi}{4}$ و مركزه مبدأ المعلم

ب. مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث: $\arg(z - i) = -\frac{\pi}{4}$ هي المستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة A ذات اللاحقة i و شعاع توجيهه $\vec{u}$ لاحقته $1 + i$.

* * *

التمرين 24. (بكالوريا 2012 ع ت)

1. نعتبر في مجموعة الأعداد المركّبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية :
$z=\frac{3i(z+2i)}{z-2+3i}$ ، حيث $z\neq 2-3i$. حل في $\mathbb{C}$ هذه المعادلة
2. ينسب المستوي المركب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o,\vec{u},\vec{v})$. A و B نقطتان لاحقتاهما على الترتيب z_A و z_B حيث : $z_A=1+i\sqrt{5}$ ، $z_B=1-i\sqrt{5}$.
   - تحقق أنّ A و B تنتميان إلى دائرة مركزها O يُطلب تعيين نصف قطرها.
3. نرفق بكل نقطة M من المستوي لاحقتها z $(z\neq 2-3i)$ ، النقطة M' لاحقتها z' حيث : $z'=\frac{3i(z+2i)}{z-2+3i}$. النقط E,D,C لواحقها على الترتيب : $z_C=-2i$ ، $z_D=2-3i$ ، $z_E=3i$ و (Δ) محور القطعة $[CD]$.
   أ. عبّر عن المسافة OM' بدلالة المسافتين CM و DM.
   ب. استنتج أنّه من أجل كل نقطة M من (Δ) فإنّ النقطة M' تنتمي إلى دائرة (γ) يُطلب تعيين مركزها ونصف قطرها. تحقّق أنّ E تنتمي إلى (γ)

التمرين 25. (بكالوريا 2012 ع ت)

1. $P(z)$ كثير الحدود للمتغير المركب z حيث : $P(z)=z^3-12z^2+48z-72$
   أ. تحقّق أنّ 6 هو جذر لكثير الحدود $P(z)$.
   ب. جد العددين الحقيقيين α و β بحيث من أجل كل عدد مركب z :
   $$P(z)=(z-6)(z^2+\alpha z+\beta)$$
   ج. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة $P(z)=0$.
2. المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o,\vec{u},\vec{v})$. A ، B ، C نقط من المستوي المركب لواحقها على الترتيب :
   $$z_C=3-i\sqrt{3}\text{ ، }z_B=3+i\sqrt{3}\text{ ، }z_A=6$$
   أ. اكتب كلا من z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسّي.
   ب. اكتب العدد المركب $\frac{z_A-z_B}{z_A-z_C}$ على الشكل الجبري ، ثمّ على الشكل الأسّي.
   ج. استنتج طبيعة المثلث ABC.
3. ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه C ، نسبته $\sqrt{3}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$.
   أ. جد الكتابة المركبة للتشابه S.
   ب. عين $z_{A'}$ لاحقة النقطة A' صورة النقطة A بالتشابه S.
   ج. بيّن أنّ النقط A',B,A في استقامية.

التمرين 26. (بكالوريا 2012 ت ر)

1. عيّن العددين المركبين z_1 و z_2 بحيث : $\begin{cases}2z_1+3z_2=9-2i\\ 3z_1-z_2=8+8i\end{cases}$

2. نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o,\vec{u},\vec{v})$ ، النقط A ، B و Ω التي لاحقاتها على الترتيب z_A ، z_B و z_Ω حيث :

$z_\Omega = 1-2i$ ، $z_B = -3$ ، $z_A = 3+2i$

أ. أثبت أنّ : $z_B - z_\Omega = i(z_A - z_\Omega)$

ب. عيّن طبيعة المثلث ΩAB.

3. h هو التحاكي الذي مركزه النقطة A ونسبته 2.

أ. عيّن الكتابة المركبة للتحاكي h.

ب. عين z_C لاحقة النقطة C صورة النقطة Ω بالتحاكي h.

ج. عين z_D لاحقة النقطة D مرجح الجملة $\{(A,1);(B,-1);(C,1)\}$.

د. بيّن أنّ $ABCD$ مربّع.

4. (E) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق : $\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\| = 4\sqrt{5}$

أ. تحقق أنّ النقطة B تنتمي إلى المجموعة (E) ، ثمّ عيّن طبيعة (E) وعناصرها المميزة.

ب. أنشئ المجموعة (E).

* * *

التمرين 27. (بكالوريا 2012 ت ر)

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة ذات المجهول z :

$$(z^2+2z+4)\left(z^2-2\sqrt{3}z+4\right)=0$$

2. المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o,\vec{u},\vec{v})$

A ، B ، C وD نقط من المستوي لاحقاتها على الترتيب :

$z_D = -1+i\sqrt{3}$ ، $z_C = -1-i\sqrt{3}$ ، $z_B = \sqrt{3}-i$ ، $z_A = \sqrt{3}+i$

أ. اكتب كلا من z_A ، z_B ، z_C و z_D على الشكل الأسّي.

ب. تحقق أنّ : $\frac{z_D - z_B}{z_A - z_C} = i$ ، ثمّ استنتج أنّ المستقيمين (AC) و (BD) متعامدان.

3. z_n العدد المركب الذي طويلته $\frac{1}{2^n}$ و $\frac{2\pi}{3}n$ عمدة له حيث n عدد طبيعي.

L_n العدد المركب المعرف بـ: $L_n = z_D \times z_n$

أ. اكتب كلا من L_0 ، L_1 على الشكل الجبري.

ب. (u_n) هي المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي: $u_n = |L_n|$

- أثبت أنّ المتتالية (u_n) هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدّها الأول.
- M_0، M_1،...،M_n صور الأعداد المركبة L_0 ، L_1 ، ... ، L_n على الترتيب. احسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = \|\overrightarrow{OM_0}\| + \cdots + \|\overrightarrow{OM_n}\|$.
- جد نهاية S_n عندما يؤول n إلى $+\infty$.

* * *

التمرين 28. (بكالوريا 2012 ر)

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة ذات المجهول z :

$$z^2 - \sqrt{2}z + 1 = 0$$

2. المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o,\vec{u},\vec{v})$

A ، B ، C نقط من المستوي لاحقاتها على الترتيب :

$$z_C = z_A + z_B \text{ ، } z_B = \overline{z_A} \text{ ، } z_A = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

أ. اكتب على الشكل الأسّي الأعداد المركبة z_A ، z_B و $\frac{z_A}{z_B}$.

ب. عيّن لاحقة كل من A' ، B' و C' صور النقط A ، B و C على الترتيب بالدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{4}$.

ج. بيّن أنّ الرباعي $OA'C'B'$ مربّع.

3. نسمي (Δ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث :

$$|z - z_A| = |z - z_B|$$

أ. بيّن أنّ (Δ) هو محور الفواصل.

ب. بيّن أنّ حليّ المعادلة $\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right)^2 = i$ عددان حقيقيان (لا يُطلب حساب الحلين).

* * *

التمرين 29. (بكالوريا 2012 ر)

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة ذات المجهول z التالية :

$$(z^2+4)\left(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4\right) = 0$$

2. المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o,\vec{u},\vec{v})$

A ، B ، C وD نقط من المستوي التي لواحقها على الترتيب :

$$z_D = \overline{z_C} \text{ ، } z_C = -2i \text{ ، } z_B = \overline{z_A} \text{ ، } z_A = \sqrt{3}+i$$

- بيّن أنّ النقط A ، B ، C وD تنتمي إلى دائرة (γ) يُطلب تعيين مركزها ونصف قطرها ، ثمّ أنشئ النقط A ، B ، C وD.

3. نرمز بـ z_E إلى لاحقة النقطة E نظيرة النقطة B بالنسبة إلى المبدأ O

أ. بيّن أنّ $\frac{z_A - z_C}{z_E - z_C} = e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$.

ب. بيّن أنّ النقطة A هي صورة النقطة E بدوران R مركزه C يُطلب تعيين زاويته.

ج. استنتج طبيعة المثلث AEC.

د. H هو التحاكي الذي مركزه O ونسبته 2.

- عيّن طبيعة التحويل RoH وعناصره المميزة ، ثمّ استنتج صورة الدائرة (γ) بالتحويل RoH.

* * *

التمرين 30. (بكالوريا 2013 ع ت)

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة (I) ذات المجهول z التالية :

$$z^2-(4\cos\alpha)z+4=0\ ...\ (\mathrm{I})$$

2. من أجل $\alpha=\frac{\pi}{3}$ ؛ نرمز إلى حليّ المعادلة (I) بـ z_1 و z_2. بيّن أنّ : $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2013}=1$

3. نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o,\vec{u},\vec{v})$ النقط A ، B و C التي لاحقاتها على الترتيب :

$$z_C=4+i\sqrt{3}\ ،\ z_B=1-i\sqrt{3}\ ،\ z_A=1+i\sqrt{3}$$

أ. أنشئ النقط A ، B و C.

ب. اكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ ، ثمّ استنتج أنّ C هي صورة B بالتشابه المباشر S الذي مركزه A ويُطلب تعيين نسبته وزاويته.

ج. عيّن لاحقة النقطة G مرجح الجملة $\{(A;1),(B;-1),(C;2)\}$ ، ثمّ أنشئ G.

د. احسب z_D لاحقة النقطة D ، بحيث يكون الرباعي $ABDG$ متوازي أضلاع.

التمرين 31. (بكالوريا 2013 ع ت)

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة (E) ذات المجهول z الآتية :

$$z^2+4z+13=0\ ...\ (E)$$

1. تحقق أنّ العدد المركب $-2-3i$ حل للمعادلة (E) ، ثمّ جد الحل الآخر.

2. A و B نقطتان من المستوي المركب لاحقتاهما $z_A=-2-3i$ و $z_B=i$ على الترتيب. S التشابه المباشر الذي مركزه A ، نسبته $\frac{1}{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

أ. بيّن أنّ $z'=\frac{1}{2}iz-\frac{7}{2}-2i$

ب. احسب z_C لاحقة النقطة C ، علما أنّ C هي صورة B بالتشابه S.

3. لتكن النقطة D حيث: $2\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

أ. بيّن أنّ D مرجح النقطتين A و B المرفقتين بمعاملين حقيقيين يُطلب تعيينهما.

ب. احسب z_D لاحقة النقطة D.

ج. بيّن أنّ $\frac{z_D-z_A}{z_C-z_A}=i$ ، ثمّ استنتج طبيعة المثلث ACD.

التمرين 32. (بكالوريا 2013 ت ر)

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة ذات المجهول z :

$$2z^2+6z+17=0$$

2. في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o,\vec{u},\vec{v})$ ، النقط A ، B و C لاحقاتها على الترتيب :

$$z_C=-\frac{3}{2}-\frac{5}{2}i\ ،\ z_B=-\frac{3}{2}+\frac{5}{2}i\ ،\ z_A=-4$$

احسب الطويلة وعمدة للعدد المركب $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$، ثمّ استنتج طبيعة المثلث ABC.

.3

أ. عيّن z_D و z_E لاحقتي النقطتين D و E على الترتيب حتى يكون الرباعي $BCDE$ مربّعا مركزه A.

ب. عيّن (Γ_1) مجموعة النقط M من المستوي حيث :

$$\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}\| = 10\sqrt{2}.$$

.4 (Γ_2) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث : $\arg(z+4)=\frac{\pi}{4}$.

تحقق أنّ النقطة B تنتمي إلى (Γ_2) ، ثمّ عيّن المجموعة (Γ_2).

التمرين 33. (بكالوريا 2013 ت ر)

.1 حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة ذات المجهول z التالية :

$$\left(z+5-i\sqrt{3}\right)(z^2+2z+4)=0$$

.2 المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o,\vec{u},\vec{v})$

A ، B و C النقط التي لاحقاتها على الترتيب :

$$z_C=-5+i\sqrt{3} \text{ ، } z_B=-1+i\sqrt{3} \text{ ، } z_A=-1-i\sqrt{3}$$

S التشابه المباشر الذي يحوّل A إلى C ويحوّل O إلى B

- جد الكتابة المركبة للتشابه المباشر S ، ثمّ عيّن العناصر المميزة له.

.3

أ. عيّن z_D لاحقة النقطة D مرجح الجملة $\{(A;2),(B;-1),(C;1)\}$

ب. اكتب العدد المركب $\frac{z_B-z_A}{z_D-z_A}$ على الشكل الأسّي ، ثمّ استنتج طبيعة المثلث ABD.

ج. عيّن المجموعة (Γ) النقط M من المستوي حيث :

$$\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\|.$$

التمرين 34. (بكالوريا 2013 ر)

I) a و b عددان طبيعيان موجبان تماما. نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ ، النقط A ، B ، C و E التي لاحقاتها على الترتيب :

$$z_E = be^{i\frac{3\pi}{2}} \text{ ، } z_C=\overline{z_A} \text{ ، } z_B=-a\sqrt{2} \text{ ، } z_A=ae^{i\frac{3\pi}{4}}$$

.1

أ. اكتب على الشكل الأسّي العدد المركّب $\frac{z_A-z_B}{z_A}$ ، ثمّ استنتج طبيعة المثلث OAB

ب. حدد طبيعة الرباعي $OABC$ ، ثمّ استنتج مساحته.

.2 التشابه المباشر S ذو المركز O والنسبة $\frac{b}{a}$ والزاوية $\frac{3\pi}{4}$ ، يحوّل كل نقطة $M(z)$ من المستوي إلى النقطة $M'(z')$.

أ. اكتب العبارة المركبة للتشابه المباشر S ، ثمّ تحقق أنّ $S(A) = E$.

ب. بيّن أنّ مساحة الرباعي $OEFG$ هي b^2 (مقدّرة بوحدة المساحة) ، حيث : $S(B) = F$ و$S(C) = G$.

3.

أ. احسب بدلالة a وb العبارة : $|z_C|^2 + |z_E|^2 - 2|z_C \times z_E| \cos\left[\arg\left(\frac{z_E}{z_C}\right)\right]$

ب. استنتج قيمة CE^2 بدلالة a وb.

II) n عدد طبيعي و M_n نقطة من المستوي يختلف عن O لاحقتها z_n. نضع: $M_0 = A$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $M_{n+1} = S(M_n)$.

نعتبر المتتاليتين (u_n) و(v_n) المعرفتين ، من أجل كل عدد طبيعي n ، بـ $u_n = |z_n|$ و $v_n = \arg(z_n)$.

1. اكتب العدد المركّب $\frac{z_{n+1}}{z_n}$ على الشكل الأسّي بدلالة a وb.
2. نفرض أنّ : $a < b$ و $\arg\left(\frac{z_{n+1}}{z_n}\right) \in]-\pi;\pi]$

بيّن أنّ المتتالية (u_n) هندسية ، والمتتالية (v_n) حسابية يُطلب تعيين أساس وحساب الحد الأول لكل منهما.

3. احسب بدلالة a ، b وn المجموع T_n حيث : $T_n = a + b + \frac{b^2}{a} + \frac{b^3}{a^2} + \cdots + \frac{b^n}{a^{n-1}}$ ثمّ $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n$.
4. عيّن قيم الأعداد الطبيعية n التي تكون من أجلها النقط O , A , M_n في استقامية.

التمرين 35. (بكالوريا 2013 ر)

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة ذات المجهول z التالية :

$$z^2 + z + 1 = 0$$

2. نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ ، النقط A ، B وM ذات اللاحقات : $z_A = -\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ ، $z_B = \overline{z_A}$ و z على الترتيب.

أ. اكتب z_A على الشكل الأسّي.

ب. عيّن مجموعة النقط M من المستوي حيث :

$\arg[(z - z_A)^2] = \arg(z_A) - \arg(z_B)$.

3. التحويل النقطي r يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ حيث : $z' = z_A . z + z_B\sqrt{3}$.

أ. ما طبيعة التحويل r ؟ عيّن عناصره المميزة.

ب. التحاكي h يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ حيث : $z' = -2z + 3i$.
عيّن نسبة ومركز التحاكي h.

ج. نضع: $S = h\ o\ r$. عيّن طبيعة التحويل S ، مبرزا عناصره المميزة ، ثمّ تحقق أنّ عبارته المركّبة هي : $z' = 2e^{i\frac{\pi}{3}}(z - i) + i$.

4. نعتبر النقطة Ω ذات اللاحقة i والنقط C ، D و E ، حيث : $S(O) = C$ ، $S(C) = D$ و $S(D) = E$. بيّن أنّ النقط O ، Ω و E في استقامية.

5. أ. عيّن (Γ) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي حيث : $z = 2e^{i\theta} + e^{i\frac{\pi}{2}}$ مع $\theta \in \mathbb{R}$
ب. عيّن (Γ') صورة (Γ) بالتحويل S.

التمرين 36. (بكالوريا 2014 ع ت)

1. حل في مجموعة الأعداد المركّبة $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2 - 6\sqrt{2}\,z + 36 = 0$
2. المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o,\vec{u},\vec{v})$ ، لتكن النقط A ، B ، C ، D التي لاحقاتها على الترتيب : $z_A = 3\sqrt{2}(1+i)$ ، $z_B = \overline{z_A}$ ، $z_C = 6\sqrt{2}$ ، $z_D = \dfrac{z_C}{2}$
   - أ. اكتب z_A ، z_B و $(1+i)z_A$ على الشكل الأسّي
   - ب. احسب $\left(\frac{(1+i)z_A}{6\sqrt{2}}\right)^{2014}$
   - ج. بيّن أنّ النقط O ، A ، B و C تنتمي إلى الدائرة التي مركزها D يُطلب تعيين نصف قطرها
   - د. احسب $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$ ثمّ جد قيسا للزاوية $(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB})$. ما هي طبيعة الرباعي $OACB$؟
3. ليكن R الدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$.
   - أ. اكتب العبارة المركبة للدوران R
   - ب. عيّن لاحقة C' صورة C بالدوران R ثمّ تحقّق أنّ النقط C ، A و C' في استقامية
   - ج. عيّن لاحقة A' صورة A بالدوران R ثمّ حدّد صورة الرباعي $OACB$ بالدوران R

التمرين 37. (بكالوريا 2014 ع ت)

1. حل في مجموعة الأعداد المركّبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(z - i)(z^2 - 2z + 5) = 0$
2. في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$.
تُعطى النقط A ، B و C التي لاحقاتها : $z_A = i$ ، $z_B = 1 + 2i$ ، $z_C = 1 - 2i$ ، على الترتيب.
   - أ. أنشئ النقط A ، B و C
   - ب. جد z_H لاحقة النقطة H المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (BC)
   - ج. احسب مساحة المثلث ABC
3. ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه A ، نسبته $\frac{1}{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$.
   - أ. عيّن الكتابة المركبة للتشابه S
   - ب. بيّن أنّ مساحة صورة المثلث ABC بالتشابه S تساوي $\frac{1}{2}cm^2$

4. M نقطة لاحقتها z ، عيّن مجموعة النقط M حيث : $|z| = |iz + 1 + 2i|$.

التمرين 38. (بكالوريا 2014 ت ر)

1. حل في مجموعة الأعداد المركّبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(z - i)\left(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4\right) = 0$
2. المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o, \vec{u}, \vec{v})$ ، نسمي A ، B و C نقط المستوي التي لاحقاتها على الترتيب $z_1 = \sqrt{3} + i$ ، $z_2 = \sqrt{3} - i$ ، $z_3 = i$
   - أ. اكتب العدد $\frac{z_1}{z_2}$ على الشكل الأسّي
   - ب. هل توجد قيم للعدد الطبيعي n يكون من أجلها العدد المركب $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$ تخيليا صرفا؟ برّر إجابتك
3. أ. عيّن العبارة المركبة للتشابه المباشر S الذي مركزه A ويحوّل B إلى C ، محددا نسبته وزاويته.
   ب. استنتج طبيعة المثلث ABC
4. أ. عيّن العناصر المميزة لـ (E) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z والتي تحقق: $|z - z_1|^2 + |z - z_3|^2 = 5$.
   ب. عيّن (E') مجموعة النقط M من المستوي التي لاحقتها z حيث : $|z - z_1| = |z - z_3|$.

التمرين 39. (بكالوريا 2014 ت ر)

نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o, \vec{u}, \vec{v})$ ، النقطة A ذات اللاحقة $z_0 = 1 + i$.

1. أ. عيّن ثمّ أنشئ (γ) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي حيث : $z = z_0 + 2e^{i\theta}$ و θ يمسح $\mathbb{R}$.
   ب. عيّن ثمّ أنشئ (γ') مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي حيث: $z = z_0 + ke^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}$ و k يمسح $\mathbb{R}^+$.
   جـ. عيّن إحداثيات نقط تقاطع (γ) و (γ').
2. نسمي B النقطة التي لاحقتها z_1 حيث : $z_1 = z_0 + 2e^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}$.
   أ. عيّن الشكل الجبري للعدد المركب $\frac{z_1 - z_0}{z_0}$ ، ثمّ استنتج طبيعة المثلث OAB.
   ب. عيّن z_2 لاحقة النقطة C صورة النقطة B بالدوران R الذي مركزه A وزاويته $-\frac{\pi}{2}$.
   ج. عيّن العددين الحقيقيين α و β بحيث تكون النقطة O مرجحا للجملة $\{(A; \alpha), (C; \beta)\}$ و $\alpha + \beta = \sqrt{2}$.

د. عيّن ثمّ أنشئ (E) مجموعة النقط M من المستوي حيث:

$$\left((1+\sqrt{2})\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}\right)\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}\right)=0.$$

* * *

التمرين 40. (بكالوريا 2014 ر)

1. حل في مجموعة الأعداد المركّبة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية :

$$(z-1-2i)\left(z^2-2\left(1+\sqrt{3}\right)z+5+2\sqrt{3}\right)=0$$

2. A ، B ، C و D نقط من المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ لاحقاتها على الترتيب $z_A=1+2i$ ، $z_B=1+\sqrt{3}+i$ ، $z_C=1+\sqrt{3}-i$ و $z_D=1-2i$.

أ. بيّن أنّ $AB=CD$ و (AD) يوازي (BC).

ب. تحقق أنّ $\frac{z_A+z_C}{2}\neq\frac{z_B+z_D}{2}$ ، ثمّ استنتج طبيعة الرباعي $ABCD$.

3. أ. بيّن أنّ : $\frac{z_D-z_B}{z_A-z_B}=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$. استنتج أنّ D هي صورة A بتشابه مباشر مركزه B يُطلب تعيين نسبته وزاويته.

ب. بيّن أنّ المثلث ADB قائم وأنّ النقط A ، B ، C و D تنتمي إلى دائرة يُطلب تحديد مركزها ونصف قطرها.

ج. استنتج إنشاء للرباعي $ABCD$.

* * *

التمرين 41. (بكالوريا 2014 ر)

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$. A وB النقطتان اللتان لاحقتاهما على الترتيب : $a=-2+6i$ و $b=-1+2i$

1. اكتب العدد المركب $1+i$ على شكل أسّي.

2. S التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' لاحقتها z' حيث : $\mathrm{z}'=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}z+2$.

أ. D النقطة ذات اللاحقة d حيث $d=2i$ ، جد لاحقة النقطة D' صورة D بالتحويل S. ماذا تستنتج؟

ب. بيّن أنّ : $\mathrm{z}'-d=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}(z-d)$ واستنتج طبيعة وعناصر التحويل S.

3. (Δ) المستقيم ذو المعادلة : $3x+5y=11$

أ. تحقق أنّ النقطة $M_0(-3;4)$ تنتمي إلى (Δ) ، ثمّ عيّن نقط (Δ) التي إحداثياتها أعدادا صحيحة.

ب. $M_0{}'$ صورة M_0 بالتحويل S. بيّن أنّ المستقيمين (BM_0') و (BA) متعامدان.

4. x و y عددان صحيحان من المجال $[-5;5]$. عيّن مجموعة النقط $M(x;y)$ من المستوي بحيث يكون المستقيمان (BA) و (BM') متعامدين ، حيث M' صورة M بالتحويل S.

* * *

التمرين 42. (بكالوريا 2015 ع ت)

I) عيّن العددين المركّبين α و β حيث : $\begin{cases}2\alpha-\beta=-3\\2\bar{\alpha}+\bar{\beta}=-3-2i\sqrt{3}\end{cases}$ مع $\bar{\alpha}$ مرافق α و $\bar{\beta}$ مرافق β.

II) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$. A ، B و C النقط التي لاحقاتها على الترتيب : $z_A=-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $z_B=\overline{z_A}$ و $z_A=z_C.e^{i\frac{\pi}{3}}$

1. أ. اكتب z_A و z_C على الشكل الأسّي ، ثمّ عيّن قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n$ حقيقيا سالبا.
   ب. تحقق أنّ العدد المركّب $2\left(\frac{z_A}{\sqrt{3}}\right)^{2015}+\left(\frac{z_B}{\sqrt{3}}\right)^{1962}-\left(\frac{z_C}{\sqrt{3}}\right)^{1435}$ حقيقي.
2. D نقطة ذات اللاحقة $z_D=1+i$.
   أ. حدّد النسبة وزاوية التشابه المباشر S الذي مركزه O ويحوّل D إلى A
   ب. اكتب $\frac{z_A}{z_D}$ على الشكل الجبري ثمّ استنتج القيمة المضبوطة لكل من $\cos\frac{7\pi}{12}$ و $\sin\frac{7\pi}{12}$.
3. عيّن مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي تحقق : $z=k(1+i)e^{i\left(\frac{7\pi}{12}\right)}$ ، حيث k يمسح $\mathbb{R}^+$.

* * *

التمرين 43. (بكالوريا 2015 ع ت)

في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقط A ، B و C التي لاحقاتها على الترتيب : z_A ، z_B و z_C حيث : $z_A=2e^{i\frac{\pi}{6}}$ ، $z_B=-\overline{z_A}$ ، $z_C=-(z_A+z_B)$ ، ($\overline{z_A}$ هو مرافق z_A)

1. أ. اكتب كلا من العددين المركّبين z_B و z_C على الشكل الأسّي
   ب. استنتج أنّ النقط A ، B و C تنتمي إلى دائرة (γ) يُطلب تعيين مركزها ونصف قطرها
   ج. أنشئ الدائرة (γ) و النقط A ، B و C
2. أ. تحقق أنّ : $\frac{z_B-z_C}{z_B-z_A}=e^{-i\frac{\pi}{3}}$
   ب. استنتج أنّ المثلث ABC متقايس الأضلاع وأنّ النقطة O مركز ثقل هذا المثلث
   ج. عيّن وأنشئ (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث : $|z|=\left|z-\sqrt{3}-i\right|$
3. أ. عيّن زاوية للدوران r الذي مركزه O ويحوّل C إلى A
   ب. اثبت أنّ صورة (E) بالدوران r هي محور القطعة $[OB]$.

* * *

التمرين 44. (بكالوريا 2015 ت ر)

نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ ، النقطتين A و B اللتين لاحقتيهما على الترتيب z_A و z_B حيث : $z_A = 1 - i$ و $z_B = 3 + 3i$

1. أ. اكتب z_A و z_B على الشكل الأسّي

   ب. n عدد الطبيعي ، عيّن قيم n بحيث يكون العدد $\left(\frac{z_A}{\sqrt{2}}\right)^n$ حقيقيا

   ج. z عدد مركّب حيث : $\frac{z}{z_A} = 4e^{i\frac{\pi}{12}}$ ؛ احسب طويلة العدد z وعمدة له ، ثمّ اكتب $\frac{z}{z_A}$ على الشكل الجبري

   د. استنتج $\cos\frac{\pi}{12}$ و$\sin\frac{\pi}{12}$

2. أ. احسب z_C لاحقة النقطة C صورة النقطة B بالدوران الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$، واستنتج طبيعة المثلث ABC.

   ب. احسب z_D لاحقة النقطة D مرجح الجملة $\{(A;-1),(B;1),(C;1)\}$، ثمّ بيّن أنّ $ABDC$ مربّع.

* * *

التمرين 45. (بكالوريا 2015 ت ر)

1. حل في $\mathbb{C}$ مجموعة الأعداد المركّبة ، المعادلة ذات المجهول z التالية :
   $z^2 - 4(\sin\theta)z + 4 = 0 \ldots (\mathrm{I})$ ، حيث θ وسيط حقيقي.
2. من أجل $\theta = \frac{\pi}{3}$ نرمز إلى حلي المعادلة (I) بـ z_1 وz_2. اكتب z_1 وz_2 على الشكل الأسي.
3. نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ النقط A ، B و C التي لاحقاتها على الترتيب : $z_A = \sqrt{3} + i$ ، $z_B = \sqrt{3} - i$ و $z_C = 3\sqrt{3} + i$.

   أ. اكتب العدد المركّب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل الجبري ، ثمّ على الشكل الأسّي. واستنتج طبيعة المثلث ABC

   ب. استنتج أنّ النقطة C هي صورة النقطة B بالتشابه المباشر S الذي مركزه A ويُطلب تعيين نسبته وزاوية له.

   ج. عيّن لاحقة النقطة D صورة النقطة B بالانسحاب t الذي شعاعه $\overrightarrow{AC}$ ، ثمّ حدّد طبيعة الرباعي $ABDC$.

4. أ. عيّن (Γ_1) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث : $\frac{z - z_C}{z - z_B}$ تخيلي صرف مع $z \neq z_B$.

   ب. عيّن (Γ_2) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث : $\frac{z - z_C}{z - z_B}$ حقيقي مع $z \neq z_B$.

* * *

التمرين 46. (بكالوريا 2015 ر)

يُنسب المستوي إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$. نعتبر النقط A ، B ، C ، H و I لاحقاتها على الترتيب $z_A = i$ ، $z_B = -2 + i$ ، $z_C = -3$ ، $z_H = -3 + 4i$ و $z_I = -1 - i$.

1. أ. مثّل النقط A ، B ، C ، H و I في المعلم $(O,\vec{u},\vec{v})$.

   ب. عيّن النسبة وزاوية للتشابه المباشر الذي مركزه B ويحوّل النقطة A إلى النقطة C

2. عيّن z_G لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ABC

3. أ. اكتب على الشكل الجبري العدد المركّب : $\frac{z_B - z_C}{z_H - z_A}$

   ب. استنتج أنّ المستقيمين (AH) و (BC) متعامدان

   ج. بيّن أنّ H هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث ABC

4. بيّن أنّ النقط G ، H و I في استقامية

5. (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث : $z + 1 + i = \sqrt{5}e^{i\theta}$ مع $\theta \in \mathbb{R}$.

   أ. بيّن أنّ النقطة A تنتمي إلى المجموعة (Γ)

   ب. عيّن طبيعة المجموعة (Γ) مع تحديد عناصرها المميزة

   ج. أنشئ المجموعة (Γ)

   د. تحقق أنّ النقطتين B و C تنتميان إلى المجموعة (Γ).

* * *

التمرين 47. (بكالوريا 2015 ر)

1. حل في مجموعة الأعداد المركّبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية :

$$z^2 - 2\left(1 - \sqrt{3}\right)z + 8 = 0 \qquad \left(\text{لاحظ أنّ : } \left(1 + \sqrt{3}\right)^2 = 4 + 2\sqrt{3}\right)$$

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$. A و B نقطتان من المستوي لاحقتاهما على الترتيب : $z_A = \left(1 - \sqrt{3}\right) + i\left(1 + \sqrt{3}\right)$ و $z_B = \overline{z_A}$

2. أ. بيّن أنّ $\frac{z_B}{z_A} = e^{-\frac{7\pi}{6}i}$

   ب. استنتج عمدة للعدد المركب z_A

   ج. استنتج القيمة المضبوطة لكل من العددين $\cos\frac{7\pi}{12}$ و $\sin\frac{7\pi}{12}$

3. أ. حل في مجموعة الأعداد الصحيحة المعادلة ذات المجهول $(x;y)$ التالية :

   $7x - 2y = 1$

   ب. بيّن أنّه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ من الأعداد الصحيحة حلا للمعادلة $7x - 24y = 12$ فإنّ x يكون مضاعفا للعدد 12

   ج. استنتج كل الثنائيات $(x;y)$ من الأعداد الصحيحة حلولا للمعادلة

   $7x - 24y = 12$

د. عيّن مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها $(z_A)^n$ عددا حقيقيا سالبا تماما.

* * *

التمرين 48. (بكالوريا 2016 ع ت)

المستوي المركّب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$. من أجل كل نقطة M من المستوي لاحقتها العدد المركّب z حيث $(z \neq 1)$ ، نرفق النقطة M' لاحقتها العدد المركّب z' حيث : $z' = \frac{z-2}{z-1}$.

1. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $z' = z$
2. النقطتان A و B لاحقتاهما على الترتيب z_1 و z_2 حيث : $z_1 = 1 - i$ و $z_2 = \overline{z_1}$
   - أ. اكتب $\frac{z_2}{z_1}$ على الشكل الأسّي
   - ب. بيّن أنّ النقطة B هي صورة النقطة A بالدوران R الذي مركزه المبدأ O ، يُطلب تعيين زاوية له
3. نضع : $z \neq z'$. نعتبر النقطتين C و D لاحقتيهما 2 و 1 على الترتيب. عيّن (Γ) مجموعة النقط M حيث M' تنتمي إلى محور التراتيب ثمّ أنشئ (Γ)
4. h التحاكي الذي مركزه المبدأ O ونسبته 2
   - أ. عيّن طبيعة التحويل النقطي $S = hoR$ وعناصره المميّزة
   - ب. اكتب العبارة المركبة للتحويل S
   - ج. عيّن ثمّ أنشئ المجموعة (Γ') صورة (Γ) بالتحويل النقطي S.

* * *

التمرين 49. (بكالوريا 2016 ع ت)

1. حل في مجموعة الأعداد المركّبة $\mathbb{C}$ المعادلة :

$$\left(z - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)\left(z^2 + \sqrt{3}z + 1\right) = 0$$

2. المستوي المركّب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$. A, B, C نقط من المستوي لاحقاتها على الترتيب : $z_A = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ ، $z_B = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ ، $\boldsymbol{z_C = \overline{z_B}}$.
   - أ. اكتب z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسّي
   - ب. بيّن أنّه يوجد تشابه مباشر S مركزه B ويحوّل النقطة C إلى النقطة A يُطلب تعيين عناصره المميّزة
3. أ. عيّن لاحقة النقطة D حتى يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع ، ثمّ حدّد بدقّة طبيعته
   - ب. عيّن (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z والتي تحقق : $|z - z_A| = |\bar{z} - z_B|$ ، حيث $\bar{z}$ هو مرافق z

ج. عيّن (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z والتي تحقق :
$z = z_B + \sqrt{3}e^{i\theta}$ عندما θ يتغيّر على $\mathbb{R}$ ، ثمّ تحقّق أنّ النقطة A تنتمي إلى (Γ).

التمرين 50. (بكالوريا 2016 ع ت)

1. نضع من أجل كل عدد مركّب z : $P(z) = z^3 - 24\sqrt{3}$
   - أ. تحقق أنّ $P\left(2\sqrt{3}\right) = 0$
   - ب. جد العددين الحقيقيين a و b بحيث من أجل كل عدد مركّب z :
     $$P(z) = \left(z - 2\sqrt{3}\right)(z^2 + az + b)$$
   - ج. حل في مجموعة الأعداد المركّبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $P(z) = 0$
2. المستوي المركّب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$. A, B, C نقط من المستوي لواحقها على الترتيب : $z_A = -\sqrt{3} + 3i$ ، $z_B = -\sqrt{3} - 3i$ ، $\boldsymbol{z_C} = 2\sqrt{3}$.
   - أ. اكتب على الشكل الجبري العدد المركّب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$
   - ب. بيّن أنّه يوجد دوران r مركزه A ويحوّل النقطة B إلى النقطة C يُطلب تعيين زاويته
   - ج. استنتج طبيعة المثلث ABC
   - د. عيّن z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة C بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$ ، ثمّ حدّد بدقّة طبيعة الرباعي $ABCD$
3. عيّن (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة غير المعدومة z بحيث :
   $\arg\left(\frac{z}{\bar{z}}\right) = 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ (العدد $\bar{z}$ هو مرافق العدد z).

التمرين 51. (بكالوريا 2016 ع ت)

1. نعتبر في مجموعة الأعداد المركّبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z :
   $(E) \ldots 2\bar{z}^3 + 3\bar{z}^2 - 3\bar{z} + 5 = 0$. يشير الرمز $\bar{z}$ إلى مرافق العدد z
   - أ. اثبت أنّ المعادلة (E) تكافئ المعادلة $(2\bar{z} + 5)(\bar{z}^2 - \bar{z} + 1) = 0$
   - ب. حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة (E)
2. في المستوي المركّب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$ ، نعتبر النقط A, B, C و D التي لواحقها على الترتيب : $z_A = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ، $z_B = \overline{z_A}$ ، $z_C = -1$ ، $z_D = -\frac{5}{2}$
   - أ. اكتب كلا من العددين z_A و z_B على الشكل الأسّي

ب. أنشئ النقط A ، B ، C و D

ج. أثبت أنّ : $z_B - z_C = z_B(z_A - z_C)$

د. استنتج طبيعة المثلث ABC

3. ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه C ، زاويته $\frac{\pi}{3}$ ونسبته 2 ، ولتكن F صورة A بالتحويل S. أنشئ النقطة F ، ثمّ حدّد طبيعة المثلث AFC

4. عيّن طبيعة المجموعة (Γ) للنقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث : $z + 1 = kz_B$ ، لمّا يتغيّر k في المجموعة $\mathbb{R}_+$.

التمرين 52. (بكالوريا 2016 ت ر)

1. حل في مجموعة الأعداد المركّبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $9z^2 - 6\sqrt{3}z + 4 = 0$

2. في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$ ، لتكن النقطتين A و B لاحقتاهما على الترتيب : $z_A = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{3}i$ و $z_B = \overline{z_A}$

أ. اكتب كلا من z_A و z_B على الشكل الأسّي

ب. بيّن أنّ : $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{2016} + \left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{1437} = 0$

ج. عيّن قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n$ عددا حقيقيا

3. f التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' لاحقتها z' حيث : $z' = \left(\frac{z_A}{z_B}\right)z$

أ. عيّن طبيعة التحويل f وعناصره المميزة

ب. احسب z_C لاحقة النقطة C صورة النقطة A بالتحويل f

ج. عيّن z_D لاحقة النقطة D حتى تكون O مركز ثقل الرباعي $ABCD$.

التمرين 53. (بكالوريا 2016 ت ر)

I) 1. حل في مجموعة الأعداد المركّبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z الآتية :

$$\left(z^2 - 2\sqrt{2}z + 4\right)\left(2z - \sqrt{2}\right) = 0$$

2. اكتب الحلول على الشكل الأسّي

II) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$ ، نعتبر النقط A, B و C من المستوي التي لواحقها على الترتيب : $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ، $b = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ ، $c = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$

1. علّم النقط A, B و C في المعلم السابق

2. نعتبر النقطة D صورة النقطة C بالتشابه S الذي مركزه A ، نسبته 3 وزاويته π والنقطة E صورة النقطة C بالدوران R الذي مركزه O وزاويته $-\frac{\pi}{2}$

احسب اللاحقتين d و e للنقطتين D و E على الترتيب

III) نضع : $z=\frac{d-b}{e-b}$

1. اكتب العدد المركّب z على الشكل المثلثي
2. نعتبر النقطة I منتصف القطعة $[DE]$ ، F نظيرة النقطة B بالنسبة إلى النقطة I.
   ما طبيعة الرباعي $BDFE$ ؟

* * *

التمرين 54. (بكالوريا 2016 ر)

1. أ. حل في مجموعة الأعداد المركّبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-4z+5=0$
   ب. استنتج حلول المعادلة ذات المجهول المركّب z الآتية :
   $$\left(z+1+i(1-\sqrt{3})\right)^2-4z+1-4i\left(1-\sqrt{3}\right)=0$$
2. θ عدد حقيقي حيث : $0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$ و z_0 عدد مركّب طويلته 1 و θ عمدة له
   أ. اكتب العدد المركّب $1+i\sqrt{3}$ على الشكل الأسّي
   ب. عيّن θ علما أنّ : $\frac{z_0(1+i\sqrt{3})}{\overline{z_0}}=2e^{i\frac{\pi}{2}}$. ($\overline{z_0}$ هو مرافق العدد z_0)
   ج. n عدد طبيعي. من أجل قيمة θ المتحصّل عليها ، اكتب العدد المركّب $\left[\frac{z_0(1+i\sqrt{3})}{2}\right]^n$ على الشكل المثلثي
   د. عيّن قيّم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون $\left[\frac{z_0(1+i\sqrt{3})}{2}\right]^n$ عددا حقيقيا موجبا تماما
3. المستوي المركّب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ ، نعتبر النقط B,A و C التي لاحقاتها على الترتيب :
   $$z_C=1+i\sqrt{3} \text{ ، } z_B=2+i \text{ ، } z_A=2-i$$
   أ. عيّن z_D لاحقة النقطة D مرجح الجملة المثقلة $\{(A,1);(B,-1);(C,1)\}$
   ب. استنتج أنّ الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع
   ج. E النقطة من المستوي المركّب ذات اللاحقة z_E حيث :
   $$\begin{cases}\arg(z_E-z_A)-\arg(z_E-z_B)=\frac{\pi}{2}\\ \left|\frac{z_E-z_A}{z_E-z_B}\right|=2\end{cases}$$
   - بيّن أنّ : $z_E=\frac{14}{5}+\frac{3}{5}i$
   - بيّن أنّ النقطة A هي صورة النقطة B بتشابه مباشر يُطلب تعيين عناصره المميّزة
4. M نقطة من المستوي المركّب لاحقتها z ، النقطة I منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$

أ. عيّن z_I لاحقة النقطة I

ب. α عدد حقيقي، نسمي (Γ) مجموعة النقط M من المستوي المركّب التي تحقّق : $z - z_I = e^{i\alpha}$

- تحقّق أنّ النقطة E تنتمي إلى المجموعة (Γ)
- عيّن طبيعة المجموعة (Γ) وعناصرها المميزة عندما يتغيّر α في $\mathbb{R}$.

* * *

التمرين 55. (بكالوريا 2016 ر)

I) 1. حل في مجموعة الأعداد المركّبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - 2z + 2 = 0$

2. جد العددين المركبين z_1 و z_2 حيث : $\begin{cases} 2z_1 - 3z_2 = 5i\sqrt{2} \\ z_1 + 3z_2 = -2i\sqrt{2} \end{cases}$

II) المستوي المركّب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$. النقط D, C, B, A وH لاحقاتها على الترتيب : $z_A = i\sqrt{2}$ ، $z_B = -i\sqrt{2}$ ، $z_C = 1 + i$ ، $z_D = 1 - i$ ، $z_H = \frac{z_C - z_B}{z_E - z_B}$ حيث E النقطة التي تحقّق : $\overrightarrow{DE} = 2\overrightarrow{DO}$

1. اكتب z_H على الشكل الأسّي واستنتج نوع المثلث BEC
2. S تحويل نقطي في المستوي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' لاحقتها z' حيث : $z' = z_A z + z_B$

أ. ما هي طبيعة التحويل S ؟ وما هي عناصره المميّزة ؟

ب. احسب مساحة الدائرة (γ) التي مركزها C ونصف قطرها CD

ج. عيّن (γ') صورة (γ) بالتحويل S واستنتج مساحتها

3. عيّن (δ) مجموعة النقط M من المستوي (M تختلف عن B وC) ذات اللاحقات z التي يكون من أجلها العدد $\frac{z_B - z}{z_C - z}$ حقيقيا سالبا تماما.

* * *

التمرين 56. (بكالوريا 2017 ع ت)

I) حل في مجموعة الأعداد المركّبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(z + 2)(z^2 - 4z + 8) = 0$

II) المستوي المركّب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$. نعتبر النقط C, B, A التي لاحقاتها: $z_A = 2 - 2i$ ، $z_B = \overline{z_A}$ ، $z_C = -2$.

1. اكتب كلا من z_A و z_B على الشكل الأسّي
2. عيّن z_D لاحقة النقطة D حتى تكون B مركز ثقل المثلث ACD
3. (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z (M تختلف عن A وB) حيث : $\arg\left(\frac{z_B - z}{z_A - z}\right) = \frac{\pi}{2}$

تحقّق أنّ مبدأ المعلم O هو نقطة من (Γ)، ثمّ عيّن طبيعة المجموعة (Γ) وأنشئها

4. ليكن h التحاكي الذي مركزه النقطة C ونسبته 2 ، (Γ') صورة (Γ) بالتحاكي h.
عيّن طبيعة المجموعة (Γ') مع تحديد عناصرها المميزة.

* * *

التمرين 57. (بكالوريا 2017 ع ت)

المستوي المركّب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$

أجب بصحيح أو خطأ مع التعليل في كل حالة مما يلي:

1. مجموعة حلول المعادلة $\left(\frac{z+1-i}{z-i}\right)^2 = 1$ في المجموعة $\mathbb{C}$ هي $S=\left\{-\frac{1}{2}+i\right\}$
2. من أجل كل عدد مركّب z ، $(z+2)\times(\bar{z}+2)=|z+2|^2$
3. من أجل كل عدد طبيعي n ، $\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{3n}=1$
4. S التشابه المباشر الذي مركزه النقطة Ω ذات اللاحقة 1 ونسبته 3 وزاويته $\frac{\pi}{2}$
صورة الدائرة (C) ذات المركز $\omega(0;1)$ ونصف القطر 3 بالتشابه S هي الدائرة (C') ذات المركز $\omega'(-2;-3)$ ونصف القطر 9.
5. من أجل كل عدد حقيقي α :
إذا كان $z=(\sin\alpha+i\cos\alpha)\times(\cos\alpha-i\sin\alpha)$
فإنّ : $\arg(z)=\frac{\pi}{2}-2\alpha+2k\pi$ ، حيث k عدد صحيح.

* * *

التمرين 58. (بكالوريا 2017 ت ر)

المستوي المركّب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$. نعتبر النقط A ، B وC التي لواحقها: $z_A=-1$ ، $z_B=2+i$ و $z_C=-i$

1. اكتب العدد المركّب $\frac{z_A-z_C}{z_B-z_C}$ على الشكل الأسّي ، ثمّ استنتج طبيعة المثلث ABC
2. عيّن العبارة المركّبة للتشابه S الذي مركزه C ويحوّل B إلى A
3. نعتبر النقطة D نظيرة B بالنسبة إلى C والنقطة E صورة D بالتشابه S
   - أ. احسب z_D لاحقة D ، ثمّ تحقّق أنّ: $z_E=1-2i$ حيث z_E لاحقة E
   - ب. حدّد طبيعة الرباعي $ADEB$.
4. (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z (M تختلف عن A وB) حيث :
$\arg(z-z_A)-\arg(z-z_B)=\frac{\pi}{2}+2k\pi\ ;k\in\mathbb{Z}$
تحقّق أنّ النقطة C تنتمي إلى (Γ)، ثمّ حدّد طبيعة المجموعة (Γ) وأنشئها.

* * *

التمرين 59. (بكالوريا 2017 ت ر)

المستوي المركّب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$. نعتبر النقط A ، B ، C وD التي لواحقها: $z_A = 1 + i$ ، $z_B = \overline{z_A}$ ، $z_C = \frac{1}{2}(1 - i)$ و $z_D = \overline{z_C}$

1. أ. اكتب z_A وz_C على الشكل الأسّي ثمّ استنتج الشكل الأسّي للعددين z_B و z_D

   ب. عيّن قيم العدد الطبيعي n التي تحقق: $(z_A)^n = (z_B)^n$
2. أ. أوجد نسبة ومركز التحاكي h الذي يحوّل D إلى A ويحوّل C إلى B

   ب. احسب طويلة العدد المركّب $\frac{z_C - z_B}{z_D - z_A}$ ثمّ استنتج طبيعة الرباعي $ADCB$
3. جد z_G لاحقة النقطة G مرجح الجملة $\{(A,2);(B,2);(C,-1);(D,-1)\}$
4. لتكن (Γ) مجموعة النقط M من المستوي حيث :

$$\left\|2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}\right\| = \sqrt{5}$$

بيّن أنّ A نقطة من (Γ)، ثمّ حدّد طبيعة المجموعة (Γ) وعناصرها المميزة وأنشئها.

التمرين 60. (بكالوريا 2017 ر)

1. حل في مجموعة الأعداد المركّبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z :

$$(z - 2 + 2i)\left(z^2 - 2\sqrt{2}z + 8\right) = 0$$

2. المستوي المركّب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ ، نعتبر النقط B, A وC التي لاحقاتها: $z_A = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$ ، $z_B = \overline{z_A}$ ، $z_C = 2(1 - i)$

   أ. اكتب z_A ، z_B وz_C على الشكل الأسّي ، ثمّ استنتج النقط B, A وC تنتمي إلى دائرة (Ω) يُطلب تعيين مركزها ونصف قطرها

   ب. عيّن قيّم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد المركّب $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n$ تخيليا صرفا

   ج. نسمّي (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث :

   $z = z_C - k\left(\frac{z_A}{z_B}\right)$ ، مع k يمسح $\mathbb{R}_+$

   تحقّق أنّ النقطة C تنتمي إلى (Γ)، ثمّ عيّن وأنشئ (Γ).
3. r الدوران الذي مركزه النقطة O وزاويته $\frac{2\pi}{3}$ ، h التحاكي الذي مركزه النقطة O ونسبته -2

عيّن طبيعة التحويل hor وعناصره المميّزة ثمّ استنتج صورة الدائرة (Ω) بالتحويل hor.

* * *

التمرين 61. (بكالوريا 2017 ر)

I) اكتب العدد المركّب $\left(\frac{5}{2} + i\right)^2$ على الشكل الجبري ثمّ استنتج الجذرين التربيعيين للعدد المركّب : $\frac{21}{4} + 5i$

II) المستوي المركّب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$. نعتبر النقط C, B, A و I ذات اللواحق: $z_A = \frac{3}{2} + \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ ، $z_B = -\frac{3}{2}i$ ، $z_C = -\overline{z_A}$ ، $z_I = i$

1. اكتب z_A و z_C على الشكل الجبري
2. اكتب العدد المركّب $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$ على الشكل الأسّي مستنتجا طبيعة المثلث ABC
3. ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه B ويحوّل A إلى I
   - أ. اكتب العبارة المركّبة للتشابه المباشر S ثمّ عيّن نسبته وزاويته
   - ب. نعرّف من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq 2$ التحويل النقطي T_n كما يلي:

$$T_n = \underbrace{SoSo \dots oS}_{n \text{ مرّة}}$$

عيّن قيم n حتى يكون T_n تحاكيا ، عيّن عندئذ عناصره المميّزة.

* * *

التمرين 62. (بكالوريا 2017 ع ت الدورة الاستثنائية)

I) حل في مجموعة الأعداد المركّبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(z - 2)(z^2 + 2z + 4) = 0$

II) المستوي المركّب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$ حيث $||\vec{u}|| = 2cm$.

لتكن النقط C, B, A التي لاحقاتها: $z_A = 2$ ، $z_B = -1 + i\sqrt{3}$ ، $z_C = \overline{z_B}$.

1. أ. اكتب العدد z_B على الشكل الأسّي ثمّ استنتج الشكل الأسّي للعدد المركّب z_C

   ب. عيّن مركز ونصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث ABC ثمّ أنشئ النقط C, B, A
2. ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه النقطة O ونسبته $\frac{1}{2}$ وزاويته $\frac{2\pi}{3}$
   - أ. اكتب العبارة المركّبة للتشابه S ثمّ عيّن لاحقة كل من A' ، B' و C' صور النقط A ، B و C على الترتيب بالتشابه S ثمّ أنشئ في المعلم السابق النقط A' ، B' و C'
   - ب. احسب بالسنتيمتر المربع مساحة المثلث $A'B'C'$.

* * *

التمرين 63. (بكالوريا 2017 ع ت الدورة الاستثنائية)

المستوي المركّب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$. نعتبر النقط A ، B و C التي لاحقاتها: $z_A = -3 - 2i$ ، $z_B = 1 + i$ و $z_C = 4 - 3i$

1. عيّن النسبة وزاوية للتشابه S ذي المركز A والذي يحوّل النقطة B إلى النقطة C
2. اكتب على الشكل الأسّي العدد المركّب $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$ ، ثمّ استنتج طبيعة المثلث ABC

3. نرمز بـ G إلى مركز المثلث ABC وبـ I إلى منتصف القطعة $[AC]$.
عيّن كلا من z_G و z_I لاحقتي النقطتين G و I ، ثمّ بيّن أنّ النقط B ، G و I في استقامية

4. نعتبر النقطة D نظيرة B بالنسبة إلى I ، حدّد طبيعة الرباعي $ABCD$

5. نعتبر (Γ) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق: $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right\| = 5\sqrt{2}$
   أ. تحقّق أنّ النقطة C تنتمي إلى (Γ)
   ب. عيّن طبيعة المجموعة (Γ) ثمّ أنشئها.

التمرين 64. (بكالوريا 2017 ت ر الدورة الاستثنائية)

I) حل في مجموعة الأعداد المركّبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(z-4)(z^2-2z+4)=0$

II) المستوي المركّب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس$(O,\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر النقط C,B,A التي لاحقاتها: $z_A=4$ ، $z_B=1+i\sqrt{3}$ ، $z_C=1-i\sqrt{3}$.

1. اكتب العدد المركّب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ على الشكل الأسّي ثمّ استنتج طبيعة المثلث ABC

2. أ. عيّن لاحقة D صورة B بالدوران r الذي مركزه O وزاويته $\frac{2\pi}{3}$
   ب. عيّن طبيعة الرباعي $ABDC$

3. من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $z_n=(z_B)^n+(z_C)^n$
   أ. بيّن أنّ من أجل كل عدد طبيعي n ، $z_n=2^{n+1}\times\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$
   ب. نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $t_n=z_{6n}$
   عبّر عن t_n بدلالة n ثمّ احسب P_n بدلالة n حيث $P_n=t_0\times t_1\times\ldots\times t_n$.

التمرين 65. (بكالوريا 2017 ت ر الدورة الاستثنائية)

I) حل في مجموعة الأعداد المركّبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $\left(z+1-\sqrt{3}\right)(z^2+2z+4)=0$

II) المستوي المركّب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس$(O,\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر النقط C,B,A التي لاحقاتها: $z_A=-1+\sqrt{3}$ ، $z_B=-1-i\sqrt{3}$ ، $z_C=\overline{z_B}$.

4. بيّن أنّ $z_B-z_A=i(z_C-z_A)$ ، ثمّ استنتج طبيعة المثلث ABC واحسب مساحته

5. أ. اكتب على الشكل الجبري العدد L حيث : $L=\frac{z_C-z_A}{z_C}$
   ب. بيّن أنّ $L=\frac{\sqrt{6}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$ ثمّ استنتج القيمة المضبوطة لـ $\tan\frac{\pi}{12}$

6. نعتبر التحويل النقطي S الذي يحوّل النقطة M ذات اللاحقة z إلى النقطة M' ذات اللاحقة z' والمعرّف بـ : $z'=(z-z_B)L+z_B$
   بيّن أنّ S تشابه مباشر يُطلب تعيين عناصره المميزة

7. لتكن النقط A' ، B' و C' صور النقط A ، B و C على الترتيب بالتحويل SoS
   احسب مساحة المثلث $A'B'C'$.

* * *

التمرين 66. (بكالوريا 2017 ر الدورة الاستثنائية)

I) حل في مجموعة الأعداد المركّبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $2z^2-10z+\frac{29}{2}=0$

II) المستوي المركّب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر النقط C, B, A وD التي لاحقاتها: $z_A=\frac{3}{2}+\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ ، $z_B=\frac{3}{2}e^{-i\frac{\pi}{2}}$ ، $z_C=-\overline{z_A}$ و $z_D=i$.

1. أ. اكتب العددين z_A وz_Bعلى الشكل الجبري ثمّ علّم النقط في المعلم السابق

   ب. اكتب العدد المركّب $\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}$ على الشكل الأسّي ثمّ استنتج طبيعة المثلث ABC
2. جد لاحقة النقطة E نظيرة B بالنسبة إلى D ثمّ استنتج طبيعة الرباعي $ABCE$
3. اكتب العبارة المركّبة للتشابه المباشر S الذي مركزه B ويحوّل A إلى D ثمّ حدّد نسبته وزاويته
4. نعرّف متتالية النقط $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ كما يلي : $A_0=A$ و $A_{n+1}=S(A_n)$.

   أ. برهن بالتراجع أنّ من أجل كل عدد طبيعي n :

$$z_n-z_B=5\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}e^{i\frac{\pi}{4}(n+1)}$$

   ب. عيّن قيّم n الطبيعية حتى تنتمي النقطة A_n إلى المستقيم (AB).

* * *

التمرين 67. (بكالوريا 2017 ر الدورة الاستثنائية)

I) نعتبر في مجموعة الأعداد المركّبة $\mathbb{C}$ المعادلة :

$z^2-2(1-\sin\alpha)z+2(1-\sin\alpha)=0 \ldots (E)$ ، حيث α عدد حقيقي.

نرمز بـ z_1 وz_2 إلى حلي المعادلة (E)

1. عيّن الحلين z_1 وz_2 بدلالة α
2. نضع $\alpha=\frac{\pi}{6}$. بيّن أنّ : $z_1^{2017}+z_2^{2017}=1$

II) المستوي المركّب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ ، نعتبر النقط B, A وC التي لاحقاتها: $z_A=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ ، $z_B=\overline{z_A}$ ، $z_C=2z_A$

1. عيّن قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n$ عددا حقيقيا موجبا تماما
2. ليكن S التحويل النقطي الذي يحوّل النقطة M ذات اللاحقة z إلى النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث : $z'=(1+z_A)z+2z_B$

   عيّن طبيعة التحويل S ثمّ حدّد عناصره المميّزة
3. (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث : $\arg(\bar{z}-z_B)=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ، و $k\in\mathbb{Z}$

   تحقّق أنّ النقطة C تنتمي إلى (Γ)، ثمّ حدّد طبيعة (Γ) وأنشئها.

* * *

حلول تمارين
الأعداد المركبة
والتحويلات النقطية

حل التمرين 1.

كتابة الأعداد المركبة التالية على شكلها الجبري :

$$z_1 = (2+i)^2 = 2^2 + i^2 + 4i = 4 - 1 + 4i = \boxed{3+4i}$$

$$z_2 = (4+2i)(4-2i) = 4^2 - (2i)^2 = 16 - 4i^2 = 16 - 4(-1) = \boxed{20}$$

$$z_3 = (2-i)^2(1+2i)^2 = [(2-i)(1+2i)]^2 = (2+4i-i-2i^2)^2$$
$$= (4+3i)^2 = 16 - 9 + 24i = \boxed{7+24i}$$

$$z_4 = (3-2i)^3 = 3^3 - 3(3)^2(2i) + 3(3)(2i)^2 - (2i)^3$$
$$= 27 - 54i - 36 + 8i = \boxed{-9-46i}$$

$$z_5 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$$
$$= \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 3\left(-\frac{1}{2}\right)^2\left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 3\left(-\frac{1}{2}\right)\left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$$
$$= -\frac{1}{8} + \frac{3\sqrt{3}}{8}i + \frac{9}{8} - \frac{3\sqrt{3}}{8}i = \frac{8}{8} = \boxed{1}$$

$$z_6 = \frac{4-6i}{3+2i} = \frac{(4-6i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)} = \frac{12-8i-18i-12}{3^2-(2i)^2} = \frac{-26i}{9+4}$$
$$= \frac{-26i}{13} = \boxed{-2i}$$

$$z_7 = \frac{1+i}{3-i\sqrt{2}} = \frac{(1+i)\left(3+i\sqrt{2}\right)}{\left(3-i\sqrt{2}\right)\left(3+i\sqrt{2}\right)} = \frac{3+i\sqrt{2}+3i+i^2\sqrt{2}}{3^2-\left(i\sqrt{2}\right)^2}$$
$$= \frac{3-\sqrt{2}+\left(3+\sqrt{2}\right)i}{9+2} = \frac{3-\sqrt{2}+\left(3+\sqrt{2}\right)i}{11} = \boxed{\frac{3-\sqrt{2}}{11} + \frac{\left(3+\sqrt{2}\right)i}{11}}$$

$$z_8 = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{4n} = \left[\frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}\right]^{4n} = \left(\frac{1+i+i+i^2}{1-i^2}\right)^{4n} = \left(\frac{2i}{2}\right)^{4n}$$
$$= (i)^{4n} = \boxed{1}$$

$$z_9 = \frac{(\cos\theta + i\sin\theta)}{(\cos\theta - i\sin\theta)} = \frac{(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta + i\sin\theta)}{(\cos\theta - i\sin\theta)(\cos\theta + i\sin\theta)}$$
$$= \frac{(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta + i\sin\theta)}{(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2}$$
$$= (\cos\theta)^2 - (\sin\theta)^2 + 2i\cos\theta\sin\theta = \boxed{\cos 2\theta + i\sin 2\theta}$$

* * *

حل التمرين 2.

حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلات التالية :

$$1)\ 3z-2+i=(1+i)z-1-2i \Rightarrow (3-1-i)z=1-3i$$

$$\Rightarrow (2-i)z=1-3i \Rightarrow z=\frac{1-3i}{2-i}=\frac{(1-3i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}$$

$$\Rightarrow z=\frac{2+i-6i-3i^2}{2^2-i^2}=\frac{5-5i}{5}=1-i\ ;\ \boxed{S=\{1-i\}}$$

$$2)\ (3-4i)z^2=iz \Rightarrow (3-4i)z^2-iz=0 \Rightarrow z[(3-4i)z-i]=0$$

$$\Rightarrow z=0 \text{ أو } (3-4i)z-i=0\ ;\ (3-4i)z=i \Rightarrow z=\frac{i}{3-4i}=\frac{i(3+4i)}{25}$$

$$\Rightarrow z=-\frac{4}{25}+\frac{3}{25}i\ ;\boxed{S=\left\{0;-\frac{4}{25}+\frac{3}{25}i\right\}}$$

$$3)\ \frac{z+1}{z-1}=2i \Rightarrow z+1=2i(z-1) \Rightarrow z-2iz=-1-2i$$

$$\Rightarrow z(1-2i)=-1-2i \Rightarrow z=\frac{-1-2i}{1-2i}=\frac{(-1-2i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}$$

$$\Rightarrow z=\frac{-1-2i-2i+4}{5}=\frac{3-4i}{5};\boxed{S=\left\{\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i\right\}}$$

$$4)\frac{\bar{z}-1}{\bar{z}+1}=i \Rightarrow \bar{z}-1=i(\bar{z}+1) \Rightarrow \bar{z}(1-i)=1+i$$

$$\Rightarrow \bar{z}=\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i \Rightarrow z=-i\ ;\boxed{S=\{-i\}}$$

$$5)\ z^2+z.\bar{z}-4-6i=0$$

$$z=x+iy \Rightarrow (x+iy)^2+x^2+y^2-4-6i=0$$

$$\Rightarrow x^2-y^2+2ixy+x^2+y^2-4-6i=0$$

$$\Rightarrow 2x^2+2ixy=4+6i \Rightarrow x^2+ixy=2+3i$$

$$\begin{cases}x^2=2\\ xy=3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=\sqrt{2}\\ y=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\end{cases} \text{ أو } \begin{cases}x=-\sqrt{2}\\ y=-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\end{cases}$$

$$\boxed{S=\left\{\sqrt{2}+\frac{3\sqrt{2}}{2}i\ ;\ -\sqrt{2}-\frac{3\sqrt{2}}{2}i\right\}}$$

$$6)\ (1+i)z-(2-i)\bar{z}+(3+4i)=0$$

$$(1+i)(x+iy)-(2-i)(x-iy)+(3+4i)=0$$

$$x+iy+ix-y-2x+2iy+ix+y+3+4i=0$$

$$(-x+3)+(2x+3y+4)i=0 \Rightarrow \begin{cases} -x+3=0 \\ 2x+3y+4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-\dfrac{10}{3} \end{cases}$$

$$\boxed{S=\left\{3-\frac{10}{3}i\right\}}$$

$$7)\ (2z+1-i)(i\bar{z}+i-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} 2z+1-i=0 \ldots ① \\ \text{أو} \\ i\bar{z}+i-2=0 \ldots ② \end{cases}$$

$$① \Rightarrow z=\frac{-1+i}{2}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$$

$$② \Rightarrow \bar{z}=\frac{2-i}{i}=\frac{i(2-i)}{-1}=-1-2i \Rightarrow z=-1+2i$$

$$\boxed{S=\left\{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\,;-1+2i\right\}}$$

حل التمرين 3.

1. **حل المعادلة : $z^2-2i\bar{z}=0$**

$$\begin{aligned} z^2-2i\bar{z}=0 &\Rightarrow (x+iy)^2-2i(x-iy)=0 \\ &\Rightarrow x^2-y^2+2ixy-2ix-2y=0 \\ &\Rightarrow x^2-y^2-2y+2ix(y-1)=0 \\ &\Rightarrow \begin{cases} x^2-y^2-2y=0 \\ 2x(y-1)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-y^2-2y=0 \\ x=0 \text{ أو } y=1 \end{cases} \end{aligned}$$

- $x=0 \Rightarrow -y^2-2y=0 \Rightarrow -y(y+2)=0 \Rightarrow y=0 \text{ أو } y=-2$

  $\Rightarrow z_1=0\,;z_2=-2i$

- $y=1 \Rightarrow x^2-3=0 \Rightarrow x^2=3 \Rightarrow x=\sqrt{3} \text{ أو } x=-\sqrt{3}$

  $\Rightarrow z_3=\sqrt{3}+i\,;z_4=-\sqrt{3}+i$

$$\boxed{S=\left\{0;-2i;\sqrt{3}+i;-\sqrt{3}+i\right\}}$$

2. **اثبات أنّ المثلث ABC متقايس الأضلاع**

طريقة أولى:

$z_A=-2i\,;\ z_B=\sqrt{3}+i\,;\ z_C=-\sqrt{3}+i\,;$

$$AB=|z_B-z_A|=\left|\sqrt{3}+3i\right|=\sqrt{\sqrt{3}^2+(3)^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$$

$$AC=|z_C-z_A|=\left|-\sqrt{3}+3i\right|=\sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2+(3)^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$$

$$BC = |z_C - z_B| = \left|-2\sqrt{3}\right| = 2\sqrt{3}$$

$AB = AC = BC \Rightarrow$ المثلث (ABC) متقايس الأضلاع

طريقة ثانية:

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{-\sqrt{3} + 3i}{\sqrt{3} + 3i} = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{1 + \sqrt{3}i} = \frac{(-1 + \sqrt{3}i)(1 - \sqrt{3}i)}{(1 + \sqrt{3}i)(1 - \sqrt{3}i)}$$

$$= \frac{-1 + \sqrt{3}i + \sqrt{3}i + 3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = \left|\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1 \Rightarrow \frac{AC}{AB} = 1 \Rightarrow \boxed{AB = AC}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\ ; \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \boxed{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}$$

$\Rightarrow$ المثلث (ABC) متقايس الأضلاع

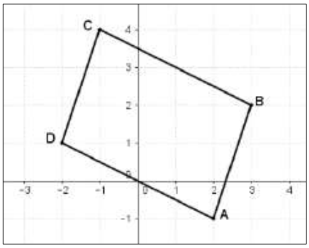
* * *

حل التمرين 4.

$z_A = 2 - i$ ، $z_B = 3 + 2i$ ، $z_C = -1 + 4i$ ، $z_D = -2 + i$.

اثبات أنّ الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع

$$\begin{cases} z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = 1 + 3i \\ z_{\overrightarrow{DC}} = z_C - z_D = 1 + 3i \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow$$ الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع



* * *

حل التمرين 5.

$z_A = 3 - i$ ، $z_B = -2 + 3i$ ، $z_C = -1 - 2i$.

حساب مجموع هذه اللواحق وتفسير النتيجة هندسيا

$$z_A + z_B + z_C = 3 - i - 2 + 3i - 1 - 2i = 0 \Rightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$$

$\Rightarrow$ O مركز ثقل المثلث ABC

* * *

حل التمرين 6.

$z_A = -1 + 2i$ ، $z_B = 1 + 3i$ ، $z_C = 3$.

1. تعيين z_G

$$z_G = \frac{-z_A + 2z_B + z_C}{2} = \frac{1 - 2i + 2 + 6i + 3}{2} \Rightarrow \boxed{z_G = 3 + 2i}$$

2. بيان أنّ المستقيمين (AC) و(BG) متوازيان

$$\begin{cases} z_{\overrightarrow{AC}} = z_C - z_A = 3 + 1 - 2i = 4 - 2i \\ z_{\overrightarrow{BG}} = z_G - z_B = 3 + 2i - 1 - 3i = 2 - i \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{BG} \Rightarrow \boxed{(AC) \parallel (BG)}$$

3. تعيين مجموعة النقط M التي تحقّق : $-MA^2 + 2MB^2 + MC^2 = 6$

$$-MA^2 + 2MB^2 + MC^2 = 6 \Rightarrow -\overrightarrow{MA}^2 + 2\overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2 = 6$$

$$\Rightarrow -\left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}\right)^2 + 2\left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}\right)^2 = 6$$

$$\Rightarrow 2\overrightarrow{MG}^2 - \overrightarrow{GA}^2 + 2\overrightarrow{GB}^2 + \overrightarrow{GC}^2 = 6$$

$$\Rightarrow 2\overrightarrow{MG}^2 = 6 + \overrightarrow{GA}^2 - 2\overrightarrow{GB}^2 - \overrightarrow{GC}^2$$

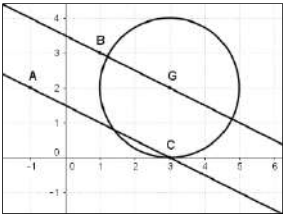
$$\Rightarrow MG^2 = \frac{1}{2}(6 + GA^2 - 2GB^2 - GC^2)$$

$$GA^2 = |z_A - z_G|^2 = |-4|^2 = 16\ ;\ GB^2 = |z_B - z_G|^2 = |-2 + i|^2 = 5$$

$$GC^2 = |z_C - z_G|^2 = |-2i|^2 = 4$$

$$MG^2 = \frac{1}{2}(6 + GA^2 - 2GB^2 - GC^2) = \frac{1}{2}(6 + 16 - 10 - 4) \Rightarrow \boxed{MG^2 = 4}$$

منه نستنتج أنّ مجموعة النقط M هي الدائرة التي مركزها G ونصف قطرها 2.



حل التمرين 7.

تعيين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z في كل حالة من الحالات التالية :

$$L = \frac{z+1}{z-1} = \frac{x + iy + 1}{x + iy - 1} = \frac{(x+1) + iy}{(x-1) + iy} = \frac{[(x+1) + iy][(x-1) - iy]}{[(x-1) + iy][(x-1) - iy]}$$

$$= \frac{x^2 - 1 - iy(x+1) + iy(x-1) + y^2}{(x-1)^2 + y^2} = \frac{(x^2 + y^2 - 1) - 2iy}{(x-1)^2 + y^2}$$

$$= \boxed{\frac{(x^2 + y^2 - 1)}{(x-1)^2 + y^2} - \frac{2y}{(x-1)^2 + y^2}\, i}$$

1. **تعيين مجموعة النقط M حتى يكون L عددا حقيقيا :**

طريقة ① : حسابيا

$$L \text{ حقيقي} \Rightarrow \begin{cases} -2y = 0 \\ (x-1)^2 + y^2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ (x;y) \neq (1;0) \end{cases}$$

منه نستنتج أنّ مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حتى يكون L عددا حقيقيا
هي محور الفواصل باستثناء النقطة $A(1;0)$

طريقة ② : هندسيا

لتكن A وB نقطتان من المستوي لاحقتاهما على الترتيب : $z_A = 1$ و$z_B = -1$

$$L \text{ حقيقي} \Rightarrow \arg\left(\frac{z+1}{z-1}\right) = k\pi \Rightarrow \arg\left(\frac{z-z_B}{z-z_A}\right) = k\pi \Rightarrow \boxed{(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB}) = k\pi}$$

منه نستنتج أنّ مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حتى يكون L عددا حقيقيا
هي المستقيم (AB) (أي محور الفواصل) باستثناء النقطة A.

لاحظ أنّ : $(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB}) = k\pi$ معناه أنّ النقط A ، B ، M في استقامية

2. **تعيين مجموعة النقط M حتى يكون L عددا تخيليا صرفا :**

طريقة ① : حسابيا

$$L \text{ تخيلي صرف} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ (x-1)^2 + y^2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ (x;y) \neq (1;0) \end{cases}$$

منه نستنتج أنّ مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حتى يكون L عددا تخيليا صرفا
هي الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها 1 باستثناء النقطة $A(1;0)$

طريقة ② : هندسيا

$$L \text{ تخيلي صرف} \Rightarrow \arg\left(\frac{z-z_B}{z-z_A}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow (\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BM}) = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\Rightarrow \boxed{\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0}\ (\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BM})$$

منه نستنتج أنّ مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حتى يكون L عددا تخيليا صرفا
هي الدائرة التي قطرها $[AB]$ باستثناء النقطة A

3. **تعيين مجموعة النقط M حتى تكون النقط O ، M وM' في استقامية :**

$$\overrightarrow{OM'}\left(\frac{x^2+y^2-1}{(x-1)^2+y^2}; -\frac{2y}{(x-1)^2+y^2}\right)\ ;\ \overrightarrow{OM}(x;y)$$

$$\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM} \Rightarrow \frac{x^2+y^2-1}{(x-1)^2+y^2}.y + \frac{2y}{(x-1)^2+y^2}.x = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y(x^2+y^2-1+2x) = 0 \\ (x-1)^2 + y^2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \text{ أو } (x+1)^2 + y^2 = 2 \\ (x;y) \neq (1;0) \end{cases}$$

منه نستنتج أنّ مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حتى تكون النقط O ، M و M' في استقامية هي اتحاد محور الفواصل والدائرة التي مركزها $O'(-1;0)$ ونصف قطرها $\sqrt{2}$ باستثناء النقطة $A(1;0)$.

* * *

حل التمرين 8.

1. **كتابة العدد المركّب L على شكله الجبري**

$$L=\frac{z-2+i}{z+2i}=\frac{x+iy-2+i}{x+iy+2i}=\frac{(x-2)+i(y+1)}{x+i(y+2)}$$

$$=\frac{[(x-2)+i(y+1)][x-i(y+2)]}{[x+i(y+2)][x-i(y+2)]}$$

$$=\frac{x^2-ix(y+2)-2x+2i(y+2)+ix(y+1)+(y+1)(y+2)}{x^2+(y+2)^2}$$

$$=\frac{(x^2+y^2-2x+3y+2)+i(-x+2y+4)}{x^2+(y+2)^2}$$

$$=\boxed{\frac{x^2+y^2-2x+3y+2}{x^2+(y+2)^2}+\frac{-x+2y+4}{x^2+(y+2)^2}i}$$

2. **تعيين (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي يكون من أجلها L حقيقيا :**

$$L \text{ حقيقي} \Rightarrow \begin{cases}-x+2y+4=0\\ x^2+(y+2)^2\neq 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-x+2y+4=0 \ldots(\Delta)\\ (x;y)\neq(0;-2)\end{cases}$$

منه نستنتج أنّ المجموعة (E) هي المستقيم (Δ) باستثناء النقطة $A(0;-2)$

3. **تعيين (F) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي يكون من أجلها L تخيليا صرفا :**

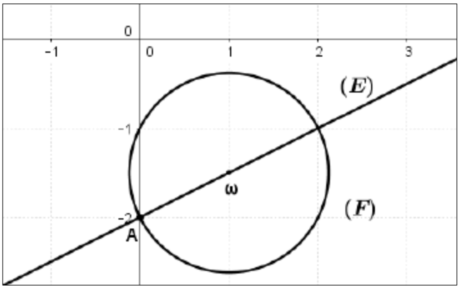
$$L \text{ تخيلي صرف} \Rightarrow \begin{cases}x^2+y^2-2x+3y+2=0\\ x^2+(y+2)^2\neq 0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}(x-1)^2-1+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+2=0\\ (x;y)\neq(0;-2)\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}(x-1)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{5}{4}\ldots(C)\\ (x;y)\neq(0;-2)\end{cases}$$

منه نستنتج أنّ المجموعة F هي الدائرة التي مركزها $\omega\left(1;-\frac{3}{2}\right)$ ونصف قطرها $\frac{\sqrt{5}}{2}$ باستثناء النقطة $A(0;-2)$

4. **انشاء المجموعتين E و F :**



* * *

حل التمرين 9.

$z_B = -2-2i$ ، $z_A = 2+i$

1. **تعيين z_ω**

$$z_\omega = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{2+i-2-2i}{2} = \boxed{-\frac{1}{2}i}$$

2. $z_C = \frac{4-i}{1+i}$

أ. **كتابة z_C على الشكل الجبري**

$$z_C = \frac{4-i}{1+i} = \frac{(4-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{3-5i}{2} = \boxed{\frac{3}{2} - \frac{5}{2}i}$$

ب. **اثبات أنّ النقطة C تنتمي إلى (Γ)**

$$C \in (\Gamma) \Rightarrow \omega C = \omega A \Rightarrow |z_C - z_\omega| = |z_A - z_\omega|$$

$$|z_C - z_\omega| = \left|\frac{3}{2} - \frac{5}{2}i + \frac{1}{2}i\right| = \left|\frac{3}{2} - 2i\right| = \sqrt{\frac{9}{4} + 4} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$$

$$|z_A - z_\omega| = \left|2 + i + \frac{1}{2}i\right| = \left|2 + \frac{3}{2}i\right| = \sqrt{4 + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$$

$$|z_C - z_\omega| = |z_A - z_\omega| \Rightarrow \omega C = \omega A \Rightarrow \boxed{C \in (\Gamma)}$$

* * *

حل التمرين 10.

كتابة الأعداد المركّبة التالية على شكلها المثلثي :

$$1)\ z_1 = 1 + i\ ;\ |z_1| = \sqrt{2}\,;\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2};\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2};\theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

$$\boxed{z_1 = \sqrt{2}\ \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)}$$

2) $z_2 = 3 - 3i\ ;\ |z_2| = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

$$\cos\theta = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\ ; \sin\theta = -\frac{3}{3\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\ ;\ \theta = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

$$\boxed{z_2 = 3\sqrt{2}\ \left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]}$$

3) $z_3 = -\sqrt{3} - i\ ;\ |z_3| = 2; \cos\theta = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}; \sin\theta = -\dfrac{1}{2}; \theta = \dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi$

$$\boxed{z_3 = 2\ \left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)}$$

4) $z_4 = 1 - i\sqrt{3}\ ;\ |z_4| = 2\ ; \cos\theta = \dfrac{1}{2}\ ; \sin\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ ;\ \theta = -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$

$$\boxed{z_4 = 2\ \left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]}$$

5) $z_5 = -\sqrt{6} + i\sqrt{2}\ ;\ |z_5| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$$\cos\theta = \frac{-\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\ ;\ \theta = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

$$\boxed{z_5 = 2\sqrt{2}\ \left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)}$$

6) $z_6 = -\sqrt{5} - i\sqrt{15}\ ;\ |z_6| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$$\cos\theta = \frac{-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = -\frac{1}{2}; \sin\theta = \frac{-\sqrt{15}}{2\sqrt{5}} = \frac{-\sqrt{3}}{2}\ ;\ \theta = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$$

$$\boxed{z_6 = 2\sqrt{5}\ \left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)}$$

7) $z_7 = -2 + 2i\ ;\ |z_7| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$$\cos\theta = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \sin\theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\ ;\ \theta = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$$

$$\boxed{z_7 = 2\sqrt{2}\ \left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)}$$

8) $z_8 = \dfrac{5 + 11i\sqrt{3}}{7 - 4i\sqrt{3}} = \dfrac{\left(5 + 11i\sqrt{3}\right)\left(7 + 4i\sqrt{3}\right)}{\left(7 - 4i\sqrt{3}\right)\left(7 + 4i\sqrt{3}\right)}$

$$= \frac{35 + 20i\sqrt{3} + 77i\sqrt{3} - 132}{97} = -1 + i\sqrt{3}$$

$$|z_8| = \sqrt{4} = 2\ ; \cos\theta = \frac{-1}{2} ; \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}\ ;\ \theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

$$\boxed{z_8 = 2\ \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)}$$

$$9)\ z_9 = \frac{1+i}{\sqrt{3}+i} = \frac{\sqrt{2}\ \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)}{2\ \left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)}$$

$$|z_9| = \frac{\sqrt{2}}{2} ; \arg(z_9) = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi = \frac{\pi}{12} + 2k\pi$$

$$\boxed{z_9 = \frac{\sqrt{2}}{2}\ \left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)}$$

$$10)\ z_{10} = \frac{2}{1+i\sqrt{3}} = \frac{2\ (\cos 2\pi + i\sin 2\pi)}{2\ \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)}$$

$$|z_{10}| = \frac{2}{2} = 1\ ;\ \arg(z_{10}) = \left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$$

$$\boxed{z_{10} = \ \left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)}$$

* * *

حل التمرين 11.

تعيين وانشاء في كل حالة من الحالات التالية المجموعة (Γ) للنقط M ذات اللاحقة z حيث :

1) $|z+1+2i| = |z-4|$

طريقة أولى :

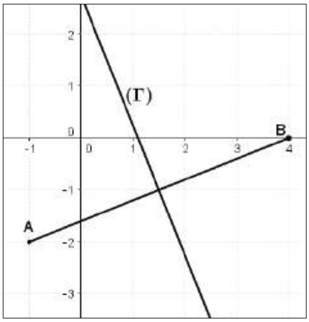
$$|z+1+2i| = |z-4| \Rightarrow |x+iy+1+2i| = |x+iy-4|$$
$$\Rightarrow |x+1+(y+2)i|^2 = |x-4+iy|^2$$
$$\Rightarrow (x+1)^2 + (y+2)^2 = (x-4)^2 + y^2$$
$$\Rightarrow x^2+2x+1+y^2+4y+4 = x^2-8x+16+y^2$$
$$\Rightarrow \boxed{(\Gamma) : 10x+4y-11=0}$$

طريقة ثانية :

لتكن A و B نقطتين من المستوي لاحقتاهما على الترتيب : $z_A = -1-2i$ و $z_B = 4$

$$|z+1+2i| = |z-4| \Rightarrow |z-z_A| = |z-z_B| \Rightarrow \boxed{AM = BM}$$

منه نستنتج أنّ المجموعة (Γ) هي محور القطعة $[AB]$



$|z-3i|=2$ (2

طريقة أولى :

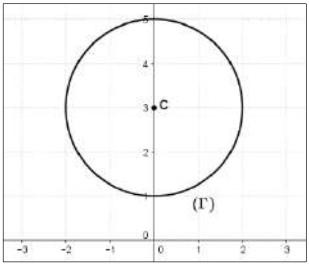
$$|z-3i|=2 \Rightarrow |x+iy-3i|=2 \Rightarrow |x+(y-3)i|^2=4$$
$$\Rightarrow \boxed{x^2+(y-3)^2=4}$$

طريقة ثانية :

لتكن C نقطة من المستوي لاحقتها $z_C=3i$

$$|z-3i|=2 \Rightarrow |z-z_C|=2 \Rightarrow CM=2$$

منه نستنتج أنّ المجموعة (Γ) هي الدائرة التي مركزها $C(0;3)$ ونصف قطرها $r=2$



$|\bar{z}-2+i|=1$ (3

طريقة أولى :

$$|\bar{z}-2+i|=1 \Rightarrow |x-iy-2+i|=1 \Rightarrow |x-2-(y-1)i|^2=1$$
$$\Rightarrow \boxed{(x-2)^2+(y-1)^2=1}$$

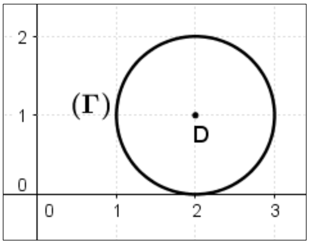
طريقة ثانية :

$$|\bar{z}-2+i|=1 \Rightarrow |\overline{\bar{z}-2+i}|=1 \Rightarrow |z-2-i|=1$$

لتكن D نقطة من المستوي لاحقتها $z_D=2+i$

$$|z-2-i|=1 \Rightarrow |z-z_D|=1 \Rightarrow \boxed{DM=1}$$

منه نستنتج أنّ المجموعة (Γ) هي الدائرة التي مركزها $D(2;1)$ ونصف قطرها $r=1$.



4) $|iz+1-i|=|z-1|$

طريقة أولى :

$$|iz+1-i|=|z-1| \Rightarrow |i(x+iy)+1-i|=|x+iy-1|$$
$$\Rightarrow |1-y+(x-1)i|^2=|x-1+iy|^2$$
$$\Rightarrow (1-y)^2+(x-1)^2=(x-1)^2+y^2 \Rightarrow -2y+1=0 \Rightarrow \boxed{y=\frac{1}{2}}$$

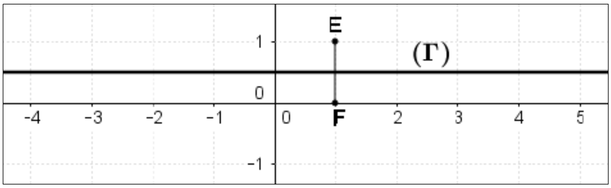
طريقة ثانية :

$$|iz+1-i|=|z-1| \Rightarrow |i(z-i-1)|=|z-1|$$
$$\Rightarrow |i||z-(1+i)|=|z-1| \Rightarrow |z-(1+i)|=|z-1|$$

لتكن E و F نقطتان من المستوي لاحقتاهما $z_E=1+i$ و $z_F=1$

$$|z-(1+i)|=|z-1| \Rightarrow |z-z_E|=|z-z_F| \Rightarrow \boxed{EM=FM}$$

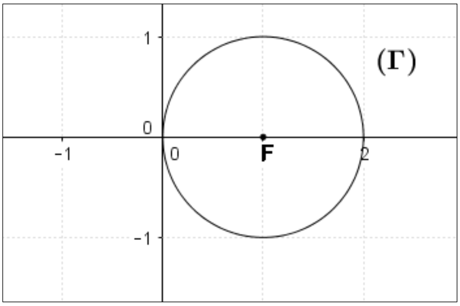
منه نستنتج أنّ المجموعة (Γ) هي محور القطعة $[EF]$



5) $|z|^2=z+\bar{z}$

$$|z|^2=z+\bar{z} \Rightarrow x^2+y^2=2x \Rightarrow x^2-2x+y^2=0$$
$$\Rightarrow \boxed{(x-1)^2+y^2=1}$$

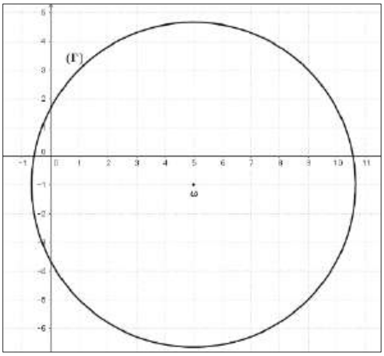
منه نستنتج أنّ المجموعة (Γ) هي الدائرة التي مركزها $F(1;0)$ ونصف قطرها $r=1$.



6) $\boldsymbol{\left|\frac{z+3+i}{z-1+i}\right| = \sqrt{2}}$

$$\left|\frac{z+3+i}{z-1+i}\right| = \sqrt{2} \Rightarrow |x+iy+3+i| = \sqrt{2}|x+iy-1+i|$$
$$\Rightarrow |x+3+(y+1)i|^2 = 2|x-1+(y+1)i|^2$$
$$\Rightarrow (x+3)^2+(y+1)^2 = 2(x-1)^2+2(y+1)^2$$
$$\Rightarrow x^2+6x+9+y^2+2y+1 = 2x^2-4x+2+2y^2+4y+2$$
$$\Rightarrow x^2+y^2-10x+2y-6=0 \Rightarrow \boxed{(x-5)^2+(y+1)^2=32}$$

منه نستنتج أنّ المجموعة (Γ) هي الدائرة التي مركزها $\omega(5;-1)$ ونصف قطرها $4\sqrt{2}$.

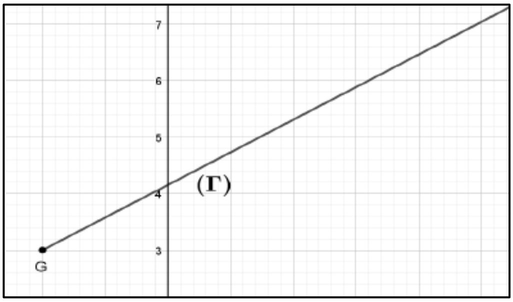


7) $\boldsymbol{\arg(z+2-3i) = \frac{\pi}{6}}$

لتكن G نقطة من المستوي لاحقتها $z_G = -2+3i$

$$\arg(z+2-3i) = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \arg(z-z_G) = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \boxed{(\vec{u};\overrightarrow{GM}) = \frac{\pi}{6}}$$

منه نستنتج أنّ المجموعة (Γ) هي نصف المستقيم الذي مبدؤه النقطة G وميله $\tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.



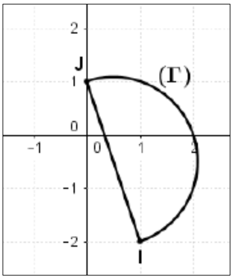
8) $\boldsymbol{\arg\left(\frac{z-1+2i}{z-i}\right) = \frac{\pi}{2}}$

لتكن I و J نقطتان من المستوي لاحقتاهما $z_I = 1-2i$ و $z_J = i$

$$\arg\left(\frac{z-1+2i}{z-i}\right)=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\arg\left(\frac{z-z_i}{z-z_J}\right)=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\boxed{\left(\overrightarrow{JM};\overrightarrow{IM}\right)=\frac{\pi}{2}}$$

منه نستنتج أنّ المجموعة (Γ) هي نصف الدائرة (الأيمن) التي قطرها $[IJ]$.

لاحظ أنّ من أجل M تنتمي إلى نصف الدائرة (الأيسر) ، فإنّ $\left(\overrightarrow{JM};\overrightarrow{IM}\right)=-\frac{\pi}{2}$



$\arg\left(\bar{z}-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ (9

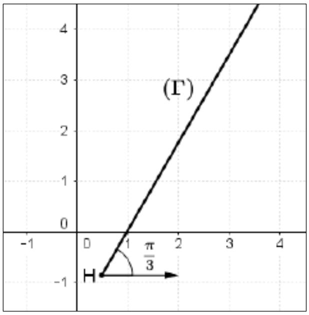
$$\arg\left(\bar{z}-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=-\frac{\pi}{3}+2k\pi\Rightarrow\arg\overline{\left(\bar{z}-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\imath\right)}=\frac{\pi}{3}+2k\pi$$

$$\Rightarrow\arg\left(z-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\frac{\pi}{3}+2k\pi$$

لتكن H نقطة من المستوي لاحقتها $z_H=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

$$\arg(z-z_H)=\frac{\pi}{3}+2k\pi\Rightarrow\left(\vec{u};\overrightarrow{HM}\right)=\frac{\pi}{3}+2k\pi$$

منه نستنتج أنّ المجموعة (Γ) هي نصف المستقيم الذي مبدؤه النقطة H وميله $\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$.



$\arg\left(\frac{z}{\bar{z}}\right)=2k\pi$ (10

$$\arg\left(\frac{Z}{\bar{Z}}\right)=2k\pi\Rightarrow\arg(z)-\arg(\bar{z})=2k\pi\Rightarrow\boxed{\arg(z)=\arg(\bar{z})+2k\pi}$$

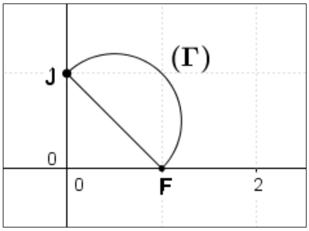
منه نستنتج أنّ المجموعة (Γ) هي محور الفواصل باستثناء المبدأ O.

11) $\boldsymbol{\arg(z-1)-\arg(z-i)=\frac{\pi}{2}+2k\pi}$

$$\arg(z-1)-\arg(z-i)=\frac{\pi}{2}+2k\pi \Rightarrow \arg\left(\frac{z-1}{z-i}\right)=\frac{\pi}{2}+2k\pi$$

$$\Rightarrow \arg\left(\frac{z-z_F}{z-z_J}\right)=\frac{\pi}{2}+2k\pi \Rightarrow \boxed{(\overrightarrow{JM};\overrightarrow{FM})=\frac{\pi}{2}+2k\pi}$$

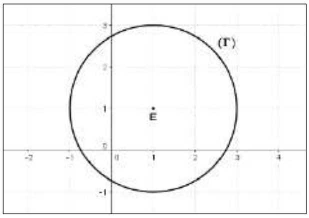
منه نستنتج أنّ المجموعة (Γ) هي نصف الدائرة (الأيمن) التي قطرها $[FJ]$.



12) $\boldsymbol{z=1+i+2e^{i\theta}}$

$$z=1+i+2e^{i\theta} \Rightarrow z-z_E=2e^{i\theta} \Rightarrow |z-z_E|=2 \Rightarrow \boxed{EM=2}$$

منه نستنتج أنّ المجموعة (Γ) هي الدائرة التي مركزها $E(1;1)$ ونصف قطرها $r=2$.



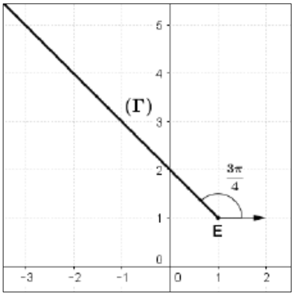
13) $\boldsymbol{z=1+i+ke^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}}$

طريقة أولى :

$$z=1+i+ke^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)} \Rightarrow z-z_E=ke^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)} \Rightarrow \arg(z-z_E)=\frac{3\pi}{4}+2k\pi$$

$$\Rightarrow \boxed{(\vec{u};\overrightarrow{EM})=\frac{3\pi}{4}+2k\pi}$$

منه نستنتج أنّ المجموعة (Γ) هي نصف المستقيم الذي مبدؤه النقطة E وميله $\tan\frac{3\pi}{4}=-1$.

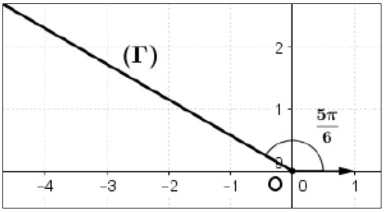


14) $z = k(1+i)e^{i\left(\frac{7\pi}{12}\right)}$

$$z = k(1+i)e^{i\left(\frac{7\pi}{12}\right)} = k\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}e^{i\left(\frac{7\pi}{12}\right)} = k\sqrt{2}e^{i\frac{10\pi}{12}} = k\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

$$\Rightarrow \arg(z) = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow \boxed{\left(\vec{u};\overrightarrow{OM}\right) = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi}$$

منه نستنتج أنّ المجموعة (Γ) هي نصف المستقيم الذي مبدؤه O وميله $\tan\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.



حل التمرين 12.

1. **حساب طويلة العدد المركب Z وعمدة له**

$$Z = \frac{\sqrt{3}+i}{1-i}\ ; \sqrt{3}+i = 2e^{i\frac{\pi}{6}}\ ;\ 1-i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\ ;$$

$$|Z| = \frac{2}{\sqrt{2}} \Rightarrow \boxed{|Z| = \sqrt{2}}\ ;\ \theta = \left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right) + 2k\pi \Rightarrow \boxed{\theta = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi}$$

2. **كتابة Z على الشكل الجبري**

$$Z = \frac{\sqrt{3}+i}{1-i} = \frac{\left(\sqrt{3}+i\right)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{\sqrt{3}-1+i\left(\sqrt{3}+1\right)}{2}$$

$$\boxed{Z = \frac{\sqrt{3}-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}+1}{2}}$$

3. **استنتاج $\cos\frac{5\pi}{12}$ و$\sin\frac{5\pi}{12}$**

$$Z = \underbrace{\sqrt{2}}_{r}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right) = \underbrace{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}_{x} + i\underbrace{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}_{y}$$

$$\begin{cases} \cos\frac{5\pi}{12} = \frac{x}{r} = \frac{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \boxed{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}} \\ sin\frac{5\pi}{12} = \frac{y}{r} = \frac{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \boxed{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} \end{cases}$$

4. بيان أنّ $\left(\frac{Z}{\sqrt{2}}\right)^{12n}$ عدد حقيقي

$$\left(\frac{Z}{\sqrt{2}}\right)^{12n}=\left(\frac{\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}}{\sqrt{2}}\right)^{12n}=\left(e^{i\frac{5\pi}{12}}\right)^{12n}=e^{i12n.\frac{5\pi}{12}}=e^{i5n\pi}$$

$$=\cos 5n\pi+i\underbrace{\sin 5n\pi}_{0}=\boxed{\cos 5n\pi}$$

- $n=2k:\cos 5n\pi=\cos 0=1$
- $n=2k+1:\cos 5n\pi=\cos\pi=-1$

* * *

حل التمرين 13.

بيان مع التعليل صحة أو خطأ الجمل التالية :

1. طويلة العدد المركب $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$ هي 1 : صحيح

$$z=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow |z|=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{2}{4}+\frac{2}{4}}=\boxed{1}$$

2. عمدة للعدد المركب $(1-\sqrt{2})e^{i\frac{\pi}{3}}$ هي $\frac{\pi}{3}$: خطأ

$$z=(1-\sqrt{2})e^{i\frac{\pi}{3}}=(1-\sqrt{2})\left(cos\frac{\pi}{3}+i\,sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=(\sqrt{2}-1)\left(-cos\frac{\pi}{3}-i\,sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=(\sqrt{2}-1)\left[cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)+i\,sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$\Rightarrow\boxed{\arg(z)=\frac{4\pi}{3}}$$

3. عمدة للعدد المركب $2+3i$ معاكسة لعمدة للعدد المركب $2-3i$: صحيح

$$z=2+3i\,;\ \bar{z}=2-3i\,;arg(z)=-arg(\bar{z})$$

$$\Rightarrow\boxed{arg(2+3i)=-arg(2-3i)}$$

4. $5-i$ و $\frac{5-i}{3\pi+4\sqrt{2}-1}$ لهما نفس العمدة : صحيح

$$3\pi+4\sqrt{2}-1>0\Rightarrow\arg\left(3\pi+4\sqrt{2}-1\right)=2k\pi$$

$$\Rightarrow\arg\left(\frac{5-i}{3\pi+4\sqrt{2}-1}\right)=\arg(5-i)-\arg\left(3\pi+4\sqrt{2}-1\right)$$

$$\Rightarrow\boxed{\arg\left(\frac{5-i}{3\pi+4\sqrt{2}-1}\right)=\arg(5-i)+2k\pi\,;k\in\mathbb{Z}}$$

* * *

حل التمرين 14.

تعيين عمدة لكل عدد من الأعداد المركبة التالية :

$$1)\ z=\left(cos\frac{\pi}{7}+i\ sin\frac{\pi}{7}\right)\left(cos\frac{\pi}{4}+i\ sin\frac{\pi}{4}\right)\ ;\arg(z)=\frac{\pi}{7}+\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{\arg(z)=\frac{11\pi}{28}}$$

$$2)\ z=\left(cos\frac{\pi}{7}+i\ sin\frac{\pi}{7}\right)\left(cos\frac{\pi}{4}-i\ sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\left(cos\frac{\pi}{7}+i\ sin\frac{\pi}{7}\right)\left[cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\ sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$\arg(z)=\frac{\pi}{7}-\frac{\pi}{4}\Rightarrow\boxed{\arg(z)=-\frac{3\pi}{28}}$$

$$3)\ z=-2\left(cos\frac{\pi}{7}+i\ sin\frac{\pi}{7}\right)\left(cos\frac{\pi}{4}+i\ sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=2\left(-cos\frac{\pi}{7}-i\ sin\frac{\pi}{7}\right)\left(cos\frac{\pi}{4}+i\ sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=2\left[cos\left(\pi+\frac{\pi}{7}\right)+i\ sin\left(\pi+\frac{\pi}{7}\right)\right]\left(cos\frac{\pi}{4}+i\ sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\arg(z)=\frac{8\pi}{7}+\frac{\pi}{4}\Rightarrow\boxed{\arg(z)=\frac{39\pi}{28}}$$

$$4)\ z=e^{i\frac{\pi}{3}}\times e^{-i\frac{\pi}{2}}\ ;\arg(z)=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}\Rightarrow\boxed{\arg(z)=-\frac{\pi}{6}}$$

$$5)\ z=e^{i\pi}+e^{i\frac{\pi}{3}}=-1+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$|z|=1;\cos\theta=-\frac{1}{2}\ ;\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\boxed{\arg(z)=\frac{2\pi}{3}}$$

* * *

حل التمرين 15.

تعيين الطويلة وعمدة لكل واحد من الأعداد المركبة التالية :

$$1)\ z=4\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)=4\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$\Rightarrow\boxed{|z|=4\ ;\arg(z)=-\frac{\pi}{4}}$$

$$2)\ z=-3\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=3\left(-\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=3\left[cos\ \left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)+i\ sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$= 3\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) \Rightarrow \boxed{|z| = 3\,;\arg(z) = \frac{4\pi}{3}}$$

$$3)\ z = \sqrt{5}\left(\sin\frac{\pi}{6} + i\cos\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{5}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$= \sqrt{5}\left(\cos\ \frac{\pi}{3} + i\ \sin\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow \boxed{|z| = \sqrt{5}\,;\arg(z) = \frac{\pi}{3}}$$

$$4)\ z = \sin\frac{\pi}{6} - i\cos\frac{\pi}{6} = -\sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) + i\cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= -\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) + i\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{7\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{7\pi}{6}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) \Rightarrow \boxed{|z| = 1\,;\arg(z) = \frac{5\pi}{3}}$$

حل التمرين 16.

$$\boldsymbol{z = \left(3 + \sqrt{3}\right) + i\left(-3 + \sqrt{3}\right)\,;\, u = 3 + i\sqrt{3}\,;\, v = \frac{z}{u}}$$

1. كتابة v على الشكل الجبري

$$v = \frac{\left(3 + \sqrt{3}\right) + i\left(-3 + \sqrt{3}\right)}{3 + i\sqrt{3}} = \frac{\left[\left(3 + \sqrt{3}\right) + i\left(-3 + \sqrt{3}\right)\right]\left(3 - i\sqrt{3}\right)}{\left(3 + i\sqrt{3}\right)\left(3 - i\sqrt{3}\right)}$$

$$= \frac{\left(3 + \sqrt{3}\right)\left(3 - i\sqrt{3}\right) + i\left(-3 + \sqrt{3}\right)\left(3 - i\sqrt{3}\right)}{12}$$

$$= \frac{\left(9 + 3\sqrt{3}\right) + i\left(-3 - 3\sqrt{3}\right) + i\left(-9 + 3\sqrt{3} - 3i + i3\sqrt{3}\right)}{12}$$

$$= \frac{\left(9 + 3\sqrt{3}\right) + \left(-3i - 3\sqrt{3}i\right) + \left(-9i + 3\sqrt{3}i + 3 - 3\sqrt{3}\right)}{12}$$

$$= \frac{12 - 12i}{12} = \boxed{1 - i}$$

2. تعيين الطويلة وعمدة لكل من الأعداد المركبة u ، v و z

$$|u| = \sqrt{12} = \boxed{2\sqrt{3}}\,;\cos\theta_1 = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\ ;\ \sin\theta_1 = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\arg u = \frac{\pi}{6} + 2k\pi}$$

$$|v| = \boxed{\sqrt{2}}\,;\cos\theta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\ ;\ \sin\theta_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\arg v = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi}$$

$$z = u.v\ ;\ |z| = |u|.|v| = 2\sqrt{3}.\sqrt{2} = \boxed{2\sqrt{6}}$$

$$\arg z = \arg u + \arg v = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} \Rightarrow \boxed{\arg z = -\frac{\pi}{12} + 2k\pi}$$

3. استنتاج $\cos\frac{\pi}{12}$ و$\sin\frac{\pi}{12}$

$$z = \underbrace{\left(3+\sqrt{3}\right)}_{x} + i\underbrace{\left(-3+\sqrt{3}\right)}_{y} = \underbrace{2\sqrt{6}}_{r}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right]$$

$$\cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) = \frac{x}{r} = \frac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}+\sqrt{18}}{12} = \frac{3\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{12}$$

$$= \boxed{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$$

$$\sin\frac{\pi}{12} = -\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right) = -\frac{y}{r} = -\frac{-3+\sqrt{3}}{2\sqrt{6}} = -\frac{-3\sqrt{6}+\sqrt{18}}{12}$$

$$= -\frac{-3\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{12} = \boxed{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$$

4. اثبات أنّ العدد z^{2010} تخيّلي صرف

$$z^{2010} = \left(2\sqrt{6}e^{-i\frac{\pi}{12}}\right)^{2010} = \left(2\sqrt{6}\right)^{2010}e^{-i2010\frac{\pi}{12}} = \left(2\sqrt{6}\right)^{2010}e^{-i335\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left(2\sqrt{6}\right)^{2010}e^{i\frac{\pi}{2}} = \left(2\sqrt{6}\right)^{2010}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = \boxed{\left(2\sqrt{6}\right)^{2010}i}$$

* * *

حل التمرين 17.

1. كتابة الأعداد المركّبة على الشكل الجبري

$$1)\ z = 6e^{i\frac{3\pi}{4}} = 6\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = 6\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{z = -3\sqrt{2} + 3\sqrt{2}i}$$

$$2)\ z = \sqrt{5}e^{i\frac{3\pi}{2}} = \sqrt{5}\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = \sqrt{5}(-i) \Rightarrow \boxed{z = -\sqrt{5}i}$$

$$3)\ z = \frac{1}{2}e^{i\pi} = \frac{1}{2}(\cos\pi + i\sin\pi) = \frac{1}{2}(-1) \Rightarrow \boxed{z = -\frac{1}{2}}$$

$$4)\ z = 2\sqrt{3}e^{-i\frac{2\pi}{3}} = 2\sqrt{3}\left[\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right]$$

$$= 2\sqrt{3}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow \boxed{z = -\sqrt{3} - 3i}$$

2. كتابة الأعداد المركّبة على الشكل الأسّي

$$1)\ z_1 = 2-2i\,;\,|z_1| = 2\sqrt{2}\,;\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2};\sin\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2};\theta = -\frac{\pi}{4}+2k\pi$$

$$\Rightarrow \boxed{z_1 = 2\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}}$$

$$2)\ z_2 = 3\sqrt{3}-3i\,;\ |z_2| = 6\,;\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2};\sin\theta = -\frac{1}{2};\theta = -\frac{\pi}{6}+2k\pi$$

$$\Rightarrow \boxed{z_2 = 6\,e^{-i\frac{\pi}{6}}}$$

$$3)\ z_3 = \frac{5}{4}i\,;|z_3| = \frac{5}{4};\cos\theta = 0;\sin\theta = 1;\theta = \frac{\pi}{2}+2k\pi \Rightarrow \boxed{z_3 = \frac{5}{4}\ e^{i\frac{\pi}{2}}}$$

$$4)\ z_4 = -1\,;\ |z_4| = 1\,;\cos\theta = -1\,;\ \sin\theta = 0\,;\theta = \pi+2k\pi \Rightarrow \boxed{z_4 = e^{i\pi}}$$

3. إعطاء شكل أسّي للأعداد المركّبة التالية

طريقة أولى :

$$1)\ z_1 = \underbrace{\left(2\sqrt{3}+6i\right)}_{z'}e^{i\frac{\pi}{2}}\,;|z'| = 4\sqrt{3}\,;\cos\theta = \frac{1}{2};\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\theta = \frac{\pi}{3}+2k\pi \Rightarrow z' = 4\sqrt{3}\,e^{i\frac{\pi}{3}} \Rightarrow \boxed{z_1 = 4\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}\times e^{i\frac{\pi}{2}} = 4\sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}}}$$

طريقة ثانية :

$$1)\ z_1 = \left(2\sqrt{3}+6i\right)e^{i\frac{\pi}{2}} = \left(2\sqrt{3}+6i\right)i = -6+2\sqrt{3}i;|z_1| = 4\sqrt{3}$$

$$\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2};\sin\theta = \frac{1}{2};\theta = \frac{5\pi}{6}+2k\pi \Rightarrow \boxed{z_1 = 4\sqrt{3}\,e^{i\frac{5\pi}{6}}}$$

$$2)\ z_2 = \underbrace{\left(\sqrt{3}+i\sqrt{3}\right)}_{z'}e^{i\frac{\pi}{3}}\,;|z'| = \sqrt{6}\,;\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2};\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{4}+2k\pi \Rightarrow z' = \sqrt{6}\,e^{i\frac{\pi}{4}} \Rightarrow \boxed{z_2 = \sqrt{6}\,e^{i\frac{\pi}{4}}\times e^{i\frac{\pi}{3}} = \sqrt{6}e^{i\frac{7\pi}{12}}}$$

$$3)\ z_3 = \left(1-\sqrt{2}\right)e^{i\frac{\pi}{4}} = \left(1-\sqrt{2}\right)\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \left(\sqrt{2}-1\right)\left(-\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \left(\sqrt{2}-1\right)\left[\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{z_3 = \left(\sqrt{2}-1\right)e^{i\frac{5\pi}{4}}}$$

$$4)\ z_4 = 3\left(\cos\frac{\pi}{7}-i\sin\frac{\pi}{7}\right) = 3\left[\cos\left(-\frac{\pi}{7}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right)\right]$$

$$|z_4| = 3\,;\arg(z_4) = -\frac{\pi}{7} + 2k\pi \Rightarrow \boxed{z_4 = 3e^{-i\frac{\pi}{7}}}$$

حل التمرين 18.

$\boldsymbol{z_2 = \sqrt{2} - \sqrt{2}i}$ ، $\boldsymbol{z_1 = -\sqrt{3} + i}$

1. كتابة z_1 وz_2 على الشكل الأسّي

$$z_1 = -\sqrt{3} + i = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \boxed{2e^{i\frac{5\pi}{6}}}$$

$$z_2 = \sqrt{2} - \sqrt{2}i = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \boxed{2e^{-i\frac{\pi}{4}}}$$

2. استنتاج طويلة وعمدة للعدد المركّب L

$$L = \frac{-\sqrt{3} + i}{\sqrt{2} - \sqrt{2}i} = \frac{2e^{i\frac{5\pi}{6}}}{2e^{-i\frac{\pi}{4}}} = e^{i\left(\frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right)} = e^{i\left(\frac{13\pi}{12}\right)}$$

$$\boxed{|L| = 1\,;\arg(L) = \frac{13\pi}{12} + 2k\pi}$$

3. كتابة العدد المركّب L على الشكل الجبري

$$L = \frac{-\sqrt{3} + i}{\sqrt{2} - \sqrt{2}i} = \frac{(-\sqrt{3} + i)(\sqrt{2} + \sqrt{2}i)}{(\sqrt{2} - \sqrt{2}i)(\sqrt{2} + \sqrt{2}i)} = \frac{-\sqrt{6} - \sqrt{6}i + \sqrt{2}i - \sqrt{2}}{4}$$

$$= \boxed{\frac{-\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} + \frac{-\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}i}$$

4. استنتاج قيمتي $\cos\frac{13\pi}{12}$ و $\sin\frac{13\pi}{12}$

$$L = \frac{-\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} + \frac{-\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}i = e^{i\left(\frac{13\pi}{12}\right)}$$

$$\boxed{\cos\frac{13\pi}{12} = \frac{-\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\,;\sin\frac{13\pi}{12} = \frac{-\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}}$$

حل التمرين 19.

$\boldsymbol{d = 2 - 2i\,;\ c = 2i\,;\ b = -1 - i\,;\ a = -1 + i}$

1. حساب طويلة وعمدة لكل من العددين المركّب $\frac{c-a}{d-a}$ و$\frac{c-b}{d-b}$

$$\frac{c - a}{d - a} = \frac{1 + i}{3 - 3i} = \frac{(1 + i)^2}{3(1 - i)(1 + i)} = \frac{2i}{6} = \frac{1}{3}i$$

$$\boxed{\left|\frac{c-a}{d-a}\right| = \frac{1}{3}\ ;\arg\left(\frac{c-a}{d-a}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi}$$

$$\frac{c-b}{d-b} = \frac{1+3i}{3-i} = \frac{(1+3i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} = \frac{10i}{10} = i$$

$$\boxed{\left|\frac{c-b}{d-b}\right| = 1\ ;\arg\left(\frac{c-b}{d-b}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi}$$

2. استنتاج طبيعة المثلثين ACD وBCD

$$\begin{cases} \left|\dfrac{c-a}{d-a}\right| = \dfrac{1}{3} \\ \arg\left(\dfrac{c-a}{d-a}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}\,[2\pi] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{AC}{AD} = \dfrac{1}{3} \\ (\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AC}) = \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\text{المثلث } ACD \text{ قائم في } A}$$

$$\begin{cases} \left|\dfrac{c-b}{d-b}\right| = 1 \\ \arg\left(\dfrac{c-b}{d-b}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}\,[2\pi] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{BC}{BD} = 1 \\ (\overrightarrow{BD};\overrightarrow{BC}) = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

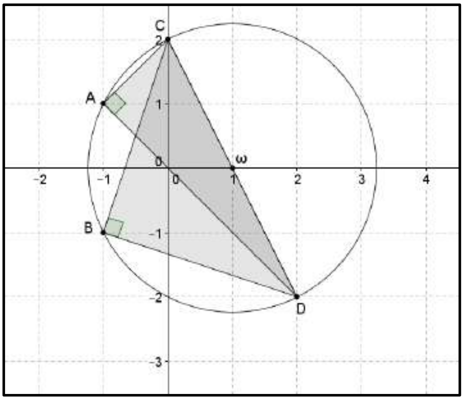
$$\Rightarrow \boxed{\text{المثلث } BCD \text{ قائم في } B \text{ ومتساوي الساقين}}$$

3. بيان أنّ النقط D, C, B, A تنتمي إلى دائرة يُطلب تحديد مركزها ونصف قطرها

بما أنّ المثلثين ACD وBCD قائمين في A و B على الترتيب ، فإنّ النقط D, C, B, A تنتمي إلى الدائرة التي مركزها ω منتصف الوتر $[CD]$ ونصف قطرها $r = \frac{CD}{2}$

$$z_\omega = \frac{c+d}{2} = \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow \boxed{\omega(1;0)}\ ; r = \frac{CD}{2} = \frac{|d-c|}{2} = \frac{|2-4i|}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{r = \sqrt{5}}$$



* * *

حل التمرين 20.

تعيين الجذرين التربيعيين لكل من الأعداد المركّبة التالية :

1) $z = x + iy \Rightarrow z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy \,;\, |z^2| = x^2 + y^2$

$$|8-6i| = \sqrt{8^2+6^2} = 10$$

$$z^2 = 8-6i \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2 = 10 \\ x^2-y^2 = 8 \\ 2xy = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 = 18 \\ xy = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 9 \\ y = -\dfrac{3}{x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases} \text{أو} \begin{cases} x = -3 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} z_1 = 3-i \\ z_2 = -3+i \end{cases}}$$

التحقيق : $(3-i)^2 = (-3+i)^2 = 8-6i$

2) $|-15+8i| = \sqrt{15^2+8^2} = 17$

$$z^2 = -15+8i \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2 = 17 \\ x^2-y^2 = -15 \\ 2xy = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 = 2 \\ xy = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ y = \dfrac{4}{x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases} \text{أو} \begin{cases} x = -1 \\ y = -4 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} z_1 = 1+4i \\ z_2 = -1-4i \end{cases}}$$

التحقيق : $(1+4i)^2 = (-1-4i)^2 = -15+8i$

3) $|-3-4i| = \sqrt{3^2+4^2} = 5$

$$z^2 = -3-4i \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2 = 5 \\ x^2-y^2 = -3 \\ 2xy = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 = 2 \\ xy = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ y = \dfrac{-2}{x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases} \text{أو} \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} z_1 = 1-2i \\ z_2 = -1+2i \end{cases}}$$

التحقيق : $(1-2i)^2 = (-1+2i)^2 = -3-4i$

4) $|2i| = 2$

$$z^2 = 2i \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2 = 2 \\ x^2-y^2 = 0 \\ 2xy = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 = 2 \\ xy = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ y = \dfrac{1}{x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \text{أو} \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} z_1 = 1+i \\ z_2 = -1-i \end{cases}}$$

التحقيق : $(1+i)^2 = (-1-i)^2 = 2i$

5) $z^2 = -4 \Rightarrow z^2 = (2i)^2 \Rightarrow \boxed{\begin{cases} z_1 = 2i \\ z_2 = -2i \end{cases}}$

التحقيق : $(2i)^2 = (-2i)^2 = -4$

$6)\ \left|1+4\sqrt{5}i\right| = \sqrt{1^2+\left(4\sqrt{5}\right)^2} = 9$

$$z^2 = 1+4\sqrt{5}i \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=9 \\ x^2-y^2=1 \\ 2xy=4\sqrt{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2=10 \\ xy=2\sqrt{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2=5 \\ y=\dfrac{2\sqrt{5}}{x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=\sqrt{5} \\ y=2 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} x=-\sqrt{5} \\ y=-2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} z_1=2+\sqrt{5}i \\ z_2=-2-\sqrt{5}i \end{cases}}$$

التحقيق : $\left(\sqrt{5}+2i\right)^2 = \left(-\sqrt{5}-2i\right)^2 = 1+4\sqrt{5}i$

حل التمرين 21.

حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلات التالية :

$1)\ z^2+2z+10=0\ ;\ \Delta=-36=(6i)^2$

$$z_1=\frac{-2-6i}{2}=\boxed{-1-3i}\ ;\ z_2=\frac{-2+6i}{2}=\boxed{-1+3i}$$

$2)\ z^2+4=0 \Rightarrow z^2=-4=(2i)^2\ ;\ \boxed{z_1=-2i\ ;\ z_2=2i}$

$3)\ z^2-8\sqrt{3}z+64=0\ ;\ \Delta=\left(-8\sqrt{3}\right)^2-4(64)=-64=(8i)^2$

$$z_1=\frac{8\sqrt{3}-8i}{2}=\boxed{4\sqrt{3}-4i}\ ;\ z_2=\frac{8\sqrt{3}+8i}{2}=\boxed{4\sqrt{3}+4i}$$

$4)\ z^2-3z+3=0\ ;\ \Delta=-3=\left(\sqrt{3}i\right)^2$

$$z_1=\frac{3-\sqrt{3}i}{2}=\boxed{\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}\ ;\ z_2=\frac{3+\sqrt{3}i}{2}=\boxed{\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

$5)\ (z+2i-1)(z^2-2z+2)=0 \Rightarrow z+2i-1=0$ أو $z^2-2z+2=0$

$$z+2i-1=0 \Rightarrow \boxed{z_0=1-2i}$$

$$z^2-2z+2=0\ ;\ \Delta=-4=(2i)^2$$

$$z_1=\frac{2-2i}{2}=\boxed{1-i}\ ;\ z_2=\frac{2+2i}{2}=\boxed{1+i}$$

$6)\ z^2+4z+5=0\ ;\ \Delta=-4=(2i)^2$

$$z_1=\frac{-4-2i}{2}=\boxed{-2-i}\ ;\ z_2=\frac{-4+2i}{2}=\boxed{-2+i}$$

$7)\ 4z^2-2z+1=0\ ;\ \Delta=-12=\left(2\sqrt{3}i\right)^2$

$$z_1=\frac{2-2\sqrt{3}i}{8}=\boxed{\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}i}\ ;\ z_2=\frac{2+2\sqrt{3}i}{8}=\boxed{\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i}$$

8) $z^2 - z + 1 = 0\ ;\ \Delta = -3 = \left(\sqrt{3}i\right)^2$

$$z_1 = \frac{1-\sqrt{3}i}{2} = \boxed{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}\ ;\ z_2 = \frac{1+\sqrt{3}i}{2} = \boxed{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

9) $z^2 - 2z\cos\alpha + 1 = 0$

$$\Delta = 4\cos^2\alpha - 4 = 4(\cos^2\alpha - 1) = -4\sin^2\alpha = (2i\sin\alpha)^2$$

$$z_1 = \frac{2-2i\sin\alpha}{2} = \boxed{1 - i\sin\alpha}\ ;\ z_2 = \frac{2+2i\sin\alpha}{2} = \boxed{1 + i\sin\alpha}$$

10) $2z^2 + 8z\sin\theta + 5 - 3\cos 2\theta = 0$

$$\Delta = (8\sin\theta)^2 - 8(5 - 3\cos 2\theta) = 64\sin^2\theta + 24\cos 2\theta - 40$$

$$\Delta = 64\sin^2\theta + 24(1 - 2\sin^2\theta) - 40 = 16\sin^2\theta - 16$$

$$= 16(\sin^2\theta - 1) = -16\cos^2\theta = (4i\cos\theta)^2$$

$$z_1 = \frac{-8\sin\theta - 4i\cos\theta}{4} = \boxed{-2\sin\theta - i\cos\theta}$$

$$z_2 = \frac{-8\sin\theta + 4i\cos\theta}{4} = \boxed{-2\sin\theta + i\cos\theta}$$

* * *

<u>حل التمرين 22.</u>

$$\boldsymbol{P(z) = z^3 + 2z^2 - 16}$$

1. تحقق أنّ العدد 2 جذر لـ $P(z)$

$2^3 + 2(2^2) - 16 = 8 + 8 - 16 = 0 \Rightarrow \boxed{P(2) = 0}$

استنتاج تحليل لـ $P(z)$

	1	2	0	-16
2				
	1	4	8	0

$$\boxed{P(z) = (z-2)(z^2 + 4z + 8)}$$

2. حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z) = 0$

$z^3 + 2z^2 - 16 = 0 \Rightarrow (z-2)(z^2 + 4z + 8) = 0$

$\Rightarrow z - 2 = 0$ أو $z^2 + 4z + 8 = 0$

$z - 2 = 0 \Rightarrow z_0 = 2$

$z^2 + 4z + 8 = 0;\ \Delta = -16 = (4i)^2\ ;\ z_1 = -2 - 2i\ ;\ z_2 = -2 + 2i$

$\boxed{S = \{2\ ; -2 - 2i\ ;\ -2 + 2i\}}$

كتابة الحلول على الشكل الأسّي

$$\boxed{z_0 = 2e^{i\,2\pi}}$$

$$z_1 = -2-2i = 2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) \Rightarrow \boxed{z_1 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}}$$

$$z_2 = -2+2i = 2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) \Rightarrow \boxed{z_2 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}}$$

.3 $\boldsymbol{z_D = -2+2i\,;\, z_B = 2\,;\, z_A = -2-2i}$

أ. تعيين z_C لاحقة النقطة C حتى يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع

$ABCD$ متوازي أضلاع $\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow z_B - z_A = z_C - z_D$

$$\Rightarrow z_C = z_B - z_A + z_D = 2+2+2i-2+2i \Rightarrow \boxed{z_C = 2+4i}$$

ب. تعيين z_E و z_F لاحقتي النقطتين E و F

$$z_E - z_B = e^{-i\frac{\pi}{2}}(z_C - z_B)$$

$$\Rightarrow z_E = e^{-i\frac{\pi}{2}}(z_C - z_B) + z_B = (-i)(2+4i-2)+2 \Rightarrow \boxed{z_E = 6}$$

$$z_F - z_D = e^{i\frac{\pi}{2}}(z_C - z_D) \Rightarrow z_F = e^{i\frac{\pi}{2}}(z_C - z_D) + z_D$$

$$\Rightarrow z_F = i(2+4i+2-2i) - 2 + 2i \Rightarrow \boxed{z_F = -4+6i}$$

ج. تحقق أنّ $\boldsymbol{\frac{z_F - z_A}{z_E - z_A} = i}$

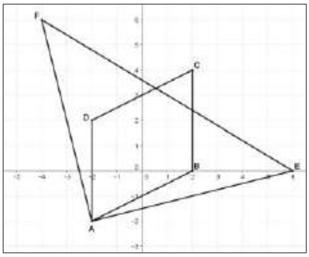
$$\frac{z_F - z_A}{z_E - z_A} = \frac{-4+6i+2+2i}{6+2+2i} = \frac{-2+8i}{8+2i} = \frac{-1+4i}{4+i} = \frac{(-1+4i)(4-i)}{(4+i)(4-i)}$$

$$= \frac{17i}{17} \Rightarrow \boxed{\frac{z_F - z_A}{z_E - z_A} = i}$$

استنتاج طبيعة المثلث AEF

$$\frac{z_F - z_A}{z_E - z_A} = i \Rightarrow \begin{cases} \left|\dfrac{z_F - z_A}{z_E - z_A}\right| = 1 \\ \arg\left(\dfrac{z_F - z_A}{z_E - z_A}\right) = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AF = AE \\ (\overrightarrow{AE};\overrightarrow{AF}) = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{المثلث } AEF \text{ قائم في } A \text{ و متساوي الساقين}}$



* * *

حل التمرين 23.

$$P(z) = z^3 - (4+i)z^2 + (5+4i)z - 5i$$

1. التحقّق أنّ المعادلة $P(z) = 0$ تقبل حلا تخيليا صرفا يُطلب تعيينه

$$z_0 = iy \, ; P(z_0) = 0 \Rightarrow (iy)^3 - (4+i)(iy)^2 + (5+4i)(iy) - 5i = 0$$

$$\Rightarrow -iy^3 + 4y^2 + iy^2 + 5iy - 4y - 5i = 0$$

$$\Rightarrow 4y(y-1) + (-y^3 + y^2 + 5y - 5) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y(y-1) = 0 \\ -y^3 + y^2 + 5y - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 1 \Rightarrow \boxed{z_0 = i}$$

2. تعيين $Q(z)$ حيث : $P(z) = (z - i)Q(z)$

	1	$-4-i$	$5+4i$	$-5i$
i				
	1	-4	5	0

$$\boxed{P(z) = (z-i)(z^2 - 4z + 5)}$$

استنتاج حلول المعادلة $P(z) = 0$

$$z - i = 0 \Rightarrow z_0 = i$$

$$z^2 - 4z + 5 = 0 \, ; \; \Delta = -4 = (2i)^2 \, ; z_1 = 2 + i \, ; z_2 = 2 - i$$

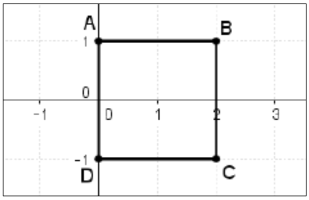
$$\boxed{S = \{i \, ; 2+i \, ; 2-i\}}$$

3. $z_A = i$ ، $z_B = 2 + i$ و $z_C = 2 - i$

تعيين إحداثيات النقطة D حتى يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع

$ABCD$ متوزي أضلاع $\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow z_B - z_A = z_C - z_D$

$$\Rightarrow z_D = z_A - z_B + z_C \Rightarrow \boxed{z_D = -i}$$



* * *

حل التمرين 24.

$$\boldsymbol{\alpha = \sqrt{2-\sqrt{2}} - i\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

1. حساب α^2 و α^4

$$\alpha^2 = \left(\sqrt{2-\sqrt{2}} - i\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^2$$

$$= \left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2 + \left(i\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^2 - 2\sqrt{2-\sqrt{2}} \times \sqrt{2+\sqrt{2}}$$

$$= 2-\sqrt{2}-2-\sqrt{2}-2\sqrt{\left(2-\sqrt{2}\right)\left(2+\sqrt{2}\right)} \Rightarrow \boxed{\alpha^2 = -2\sqrt{2}-2\sqrt{2}i}$$

$$\alpha^4 = \left(-2\sqrt{2}-2\sqrt{2}i\right)^2 = \left(2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i\right)^2$$

$$= \left(2\sqrt{2}\right)^2 + \left(2\sqrt{2}i\right)^2 + 2\left(2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}i\right) = 8-8+16i \Rightarrow \boxed{\alpha^4 = 16i}$$

2. كتابة α^4 على الشكل المثلثي

$$\boxed{\alpha^4 = 16\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)}$$

3. استنتاج طويلة وعمدة للعدد α

$$\alpha = re^{i\theta} \Rightarrow \alpha^4 = r^4e^{i\,4\theta} = 16\,e^{i\frac{\pi}{2}} \Rightarrow \begin{cases} r^4 = 16 \\ 4\theta = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{r = 2} \\ \theta = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{2} \end{cases}$$

بما أنّ $\alpha = \sqrt{2-\sqrt{2}} - i\sqrt{2+\sqrt{2}}$ ، فإنّ $\cos\theta > 0$ و $\sin\theta < 0$ ،

منه $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$

$$\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi \Rightarrow \frac{3\pi}{2} < \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} < 2\pi \Rightarrow \frac{3}{2} < \frac{1}{8} + \frac{k}{2} < 2 \Rightarrow \frac{11}{8} < \frac{k}{2} < \frac{15}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{11}{4} < k < \frac{15}{4} \Rightarrow k = 3$$

$$\theta = \frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \boxed{\theta = \frac{13\pi}{8}}$$

حساب $\cos\frac{13\pi}{8}$ و $\sin\frac{13\pi}{8}$

$$\alpha = \sqrt{2-\sqrt{2}} - i\sqrt{2+\sqrt{2}} = 2e^{i\frac{13\pi}{8}} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} \cos\dfrac{13\pi}{8} = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \\ \sin\dfrac{13\pi}{8} = -\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \end{cases}}$$

4. تعيين مجموعة النقط M حيث : $|\alpha z| = 8$

$$|\alpha z| = 8 \Rightarrow |\alpha|.|z| = 8 \Rightarrow 2|z| = 8 \Rightarrow |z| = 4$$

منه نستنتج أنّ مجموعة النقط هي الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها 4.

* * *

حل التمرين 25.

I- $L = \frac{\bar{z}+2}{z+2}$

1. تعيين الجزء الحقيقي و التخيلي للعدد المركب L

$$L = \frac{\bar{z}+2}{z+2} = \frac{x+2-iy}{x+2+iy} = \frac{(x+2-iy)^2}{(x+2)^2+y^2}$$

$$= \boxed{\frac{(x+2)^2-y^2}{(x+2)^2+y^2} - \frac{2y(x+2)}{(x+2)^2+y^2}\,i}$$

2. تعيين مجموعة النقط M من المستوي بحيث يكون L حقيقيا

L حقيقي $\Rightarrow \begin{cases} 2y(x+2) = 0 \\ (x+2)^2 + y^2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \ \vee x = -2 \\ (x;y) \neq (-2;0) \end{cases}$

$$\Rightarrow \boxed{M \in (\Delta) \cup (\Delta') - \{(-2;0)\}}$$

3. تعيين مجموعة النقط M من المستوي بحيث يكون L تخيليا صرفا

L تخيلي صرف $\Rightarrow \begin{cases} (x+2)^2 - y^2 = 0 \\ (x+2)^2 + y^2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 = (x+2)^2 \\ (x;y) \neq (-2;0) \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = x+2 \vee y = -x-2 \\ (x;y) \neq (-2;0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{M \in (D) \cup (D') - \{(-2;0)\}}$$

II- $z_1 = \cos\frac{7\pi}{12} + i\ \sin\frac{7\pi}{12}$ و $z_2 = -\sqrt{3} + 3i$

1. كتابة Z_1 و Z_2 على الشكل الأسي

$$r_1 = 1\ ; \theta_1 = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi\ ; \boxed{z_1 = e^{i\frac{7\pi}{12}}}$$

$$r_2 = \left|-\sqrt{3}+3i\right| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}\ ; \begin{cases} \cos\theta_2 = \frac{-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = -\frac{1}{2} \\ \sin\theta_2 = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_2$$

$$= \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow \boxed{z_2 = 2\sqrt{3}e^{i\frac{2\pi}{3}}}$$

2. كتابة $Z_2 \times Z_1$ على الشكلين المثلثي والجبري

$$z_1 \times z_2 = e^{i\frac{7\pi}{12}} \times 2\sqrt{3}e^{i\frac{2\pi}{3}} = 2\sqrt{3}e^{i\frac{15\pi}{12}} = 2\sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{4}}$$

$$= \boxed{2\sqrt{3}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)}$$

$$z_1 \times z_2 = 2\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \boxed{-\sqrt{6} - \sqrt{6}i}$$

استنتاج كتابة Z_1 على الشكل الجبري

$$z_1 = \frac{z_1 \times z_2}{z_2} = \frac{-\sqrt{6} - \sqrt{6}i}{-\sqrt{3} + 3i} = \boxed{\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}i}$$

3. حساب $(Z_1)^{36} + (Z_1)^{120}$ ، ثمّ $\left(\frac{Z_2}{2\sqrt{3}}\right)^{20}$

$$(z_1)^{120} + (z_1)^{36} = \left(e^{i\frac{7\pi}{12}}\right)^{120} + \left(e^{i\frac{7\pi}{12}}\right)^{36} = e^{i70\pi} + e^{i21\pi} = e^0 + e^{i\pi}$$

$$= 1 - 1 = \boxed{0}$$

$$\left(\frac{z_2}{2\sqrt{3}}\right)^{20} = \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^{20} = e^{i\frac{40\pi}{3}} = e^{i\frac{4\pi}{3}} = \boxed{-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

* * *

حل التمرين 26.

$$\boldsymbol{P(z) = z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63}$$

1. حساب $P(-\sqrt{3}i)$ ، $P(\sqrt{3}i)$

$$P\left(-\sqrt{3}i\right) = \left(-\sqrt{3}i\right)^4 - 6\left(-\sqrt{3}i\right)^3 + 24\left(-\sqrt{3}i\right)^2 - 18\left(-\sqrt{3}i\right) + 63$$

$$P\left(-\sqrt{3}i\right) = 9 - 18\sqrt{3}i - 72 + 18\sqrt{3}i + 63 = \boxed{0}$$

$$P\left(\sqrt{3}i\right) = \left(\sqrt{3}i\right)^4 - 6\left(\sqrt{3}i\right)^3 + 24\left(\sqrt{3}i\right)^2 - 18\left(\sqrt{3}i\right) + 63$$

$$P\left(-\sqrt{3}i\right) = 9 + 18\sqrt{3}i - 72 - 18\sqrt{3}i + 63 = \boxed{0}$$

تعيين الأعداد الحقيقية a ، b ، c بحيث : $P(z) = (z^2 + 3)(az^2 + bz + c)$

$$\begin{array}{rrrrr|l}
z^4 & -6z^3 & +24z^2 & -18z & +63 & z^2+3 \\ \cline{6-6}
-z^4 & & -3z^2 & & & z^2-6z+21 \\
 & -6z^3 & +21z^2 & -18z & +63 & \\
 & 6z^3 & & +18z & & \\
 & & 21z^2 & & +63 & \\
 & & -21z^2 & & -63 & \\
 & & & & 0 &
\end{array}$$

$$\boxed{P(z) = (z^2 + 3)(z^2 - 6z + 21)}$$

2. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z) = 0$

$P(z) = 0 \Rightarrow z^2 + 3 = 0$ أو $z^2 - 6z + 21 = 0$

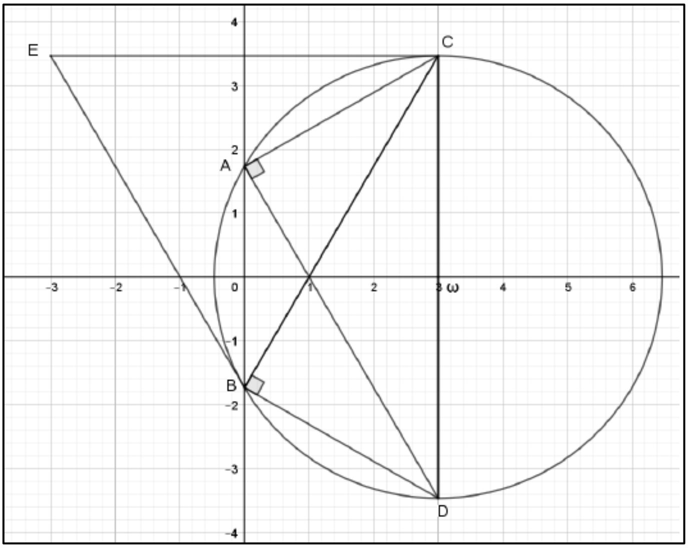
$z^2 + 3 = 0 \Rightarrow z_1 = \sqrt{3}i \,; z_2 = -\sqrt{3}i$

$z^2 - 6z + 21 = 0 \,;\ \Delta' = -12 = \left(2\sqrt{3}i\right)^2 \Rightarrow z_3 = 3 + 2\sqrt{3}i \,; z_4$
$= 3 - 2\sqrt{3}i$

$$\boxed{S = \left\{\sqrt{3}i \,; -\sqrt{3}i \,; 3 + 2\sqrt{3}i \,; 3 - 2\sqrt{3}i\right\}}$$

3. $z_A = \sqrt{3}i \,; z_B = -\sqrt{3}i \,; z_C = 3 + 2\sqrt{3}i \,; z_D = 3 - 2\sqrt{3}i$

أ. تمثيل النقط A ، B ، C ، D :



ب. اثبات أنّ النقط A ، B ، C ، D تنتمي إلى نفس الدائرة

$\frac{z_C - z_A}{z_D - z_A} = \frac{3 + \sqrt{3}i}{3 - 3\sqrt{3}i} = \frac{\sqrt{3}}{3}i = \frac{\sqrt{3}}{3}e^{i\frac{\pi}{2}} \Rightarrow A$ المثلث ACD قائم في A

$\frac{z_C - z_B}{z_D - z_B} = \frac{3 + 3\sqrt{3}i}{3 - \sqrt{3}i} = \sqrt{3}i = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}} \Rightarrow B$ المثلث BCD قائم في B

بما أنّ المثلثين ACD و BCD قائمان ولهما نفس الوتر (CD) ، نستنتج أنّ النقط D, C, B, A تنتمي إلى نفس الدائرة التي قطرها $[CD]$.

4. بيان أنّ : $\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$

$E = S_O(D) \Rightarrow z_E = -z_D \Rightarrow z_E = -3 + 2\sqrt{3}i$

$$\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = \frac{3+3\sqrt{3}i}{-3+3\sqrt{3}i} = \frac{1+\sqrt{3}i}{-1+\sqrt{3}i} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \Rightarrow \boxed{\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = e^{-i\frac{\pi}{3}}}$$

تعيين طبيعة المثلث BEC

$$\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = e^{-i\frac{\pi}{3}} \Rightarrow \begin{cases} \left|\dfrac{z_C - z_B}{z_E - z_B}\right| = 1 \\ \arg\left(\dfrac{z_C - z_B}{z_E - z_B}\right) = -\dfrac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} BE = BC \\ \left(\overrightarrow{BE}; \overrightarrow{BC}\right) = -\dfrac{\pi}{3} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ المثلث BEC متقايس الأضلاع

* * *

حل التمرين 27.

I- $z^3 - (4+i)z^2 + (13+4i)z - 13i = 0 \ldots .(E)$

1. برهان أنّ العدد المركب i حل للمعادلة (E)

$$i^3 - (4+i)i^2 + (13+4i)i - 13i = -i + 4 + i - 4 + 13i - 13i = 0$$

$\Rightarrow$ i حل للمعادلة (E)

2. تعيين الأعداد الحقيقية a ، b ، c بحيث من أجل كل عدد مركب z لدينا :

$$z^3 - (4+i)z^2 + (13+4i)z - 13i = (z-i)(az^2 + bz + c)$$

$$z^3 - (4+i)z^2 + (13+4i)z - 13i = \boxed{(z-i)(z^2 - 4z + 13)}$$

3. استنتاج حلول المعادلة (E)

$$\boxed{S = \{i\,; 2+3i\,; 2-3i\}}$$

II- $z_A = i$ ، $z_B = 2+3i$ و $z_C = 2-3i$

1. تعيين $z_{A,}$ لاحقة A' صورة A بالدوران r

$$z_{A,} - z_B = e^{i\frac{\pi}{4}}(z_A - z_B) \Rightarrow z_{A'} = e^{i\frac{\pi}{4}}(z_A - z_B) + z_B$$

$$z_{A'} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)(-2-2i) + 2 + 3i \Rightarrow \boxed{z_{A'} = 2 + \left(3 - 2\sqrt{2}\right)i}$$

2. برهان أن النقط A' ، B ، C في استقامية

$x_{A'} = x_B = x_C = 2 \Rightarrow$ النقط C, B, A' في استقامية

3. تعيين الكتابة المركبة للتحاكي ذي المركز B و الذي يحوّل C إلى A'

$$\begin{cases} A' = h(C) \\ B = h(B) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_{A'} = az_C + b \\ z_B = az_B + b \end{cases} \Rightarrow z_{A'} - z_B = a(z_C - z_B)$$

$$\Rightarrow a = \frac{z_{A'} - z_B}{z_C - z_B} = \frac{-2\sqrt{2}i}{-6i} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$b = (1-a)z_B = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{3}\right)(2+3i) = \left(\frac{6-2\sqrt{2}}{3}\right) + \left(3-\sqrt{2}\right)i$$

$$h(M) = M' \Rightarrow \boxed{z' = \frac{\sqrt{2}}{3}z + \left(\frac{6-2\sqrt{2}}{3}\right) + \left(3-\sqrt{2}\right)i}$$

* * *

حل التمرين 28.

$z_A = 1+i$ ، $z_B = 2-i$ و$z_C = 3+2i$

1. **انشاء النقط C، B، A** (انظر الشكل في نهاية حل التمرين)
2. **حساب لاحقتي الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$**

$$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = \boxed{1-2i}\ ;\ z_{\overrightarrow{AC}} = z_C - z_A = \boxed{2+i}$$

3. **التفسير الهندسي لطويلة وعمدة العدد المركب : $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$**

$$\left|\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right| = \frac{AC}{AB}\ ; \arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right) = \left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$$

4. **بيان أنّ : $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A} = e^{i\frac{\pi}{2}}$ واستنتاج طبيعة المثلث ABC**

$$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A} = \frac{2+i}{1-2i} = i = e^{i\frac{\pi}{2}} \Rightarrow \begin{cases} \left|\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right| = 1 \\ \arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} AB = AC \\ \left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

نستنتج أنّ المثلث ABC قائم في A ومتساوي الساقين

5. **تعيين لاحقة النقطة I مركز الدائرة (Γ) وحساب نصف قطرها r**

$$z_I = \frac{z_B+z_C}{2} = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}i\ ; r = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}|z_C - z_B| = \frac{1}{2}|1+3i| = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

6. **تعيين لاحقة النقطة D حتى يكون الرباعي ABDC مربعا**

طريقة أولى : ليكون ABDC مربعا ، يكفي أن يتساوى الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و$\overrightarrow{CD}$ (لأنّ المثلث ABC قائم في A ومتساوي الساقين)

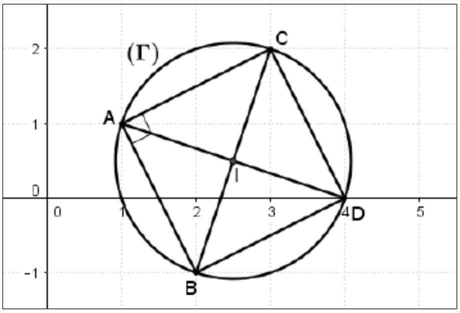
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow z_B - z_A = z_D - z_C \Rightarrow z_D = z_B - z_A + z_C$$

$$= 2 - i - 1 - i + 3 + 2i \Rightarrow \boxed{z_D = 4}$$

طريقة ثانية : ليكون ABDC مربعا ، يكفي أن تكون النقطة I منتصف $[AD]$ (لأنّ المثلث ABC قائم في A ومتساوي الساقين)

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow z_I = \frac{z_A + z_D}{2} \Rightarrow z_D = 2z_I - z_A = 2\left(\frac{5}{2} + \frac{1}{2}i\right) - 1 - i$$

$$\Rightarrow \boxed{z_D = 4}$$



* * *

حل التمرين 29.

I- نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية : $z^2 - 6z + 18 = 0 \ldots.(1)$

1. ايجاد Z_1 و Z_2 حلي المعادلة (1)

$$z^2 - 6z + 18 = 0\ ;\ \Delta' = -9 = (3i)^2\ ;\ \boxed{z_1 = 3 + 3i\ ;\ z_2 = 3 - 3i}$$

2. كتابة الحلين على الشكل الأسي

$$r_1 = |3 + 3i| = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}\ ;\ \begin{cases} \cos\theta_1 = \dfrac{3}{3\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_1 = \dfrac{3}{3\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

$$\Rightarrow \boxed{z_1 = 3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}$$

$$r_2 = |3 - 3i| = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}\ ;\ \begin{cases} \cos\theta_1 = \dfrac{3}{3\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_1 = \dfrac{-3}{3\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_1$$

$$= -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \Rightarrow \boxed{z_2 = 3\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}$$

3. بيان أنّ العدد $(Z_1)^{1430}$ تخيلي صرف

$$(Z_1)^{1430} = \left(3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{1430} = \left(3\sqrt{2}\right)^{1430} e^{i1430\frac{\pi}{4}} = \left(3\sqrt{2}\right)^{1430} e^{i715\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left(3\sqrt{2}\right)^{1430} e^{i\frac{\pi}{2}} = \boxed{\left(3\sqrt{2}\right)^{1430} i}$$

II- $z_A = 3+3i$ ، $z_B = 3-3i$ و $z_C = -3+3i$

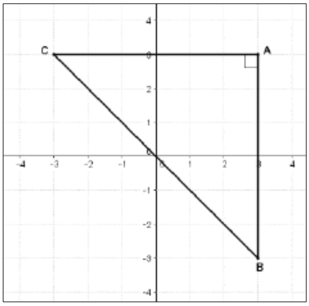
1. بيان أنّ : $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A} = e^{i\frac{\pi}{2}}$

$$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{-6i}{-6} = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

2. استنتاج طبيعة المثلث ABC

$$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = e^{i\frac{\pi}{2}} \Rightarrow \begin{cases} \left|\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right| = 1 \\ \arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AB = AC \\ (\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

منه، المثلث ABC قائم في A ومتساوي الساقين.



* * *

حل التمرين 30.

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية : $z^3 - 4\sqrt{3}z^2 + 16z = 0 \ldots\ldots (1)$

1. حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة (1)

$$z^3 - 4\sqrt{3}z^2 + 16z = 0 \Rightarrow z\left(z^2 - 4\sqrt{3}z + 16\right) = 0 \Rightarrow z = 0 \text{ أو } z^2 - 4\sqrt{3}z + 16 = 0$$

$$z^2 - 4\sqrt{3}z + 16 = 0 \; ; \; \Delta' = -4 = (2i)^2 \; ; \; z_1 = 2\sqrt{3} + 2i \; ; \; z_2 = 2\sqrt{3} - 2i$$

$$\boxed{S = \left\{0 \; ; 2\sqrt{3} + 2i \; ; 2\sqrt{3} - 2i\right\}}$$

2. $z_A = 2\sqrt{3} + 2i$ ، $z_B = 2\sqrt{3} - 2i$ و $z_C = 4\sqrt{3}$

أ. حساب طويلة وعمدة العدد المركب Z :

$$Z = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{2\sqrt{3} - 2i}{-4i} = \frac{4e^{-i\frac{\pi}{6}}}{4e^{-i\frac{\pi}{2}}} = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$\Rightarrow \boxed{|Z| = 1 \; ; \arg(Z) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi}$$

ب. استنتاج طبيعة المثلث ABC

$$\begin{cases} \left|\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = 1 \\ \arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \dfrac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AB = AC \\ (\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$$

نستنتج أنّ المثلث ABC متقايس الأضلاع

3. ايجاد قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها Z^n حقيقيا سالبا

$$Z^n < 0 \Rightarrow e^{i\frac{n\pi}{3}} < 0 \Rightarrow n\frac{\pi}{3} = (2k+1)\pi \Rightarrow \boxed{n = 6k + 3\,; k \in \mathbb{N}}$$

حساب Z^{2010}

$$Z^{2010} = e^{i\frac{2010\pi}{3}} = e^{i670\pi} \Rightarrow \boxed{Z^{2010} = 1}$$

4. تعيين مجموعة النقط G_α عندما يتغير α في $\mathbb{R}$

$$z_{G_\alpha} = 2\alpha z_A + \alpha z_B + (-3\alpha + 1)z_C$$

$$= 2\alpha(2\sqrt{3} + 2i\,) + \alpha(2\sqrt{3} - 2i\,) + 4\sqrt{3}(-3\alpha + 1)$$

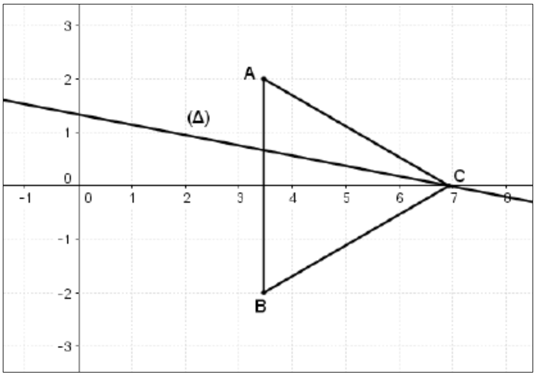
$$z_{G_\alpha} = (-6\sqrt{3}\alpha + 4\sqrt{3}) + 2\alpha i \Rightarrow \begin{cases} x = -6\sqrt{3}\alpha + 4\sqrt{3} \\ y = 2\alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -6\sqrt{3}\alpha + 4\sqrt{3} \\ \alpha = \dfrac{1}{2}y \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = -6\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}y\right) + 4\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{3\sqrt{3}y + x - 4\sqrt{3} = 0 \dots (\Delta)}$$

نستنتج أنّ مجموعة النقط G_α عندما يتغير α في $\mathbb{R}$ هي المستقيم (Δ)



* * *

حل التمرين 31.

$$z_2=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\sqrt{3}+1+\left(\sqrt{3}-1\right)i\right]\ ;\ z_1=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\sqrt{3}-1+\left(\sqrt{3}+1\right)i\right]$$

1. حساب $z_1\times z_2$ و $\frac{z_1}{z_2}$

$$z_1\times z_2=\frac{1}{2}\left[\sqrt{3}-1+\left(\sqrt{3}+1\right)i\right]\left[\sqrt{3}+1+\left(\sqrt{3}-1\right)i\right]$$

$$z_1\times z_2=\frac{1}{2}\left[2-2+\left(\sqrt{3}-1\right)^2 i+\left(\sqrt{3}+1\right)^2 i\right]=\frac{1}{2}(8i)$$

$$\Rightarrow \boxed{z_1\times z_2=4i}$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\left[\sqrt{3}-1+\left(\sqrt{3}+1\right)i\right]}{\left[\sqrt{3}+1+\left(\sqrt{3}-1\right)i\right]}$$

$$=\frac{\left[\sqrt{3}-1+\left(\sqrt{3}+1\right)i\right]\left[\sqrt{3}+1-\left(\sqrt{3}-1\right)i\right]}{\left[\sqrt{3}+1+\left(\sqrt{3}-1\right)i\right]\left[\sqrt{3}+1-\left(\sqrt{3}-1\right)i\right]}$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{4+4\sqrt{3}i}{\left(\sqrt{3}+1\right)^2+\left(\sqrt{3}-1\right)^2}=\frac{4+4\sqrt{3}i}{8}\Rightarrow \boxed{\frac{z_1}{z_2}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

2. حساب $|z_1\times z_2|$ ، $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|$ واستنتاج $|z_1|$ ، $|z_2|$

$$\boxed{|z_1\times z_2|=|4i|=4\ ;\ \left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\left|\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|=1\Rightarrow |z_1|=|z_2|=2}$$

3. حساب $\arg(z_1\times z_2)$ ، $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$ واستنتاج $\arg(z_1)$ ، $\arg(z_2)$

$$\arg(z_1\times z_2)=\arg(4i)=\frac{\pi}{2}+2k\pi\ ;\ \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\arg\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$=\frac{\pi}{3}+2k\pi$$

$$\begin{cases}\arg(z_1)+\arg(z_2)=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\\ \arg(z_1)-\arg(z_2)=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2\arg(z_1)=\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{3}\right)+4k\pi\\ \arg(z_2)=\arg(z_1)-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi\end{cases}$$

$$\Rightarrow\boxed{\begin{cases}\arg(z_1)=\dfrac{5\pi}{12}+2k\pi\\ \arg(z_2)=\dfrac{\pi}{12}+2k\pi\end{cases}}$$

4. أ. كتابة العدد z_2 على شكله المثلثي

$$\boxed{z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)}$$

أ. استنتاج القيمتين المضبوطتين لـ $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$

$$\boxed{\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{3}+1\right)}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\ ;\ \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$$

ب. حساب العدد $\left(\frac{z_2}{2}\right)^{2012}$

$$\left(\frac{z_2}{2}\right)^{2012} = \left(e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^{2012} = \left(e^{i\frac{2012\pi}{12}}\right) = \left(e^{i\frac{2016\pi}{12}-\frac{4\pi}{12}}\right) = e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\left(\frac{z_2}{2}\right)^{2012} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

* * *

حل التمرين 32.

1. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $|z|^2 - z^2 - 2\bar{z} - 6 = 0$

$$z = x + iy\ ;\ |z|^2 - z^2 - 2\bar{z} - 6 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - (x+iy)^2 - 2(x-iy) - 6 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - x^2 + y^2 - 2ixy - 2x + 2iy - 6 = 0$$

$$\Rightarrow 2[y^2 - x - 3 - iy(x-1)] = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y^2 - x - 3 = 0 \\ y(x-1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 0 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{S = \{-3; 1-2i; 1+2i\}}$$

2. $z_1 = -3$; $z_2 = 1 - 2i$

أ. تعيين الشكل الأسي للعدد المركب $(-z_1 - z_2)$

$$-z_1 - z_2 = 2 + 2i\ ;\ |2+2i| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \Rightarrow \boxed{-z_1 - z_2 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}$$

ب. تعيين الأعداد الطبيعية n حيث : $(-z_1 - z_2)^n \in \mathbb{R}$

$$(-z_1 - z_2)^n \in \mathbb{R} \Rightarrow \left(2\sqrt{2}\right)^n e^{i\frac{n\pi}{4}} \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{n\pi}{4} = k\pi \Rightarrow \frac{n}{4} = k$$

$$\Rightarrow \boxed{n = 4k\ ;\ k \in \mathbb{N}}$$

مجموعة الأعداد الطبيعية n التي من أجلها يكون العدد $(-z_1 - z_2)^n$ حقيقيا هي مضاعفات 4

ج. حساب العدد $(-z_1-z_2)^{2010}$

$$(-z_1-z_2)^{2010}=\left(2\sqrt{2}\right)^{2010}e^{i\frac{2010\pi}{4}}=\left(2^{\frac{3}{2}}\right)^{2010}e^{i\frac{1005\pi}{2}}=2^{3015}e^{i\frac{\pi}{2}}$$
$$=\boxed{2^{3015}i}$$

3. A(-3;0) ، B(1;2) ، C(1;-2)

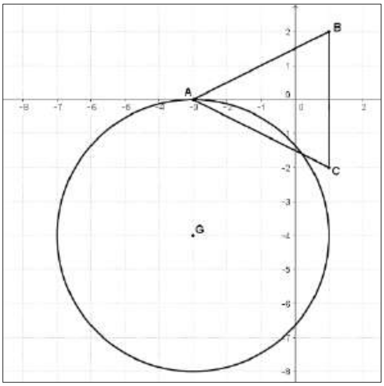
أ. تعيين إحداثيي G مرجح الجملة $\{(A,1);(B,-1);(C,1)\}$

$$z_G=z_A-z_B+z_C=-3-1-2i+1-2i=-3-4i\Rightarrow\boxed{G(-3;-4)}$$

ب. تعيين مجموعة النقط M حيث : $MA^2-MB^2+MC^2=0$

$$MA^2-MB^2+MC^2=0\Rightarrow\overrightarrow{MA}^2-\overrightarrow{MB}^2+\overrightarrow{MC}^2=0$$
$$\Rightarrow\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)^2-\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)^2+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}\right)^2=0$$
$$\Rightarrow\overrightarrow{MG}^2+\overrightarrow{GA}^2-\overrightarrow{GB}^2+\overrightarrow{GC}^2+2\overrightarrow{MG}\underbrace{\left(\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)}_{\vec{0}}=0$$
$$\Rightarrow\overrightarrow{MG}^2=-\overrightarrow{GA}^2+\overrightarrow{GB}^2-\overrightarrow{GC}^2=-4^2+4^2+6^2-4^2-2^2=16$$

مجموعة النقط M حيث $MA^2-MB^2+MC^2=0$ ، هي الدائرة التي مركزها G ونصف قطرها 4.



* * *

حل التمرين 33.

$$P(z)=z^3-3z^2+3z+7$$

1. أ. حساب P(-1)

$$P(-1)=-1-3-3+7=0\Rightarrow P(z)=(z+1)(z^2-4z+7)$$

ب. حل في المجموعة ℂ المعادلة P(z) = 0

$$P(z)=0\Rightarrow(z+1)(z^2-4z+7)=0$$

$\Rightarrow z_0=-1$ أو $z^2-4z+7=0\ ;\ \Delta'=-3=\left(\sqrt{3}i\right)^2$

$z_1=2+i\sqrt{3}\ ;\ z_2=2-i\sqrt{3}\ ;\boxed{S=\left\{-1;2+i\sqrt{3};2-i\sqrt{3}\right\}}$

.2 $z_A = -1$ ، $z_B = 2 + i\sqrt{3}$ ، $z_C = 2 - i\sqrt{3}$ و $z_G = 3$

أ. تمثيل النقط A ، B ، C ، G في المعلم المتعامد و المتجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$

(انظر الشكل في نهاية حل التمرين)

ب. حساب الأطوال AB ، AC ، BC

$$\begin{cases} AB = |z_B - z_A| = \left|3 + i\sqrt{3}\right| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \\ AC = |z_C - z_A| = \left|3 - i\sqrt{3}\right| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \\ BC = |z_C - z_B| = \left|-2\sqrt{3}i\right| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \end{cases}$$

استنتاج طبيعة المثلث ABC

بما أنّ $AB = AC = BC$ ، فإنّ المثلث ABC متقايس الأضلاع

ج. حساب عمدة للعدد المركب $\frac{z_A - z_C}{z_G - z_C}$

$$\frac{z_A - z_C}{z_G - z_C} = \frac{-3 + i\sqrt{3}}{1 + i\sqrt{3}} = \frac{\left(-3 + i\sqrt{3}\right)\left(1 - i\sqrt{3}\right)}{4} = \sqrt{3}i = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\arg\left(\frac{z_A - z_C}{z_G - z_C}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi}$$

استنتاج طبيعة المثلث GAC

$$\arg\left(\frac{z_A - z_C}{z_G - z_C}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow \left(\overrightarrow{CG}; \overrightarrow{CA}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{المثلث } GAC \text{ قائم في } C}$

.3 (E) مجموعة النقط M التي تحقق : $\left(-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\right).\overrightarrow{CG} = 12$

أ. اثبات أنّ G مرجح الجملة $\{(A, -1); (B, 2); (C, 2)\}$

$$\frac{-z_A + 2z_B + 2z_C}{3} = \frac{1 + 4 + 2i\sqrt{3} + 4 - 2i\sqrt{3}}{3} = 3 = z_G$$

منه ، G مرجح الجملة $\{(A, -1); (B, 2); (C, 2)\}$

ب. اثبات أنّ النقطة A تنتمي إلى المجموعة (E)

$$M \in (E) \Rightarrow \left(-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\right).\overrightarrow{CG} = 12 \Rightarrow 3\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{CG} = 12$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MG}.\overrightarrow{CG} = 4$$

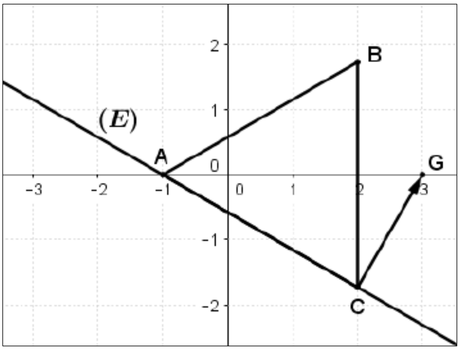
$$\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \ ; \overrightarrow{CG}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} ; \overrightarrow{AG}.\overrightarrow{CG} = 4 \ \Rightarrow \boxed{A \in (E)}$$

ج. تعيين المجموعة (E) وانشائها

$$M \in (E) \Rightarrow \overrightarrow{MG}.\overrightarrow{CG} = 4 \Rightarrow \overrightarrow{MG}.\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AG}.\overrightarrow{CG} \Rightarrow \overrightarrow{MG}.\overrightarrow{CG} - \overrightarrow{AG}.\overrightarrow{CG} = 0$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{CG}\left(\overrightarrow{MG} - \overrightarrow{AG}\right) = 0 \Rightarrow \overrightarrow{CG}\left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}\right) = 0 \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{CG}.\overrightarrow{MA} = 0}$$

المجموعة (E) هي المستقيم الذي يشمل النقطة A ويعامد (CG) ، أي : $\boxed{(E) = (AC)}$



حل التمرين 34.

$\boldsymbol{z_A = 3+2i}$ ، $\boldsymbol{z_B = -3}$ ، $\boldsymbol{z_C = -1-6i}$ ، $\boldsymbol{z_I = 1-2i}$. **نضع** $\boldsymbol{Z = \frac{z_I - z_A}{z_I - z_B}}$

1. **كتابة Z على شكله الجبري**

$$Z = \frac{z_I - z_A}{z_I - z_B} = \frac{-2-4i}{4-2i} = \frac{-1-2i}{2-i} = \frac{(-1-2i)(2+i)}{5} = \boxed{-i}$$

2. **تعيين طويلة و عمدة Z واستنتاج طبيعة المثلث AIB**

$$Z = -i = e^{-i\frac{\pi}{2}} \Rightarrow \boxed{|Z| = 1\, ; arg(Z) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi}$$

$$\begin{cases} \left|\dfrac{z_I - z_A}{z_I - z_B}\right| = 1 \\ \arg\left(\dfrac{z_I - z_A}{z_I - z_B}\right) = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AI = BI \\ \left(\overrightarrow{BI};\overrightarrow{AI}\right) = -\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

منه ، نستنتج أنّ المثلث AIB قائم في I ومتساوي الساقين

3. **تعيين إحداثيات النقطة D مرجح الجملة** $\{(\boldsymbol{A},\boldsymbol{1});(\boldsymbol{B},\boldsymbol{-1});(\boldsymbol{C},\boldsymbol{1})\}$

$$z_D = z_A - z_B + z_C = 3 + 2i + 3 - 1 - 6i \Rightarrow \boxed{z_D = 5 - 4i}$$

4. **استنتاج طبيعة الرباعي ABCD**

$$z_D = z_A - z_B + z_C \Rightarrow z_D - z_C = z_A - z_B \Rightarrow \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$$

$$z_I = \frac{z_A + z_C}{2} = \frac{z_B + z_D}{2}$$

الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع وقطراه متعامدان ومتقايسان (لأنّ المثلث AIB قائم في I ومتساوي الساقين) ، منه نستنتج أنّ الرباعي $ABCD$ مربّع

5. **تعيين و انشاء مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق :**

أ. $\left\|\overrightarrow{\boldsymbol{MA}} - \overrightarrow{\boldsymbol{MB}} + \overrightarrow{\boldsymbol{MC}}\right\| = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}\left\|\overrightarrow{\boldsymbol{MA}} + \overrightarrow{\boldsymbol{MB}}\right\|$

لتكن النقطة j منتصف $[AB]$ ، منه : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MJ}$

$$\left\|\underbrace{\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}}_{\overrightarrow{MD}}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\underbrace{\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}}_{2\overrightarrow{MJ}}\right\| \Rightarrow \|\overrightarrow{MD}\| = \|\overrightarrow{MJ}\|$$

مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق

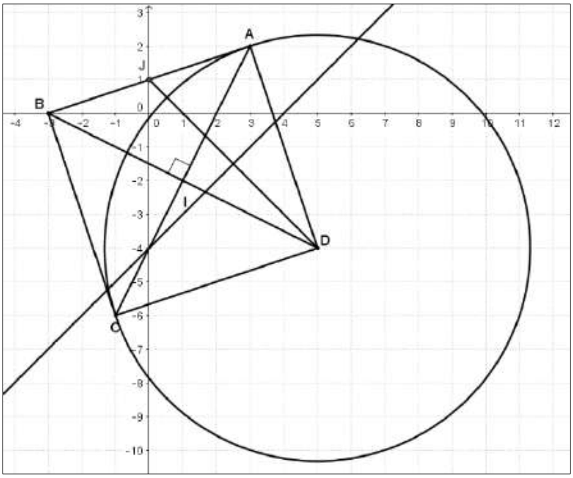
$\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\| = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\|$ هي محور القطعة $[DJ]$

ب. $\boldsymbol{\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\| = 2\sqrt{10}}$

$\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\| = 2\sqrt{10} \Rightarrow \|\overrightarrow{MD}\| = 2\sqrt{10}$

مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق $\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\| = 2\sqrt{10}$

هي الدائرة التي مركزها D ونصف قطرها $r = 2\sqrt{10}$ (تشمل A و C)



* * *

حل التمرين 35.

I- $\boldsymbol{P(z) = z^3 - 8z^2 + 24z - 32}$

1. بيان أن $z_0 = 4$ حل للمعادلة $P(z) = 0$

$4^3 - 8(4)^2 + 24(4) - 32 = 160 - 160 = 0 \Rightarrow$ $z_0 = 4$ حل للمعادلة $P(z) = 0$

2. تعيين العددين الحقيقيين a و b حيث : $P(z) = (z - 4)(z^2 + az + b)$

$P(z) = z^3 - 8z^2 + 24z - 32 = (z-4)(z^2 - 4z + 8)$

3. حل المعادلة : $P(z) = 0$

$P(z) = 0 \Rightarrow (z-4)(z^2 - 4z + 8) = 0\,; z - 4 = 0 \Rightarrow z_0 = 4$

$z^2 - 4z + 8 = 0\ ;\ \Delta' = 4 - 8 = -4 = (2i)^2\ ;\ z_1 = 2 - 2i\ ;\ z_2 = 2 + 2i$

$\boxed{S = \{4; 2 - 2i; 2 + 2i\}}$

II- $z_A = 4 \,; z_B = 2 - 2i \,; z_C = 2 + 2i$ ، $G_\alpha\{(A;\alpha)\,,(B;2)\,,(C;2)\}$ ،

I منتصف القطعة [BC]

1. بيان أن النقط A ، B ، C تنتمي إلى دائرة مركزها I

$$z_I = \frac{z_B + z_C}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$IA = |z_A - z_I| = |2| = 2 \,;\; IB = |z_B - z_I| = |-2i| = 2;$$

$IC = |z_C - z_I| = |2i| = 2 \Rightarrow$ $\boxed{\text{تنتمي إلى دائرة مركزها } I \text{ و نصف قطرها } 2 \;\; C, B, A}$

2. تعيين قيم α حتى تكون Gα مرجح الجملة المثقلة

$$\alpha + 4 = 0 \Rightarrow \alpha = -4 \Rightarrow \boxed{\alpha \in \mathbb{R} - \{-4\}}$$

3. بيان أنّه إذا كانت Gα مرجح الجملة المثقلة ، فإنها تحقق العلاقة $\overrightarrow{IG_\alpha} = \frac{\alpha}{\alpha+4}\overrightarrow{IA}$

$$G_\alpha\{(A;\alpha)\,,(B;2)\,,(C;2)\} \Rightarrow G_\alpha\{(A;\alpha)\,,(I;4)\,\} \Rightarrow \alpha\overrightarrow{G_\alpha A} + 4\overrightarrow{G_\alpha I} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \alpha\overrightarrow{G_\alpha I} + \alpha\overrightarrow{IA} + 4\overrightarrow{G_\alpha I} = \vec{0} \Rightarrow (\alpha+4)\overrightarrow{IG_\alpha} = \alpha\overrightarrow{IA}$$

$$\Rightarrow \boxed{\overrightarrow{IG_\alpha} = \frac{\alpha}{\alpha+4}\overrightarrow{IA}}$$

استنتاج مجموعة النقط Gα لما α يتغير

لتكن الدالة f المعرّفة على $\mathbb{R} - \{-4\}$ بـ : $f(x) = \frac{x}{x+4}$ لدينا : $f'(x) = \frac{3}{(x+4)^2}$

منه نستنتج أنّ الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R} - \{-4\}$

$$\lim_{|x|\to+\infty} f(x) = 1 \,;\; \lim_{x\to-4^-} f(x) = +\infty \;\;;\;\; \lim_{x\to-4^+} f(x) = -\infty$$

x	$-\infty$		-4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
$f(x)$	1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	1

نستنتج من جدول تغيرات الدالة f أنّ : $x \in \mathbb{R} - \{-4\} \Rightarrow f(x) \in \mathbb{R} - \{1\}$

منه $\frac{\alpha}{\alpha+4} \in \mathbb{R} - \{1\}$ ، إذن مجموعة النقط Gα لمّا α يتغير هي المستقيم (IA)

باستثناء النقطة A لأنّ : $\frac{\alpha}{\alpha+4} \neq 1 \Rightarrow \overrightarrow{IG_\alpha} \neq \overrightarrow{IA} \Rightarrow G_\alpha \neq A$

4. تعيين إحداثيي G-1

$$G_{-1}\{(A;-1)\,,(I;4)\,\} \Rightarrow G_{-1}\left(\frac{-x_A + 4x_I}{3};\frac{-y_A + 4y_I}{3}\right) \Rightarrow \boxed{G_{-1}\left(\frac{4}{3};0\right)}$$

5. تعيين المجموعة (E) للنقط M التي تحقق $\left\|-\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\| = 2\sqrt{10}$

$$\left\|-\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\| = 2\sqrt{10} \Rightarrow \left\|3\overrightarrow{MG_{-1}}\right\| = 2\sqrt{10}$$

$$\Rightarrow \boxed{\left\|\overrightarrow{MG_{-1}}\right\| = \frac{2}{3}\sqrt{10}}$$

المجموعة (E) هي الدائرة التي مركزها G_{-1} ونصف قطرها $\frac{2}{3}\sqrt{10}$

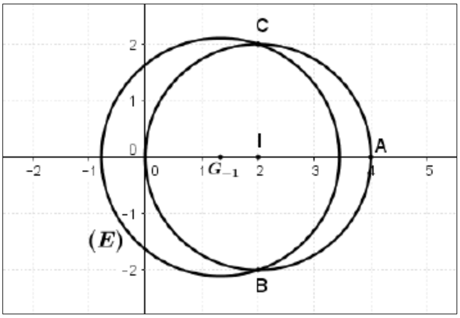
التحقق أن كلا من B و C تنتميان إلى (E)

$$\left\|\overrightarrow{BG_{-1}}\right\| = \left|z_{G_{-1}} - z_B\right| = \left|-\frac{2}{3}+2i\right| = \sqrt{\frac{4}{9}+4} = \sqrt{\frac{4}{9}(1+9)} = \frac{2}{3}\sqrt{10}$$

$$\Rightarrow \boxed{B \in (E)}$$

$$\left\|\overrightarrow{CG_{-1}}\right\| = \left|z_{G_{-1}} - z_C\right| = \left|-\frac{2}{3}-2i\right| = \sqrt{\frac{4}{9}+4} = \sqrt{\frac{4}{9}(1+9)} = \frac{2}{3}\sqrt{10}$$

$$\Rightarrow \boxed{C \in (E)}$$



<u>حل التمرين 36.</u>

ليكن Z العدد المركب حيث: $Z = \frac{-5+3i}{4+i}$

1. تعيين طويلة وعمدة للعدد المركب Z

$$Z = \frac{-5+3i}{4+i} = Z = \frac{(-5+3i)(4-i)}{17} = \frac{-17+17i}{17} = -1+i$$

$$|Z| = \sqrt{2}\,; \cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}\ ; \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow arg(Z) = \theta = \frac{3\pi}{4}$$

2. استنتاج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : Z^{4n} حقيقي

$$arg(Z^{4n}) = arg\left(\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}}\right)^{4n} = 4n\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 3n\pi$$

$$\sin(3n\pi) = 0 \Rightarrow \boxed{Z^{4n} \in \mathbb{R}}$$

.3 $Z_A = -1 + i$ ، $Z_B = 3 + 3i$ ، $Z_C = -5 + 9i$

أ. تعيين العبارة المركبة للتحويل النقطي g الذي مركزه A و يحول B إلى C

$$\begin{cases} g(A) = A \\ g(B) = C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Z_A = aZ_A + b \\ Z_C = aZ_B + b \end{cases} \Rightarrow Z_C - Z_A = a(Z_B - Z_A)$$

$$\Rightarrow a = \frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = \frac{-4 + 8i}{4 + 2i} = 2i$$

$$b = Z_A(1 - a) = (-1 + i)(1 - 2i) = 1 + 3i$$

$$g(M) = M' \Rightarrow \boxed{z' = 2iz + 1 + 3i}$$

استنتاج العناصر المميزة للتحويل g :

$a = 2i = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$ ، نستنتج أنّ التحويل g تشابه مباشر نسبته 2 ، مركزه A وزاويته $\theta' = \frac{\pi}{2}$

ب. استنتاج طبيعة المثلث ABC

$$arg\left(\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow \left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{المثلث } ABC \text{ قائم في } A}$

.4 $2\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CK}$

أ. بيان أن K هي مركز ثقل المثلث ABC ثم تعيين لاحقتها Z_K

$$2\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CK} \Rightarrow 2\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KB} - \overrightarrow{CK} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} = \vec{0}$$

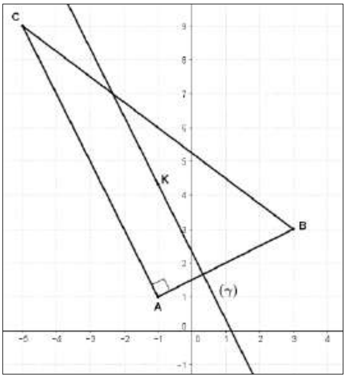
منه نستنتج أنّ النقطة K هي مركز ثقل المثلث ABC

$$K\{(A;1),(B;1),(C;1)\} \Rightarrow Z_K = \frac{Z_A + Z_B + Z_C}{3} = \frac{-3 + 13i}{3} = \boxed{-1 + \frac{13}{3}i}$$

ب. تعيين (γ) مجموعة النقط M بحيث $\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right).\overrightarrow{AB} = 0$

$$\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right).\overrightarrow{AB} = 0 \Rightarrow 3\overrightarrow{MK}.\overrightarrow{AB} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{MK}.\overrightarrow{AB} = 0$$

المجموعة (γ) هي المستقيم الذي يشمل K ويعامد $\overrightarrow{AB}$.



* * *

حل التمرين 37.

1. الإجابة الصحيحة (ج)

$$M \in C(A;3) \Rightarrow AM = 3 \Rightarrow |z - z_A| = 3 \Rightarrow |z - i| = 3$$

2. الإجابة الصحيحة (أ)

$$|z-2| = |z-3+2i| \Rightarrow |z - z_A| = |z - z_B| \Rightarrow AM = BM$$

$\Rightarrow$ (E) هي محور القطعة $[AB]$

3. α) الإجابة الصحيحة (ج)

$$z^2 = \left(\sqrt{2-\sqrt{3}} - i\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2$$

$$= 2-\sqrt{3}-2-\sqrt{3}-2i\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)} = -2\sqrt{3}-2i$$

$$|z^2| = \sqrt{12+4} = 4; \cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \sin\theta = -\frac{1}{2}\ ; \arg(z^2) = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$$

β) الإجابة الصحيحة (ج)

$$z = re^{i\,\alpha} \Rightarrow z^2 = r^2 e^{i\,2\alpha} = 4e^{i\,\frac{7\pi}{6}} \Rightarrow \begin{cases} r^2 = 4 \\ 2\alpha = \dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r = 2 \\ \alpha = \dfrac{7\pi}{12} + k\pi \end{cases}$$

- $k = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{7\pi}{12}$ (مرفوض لأنّ $\sin\frac{7\pi}{12} > 0$ والعدد z جزؤه التخيلي سالب)
- $k = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{7\pi}{12} + \pi = \frac{19\pi}{12} \Rightarrow \boxed{z = 2e^{i\,\frac{19\pi}{12}}}$

4. الإجابة الصحيحة (ب)

$$\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = e^{i\,\frac{\pi}{2}} \Rightarrow \begin{cases} BA = BC \\ \left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}\right) = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$$ $\Rightarrow$ المثلث ABC قائم ومتساوي الساقين

5. الإجابة الصحيحة (أ)

$$\begin{cases} S(A) = B \\ S(B) = C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_B = az_A + b \\ z_C = az_B + b \end{cases} \Rightarrow a = \frac{z_B - z_C}{z_A - z_B} = \frac{-3+i}{-1+2i} = 1+i$$

$$b = z_B - az_A = 1 - 2i(1+i) = 3 - 2i \Rightarrow \boxed{z' = (1+i)z + 3 - 2i}$$

* * *

حل التمرين 38.

$P(z)$ كثير حدود للمتغير المركب z حيث:

$$P(z) = z^3 - 7z^2 + 41z - 87$$

1. حساب $P(3)$ ثم كتابة $P(z)$ من الشكل: $P(z) = (z-3)(az^2 + bz + c)$

$P(3) = 3^3 - 7(3)^2 + 41(3) - 87 = 150 - 150 = 0$

باستعمال خوارزمية هورنر نجد : $P(z) = (z-3)(z^2 - 4z + 29)$

	1	−7	41	−87
3		3	−12	87
	1	−4	29	0

2. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z) = 0$

$P(z) = 0 \Rightarrow (z-3)(z^2 - 4z + 29) = 0 \Rightarrow z - 3 = 0$ أو $z^2 - 4z + 29 = 0$

$\Delta' = 4 - 29 = -25 = (5i)^2\, ; z' = 2 - 5i\, ; z'' = 2 + 5i$

$\boxed{S = \{3; 2-5i; 2+5i\}}$

$z_A = 3$ ، $z_B = 2 + 5i$

3. تعيين W مركز الدوران R و زاويته θ علما أن R يحول النقطة A إلى B و W نقطة من حامل محور التراتيب

$$R(A) = B \Rightarrow WA = WB \Rightarrow |z_A - z_W| = |z_B - z_W|$$
$$\Rightarrow |3 - iy| = |2 + (5-y)i| \Rightarrow \sqrt{9 + y^2} = \sqrt{4 + (5-y)^2}$$
$$\Rightarrow y^2 + 9 = y^2 - 10y + 29 \Rightarrow 10y = 20 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow \boxed{W(0;2)}$$

4. تعيين طبيعة المثلث WAB

$$R(A) = B \Rightarrow z_B - z_W = e^{i\theta}(z_A - z_W)$$
$$\Rightarrow e^{i\theta} = \frac{z_B - z_W}{z_A - z_W} = \frac{2+3i}{3-2i} = i = e^{i\frac{\pi}{2}} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

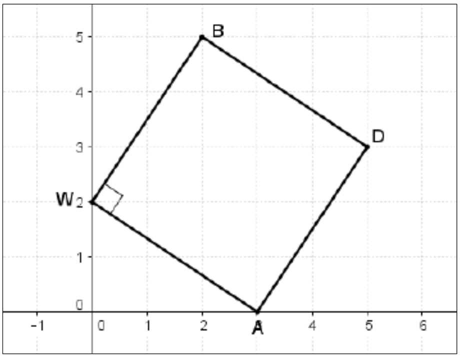
$$\frac{z_B - z_W}{z_A - z_W} = e^{i\frac{\pi}{2}} \Rightarrow \begin{cases} WA = WB \\ (\overrightarrow{WA}\, ; \overrightarrow{WB}) = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$$

نستنتج أنّ المثلث WAB قائم في W ومتساوي الساقين

5. تعيين z_D حتى يكون الرباعي $WADB$ مربع

بما أنّ المثلث WAB قائم في W ومتساوي الساقين ، يكفي أن يكون الرباعي $WADB$ متوازي أضلاع حتى يكون مربعا

$$\overrightarrow{WA} = \overrightarrow{BD} \Rightarrow z_A - z_W = z_D - z_B$$
$$\Rightarrow z_D = z_A - z_W + z_B = 3 - 2i + 2 + 5i = \boxed{5 + 3i}$$



حل التمرين 39.

$z_B = e^{-i\frac{5\pi}{6}}$ ، $z_A = i$

1. ليكن r الدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{2\pi}{3}$. نسمي C صورة B بواسطة التحويل r

أ. **كتابة العبارة المركّبة للتحويل r**

$$r(M) = M' \Rightarrow z' = e^{i\frac{2\pi}{3}}z \Rightarrow \boxed{z' = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z}$$

ب. **بيان أنّ لاحقة C هي $z_C = e^{-i\frac{\pi}{6}}$**

$$r(B) = C \Rightarrow z_C = e^{i\frac{2\pi}{3}}z_B = e^{i\frac{2\pi}{3}}e^{-i\frac{5\pi}{6}} = e^{i\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{5\pi}{6}\right)} \Rightarrow \boxed{z_C = e^{-i\frac{\pi}{6}}}$$

ج. **كتابة z_B و z_C على الشكل الجبري**

$$z_B = e^{-i\frac{5\pi}{6}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\ ;\ z_C = e^{-i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

د. **انشاء النقط A ، B و C (انظر الشكل في نهاية حل التمرين)**

2. لتكن D مرجح النقط A ، B و C المرفقة بالمعاملات 2 ، 1- و 2 على الترتيب

أ. **بيان أنّ لاحقة D هي $z_D = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ ، وانشاء النقطة D (انظر الشكل في نهاية حل التمرين)**

$$D\{(A;2),(B;-1),(C;2)\} \Rightarrow z_D = \frac{2z_A - z_B + 2z_C}{3}$$

$$= \frac{2i + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i + \sqrt{3} - i}{3} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i}{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{z_D = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i}$$

ب. بيان أنّ النقط A ، B ، C و D تنتمي إلى نفس الدائرة

لدينا : $|z_A| = |z_B| = |z_C| = |z_D| = 1$

نستنتج أنّ النقط A ، B ، C و D تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها 1

3. ليكن h التحاكي الذي مركزه A ونسبته 2. نسمي E صورة D بواسطة التحويل h

أ. كتابة العبارة المركّبة للتحويل h

$$h(M) = M' \Rightarrow z' - z_A = 2(z - z_A) \Rightarrow z' = 2z - z_A \Rightarrow \boxed{z' = 2z - i}$$

ب. بيان أنّ لاحقة E هي $z_E = \sqrt{3}$ ، وانشاء النقطة E

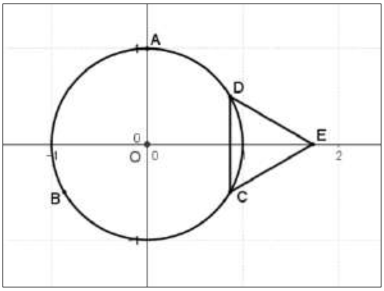
$$h(D) = E \Rightarrow z_E = 2z_D - i = \sqrt{3} + i - i \Rightarrow \boxed{z_E = \sqrt{3}}$$

ج. حساب النسبة $\frac{z_D - z_C}{z_E - z_C}$ وكتابة النتيجة على الشكل الأسّي

$$\frac{z_D - z_C}{z_E - z_C} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i}{\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i} = \frac{i}{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i} = \boxed{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{i\frac{\pi}{3}}}$$

د. استنتاج طبيعة المثلث CDE

$$\frac{z_D - z_C}{z_E - z_C} = e^{i\frac{\pi}{3}} \Rightarrow \begin{cases} CD = CE \\ (\overrightarrow{CE}, \overrightarrow{CD}) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \boxed{\text{المثلث } CDE \text{ متقايس الأضلاع}}$$



* * *

حل التمرين 40.

1. حل المعادلة: $z^2 - 4\sqrt{3}z + 16 = 0$

$$\Delta' = -4 = (2i)^2\ ;\ \boxed{z_1 = 2\sqrt{3} - 2i\ ;\ z_2 = 2\sqrt{3} + 2i}$$

2. $a = 2\sqrt{3} - 2i$ ، $b = 2\sqrt{3} + 2i$

أ. كتابة a و b على الشكل الأسّي

$$|a| = 4\ ; \cos\theta_a = \frac{\sqrt{3}}{2}\ ; \sin\theta_a = -\frac{1}{2}\ ;\ \theta_a = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow \boxed{a = 4e^{-i\frac{\pi}{6}}}$$

$$|b| = 4 \,; \cos\theta_b = \frac{\sqrt{3}}{2} \,; \sin\theta_b = \frac{1}{2} \,; \; \theta_b = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow \boxed{b = 4e^{i\frac{\pi}{6}}}$$

ب. تمثيل النقطتين A وB (انظر الشكل)

ج. بيان أنّ المثلث OAB متقايس الأضلاع

$$\frac{b}{a} = \frac{4e^{i\frac{\pi}{6}}}{4e^{-i\frac{\pi}{6}}} = e^{i\frac{\pi}{3}} \Rightarrow \begin{cases} OA = OB \\ \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \boxed{\text{المثلث } OAB \text{ متقايس الأضلاع}}$$

3. لتكن C نقطة لاحقتها $c = -8i$ و D صورتها بالدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{2\pi}{3}$

أ. تمثيل النقطتين C وD (انظر الشكل)

ب. بيان أنّ لاحقة النقطة D هي $d = 4\sqrt{3} + 4i$

$$R(C) = D \Rightarrow d = e^{i\frac{2\pi}{3}}.c = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(-8i) \Rightarrow \boxed{d = 4\sqrt{3} + 4i}$$

4. بيان أنّ D هي صورة النقطة B بالتحاكي الذي مركزه O ويُطلب تحديد نسبته

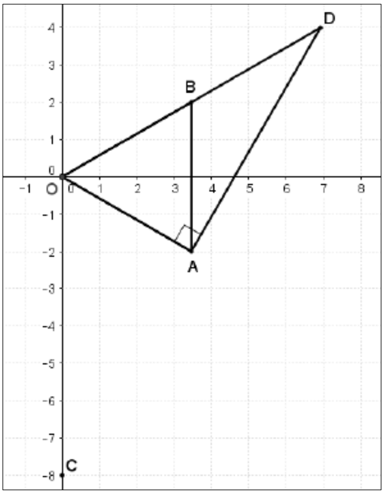
$$D = h(B) \Rightarrow d = kb \Rightarrow k = \frac{d}{b} = \frac{4\sqrt{3} + 4i}{2\sqrt{3} + 2i} = \frac{2\left(2\sqrt{3} + 2i\right)}{2\sqrt{3} + 2i} = 2$$

منه نستنتج أنّ D هي صورة النقطة B بالتحاكي الذي مركزه O ونسبته 2

5. بيان أنّ OAD مثلث قائم

$$\begin{cases} OA = |a| = 4 \Rightarrow OA^2 = 16 \\ OD = |d| = 8 \Rightarrow OD^2 = 64 \\ AD = |d - a| = \left|2\sqrt{3} + 6i\right| = \sqrt{48} \Rightarrow AD^2 = 48 \end{cases}$$

$$OD^2 = OA^2 + AD^2 \Rightarrow \boxed{\text{المثلث } OAD \text{ قائم في } A}$$



* * *

حل التمرين 41.

$\boldsymbol{a = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i}$ ، $\boldsymbol{b = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i}$

1. كتابة العددين $\boldsymbol{a}$ و $\boldsymbol{b}$ على الشكل الأسّي

$$a = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \,;\ |a| = 1 \,; \arg(a) = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \boxed{a = e^{i\frac{\pi}{3}}}$$

$$b = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i \,;\ |b| = 1 \,; \arg(b) = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \boxed{b = e^{i\frac{\pi}{6}}}$$

التحقق أنّ : $\boldsymbol{b^2 = a}$

$$b^2 = \left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^2 = e^{i\frac{2\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{3}} = a$$

2. $\boldsymbol{c = a + b}$

أ. تعليم النقط $\boldsymbol{C, B, A}$ (انظر الشكل في نهاية حل التمرين)

ب. التحقق أنّ $\boldsymbol{c = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}}}$

$$c = a + b = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i = \frac{\sqrt{3}+1}{2} + \frac{\sqrt{3}+1}{2} i$$

$$|c| = \sqrt{2\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^2} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\theta = \sin\theta = \frac{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}{\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \arg(c) = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{c = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}}}$$

3. $\boldsymbol{z^2 + z - c = 0 \dots (E)}$

أ. التحقق أنّ $\boldsymbol{b}$ حل للمعادلة $\boldsymbol{(E)}$

$$b^2 + b - c = a + b - (a + b) = 0 \Rightarrow \boxed{b \text{ حل للمعادلة } (E)}$$

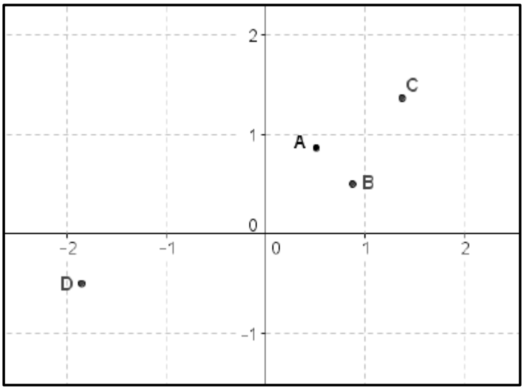
ب. بيان أنّ : $\boldsymbol{d = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2} e^{i\frac{13\pi}{12}}}$

$$b \times d = -c \Rightarrow d = -\frac{c}{b} = -\frac{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}}}{e^{i\frac{\pi}{6}}} = -\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2} e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)}$$

$$d = -\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2} e^{i\frac{\pi}{12}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\left(-\cos\frac{\pi}{12} - i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

$$d=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\left(\cos\frac{13\pi}{12}+i\sin\frac{13\pi}{12}\right)=\boxed{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}e^{i\frac{13\pi}{12}}}$$

ج. انشاء النقطة D التي لاحقتها d



حل التمرين 42.

$z_A=\sqrt{2}$ ، $z_C=i$ ، $z_B=\sqrt{2}+i$ ، $z_I=\frac{z_A}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ، $z_J=\frac{z_B+z_C}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}+i$

1. S التشابه المباشر عبارته المركّبة $z'=-\frac{\sqrt{2}}{2}(iz-1)+i$

أ. تعيين زاوية ونسبة التشابه المباشر S

$$z'=-\frac{\sqrt{2}}{2}iz+\frac{\sqrt{2}}{2}+i$$

$$\Rightarrow\boxed{k=\left|-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right|=\frac{\sqrt{2}}{2};\theta=\arg\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=-\frac{\pi}{2}+2k\pi}$$

ب. تعيين صورة المستطيل $OABC$ بالتشابه S

$$O'=S(O)\Rightarrow z_{O'}=-\frac{\sqrt{2}}{2}iz_O+\frac{\sqrt{2}}{2}+i=\frac{\sqrt{2}}{2}+i=\boxed{z_J}$$

$$A'=S(A)\Rightarrow z_{A'}=-\frac{\sqrt{2}}{2}iz_A+\frac{\sqrt{2}}{2}+i=-\frac{\sqrt{2}}{2}i\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}+i=\frac{\sqrt{2}}{2}=\boxed{z_I}$$

$$B'=S(B)\Rightarrow z_{B'}=-\frac{\sqrt{2}}{2}iz_B+\frac{\sqrt{2}}{2}+i=-\frac{\sqrt{2}}{2}i\left(\sqrt{2}+i\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}+i$$
$$=\sqrt{2}=\boxed{z_A}$$

$$C'=S(C)\Rightarrow z_{C'}=-\frac{\sqrt{2}}{2}iz_C+\frac{\sqrt{2}}{2}+i=\sqrt{2}+i=\boxed{z_B}$$

نستنتج أنّ صورة المستطيل $OABC$ بالتشابه S هو المستطيل $JIAB$

2. نسمّي Ω مركز التشابه S

أ. بيان أنّ الدوائر التي أقطارها $[OJ]$ ، $[BC]$ ، $[AB]$ ، $[AI]$ تلتقي في Ω

لدينا :

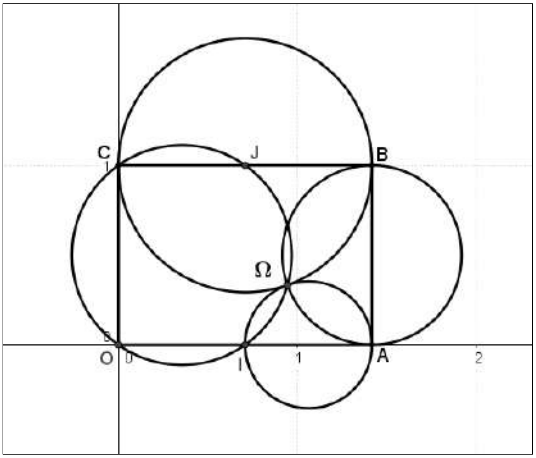
$S(O)=J$ ، منه $\left(\overrightarrow{\Omega O};\overrightarrow{\Omega J}\right)=-\frac{\pi}{2}$ ، منه النقطة Ω تنتمي إلى الدائرة التي قطرها $[OJ]$ وتر المثلث القائم ΩOJ

$S(C)=B$ ، منه $\left(\overrightarrow{\Omega C};\overrightarrow{\Omega B}\right)=-\frac{\pi}{2}$ ، منه النقطة Ω تنتمي إلى الدائرة التي قطرها $[BC]$ وتر المثلث القائم ΩBC

$S(B)=A$ ، منه $\left(\overrightarrow{\Omega B};\overrightarrow{\Omega A}\right)=-\frac{\pi}{2}$ ، منه النقطة Ω تنتمي إلى الدائرة التي قطرها $[AB]$ وتر المثلث القائم ΩAB

$S(A)=I$ ، منه $\left(\overrightarrow{\Omega A};\overrightarrow{\Omega I}\right)=-\frac{\pi}{2}$ ، منه النقطة Ω تنتمي إلى الدائرة التي قطرها $[AI]$ وتر المثلث القائم ΩAI

منه نستنتج أنّ الدوائر التي أقطارها $[OJ]$ ، $[BC]$ ، $[AB]$ ، $[AI]$ تلتقي في Ω



ب. تحديد العناصر المميزة للتحويل $h=SoS$

التحويل h تشابه مباشر مركزه Ω ، نسبته $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$ وزاويته $-\pi$ ،

ومنه نستنتج أنّ التحويل h تحاكي مركزه Ω ونسبته $-\frac{1}{2}$

ج. استنتاج أنّ النقط Ω, B, I في استقامية ، وكذلك النقط Ω, A, C في استقامية

$$\begin{cases}S(B)=A\\S(A)=I\end{cases}\Rightarrow SoS(B)=I\Rightarrow \Omega I=-\frac{1}{2}\Omega B\Rightarrow \boxed{I,B,\Omega\ \text{في استقامية}}$$

$$\begin{cases}S(C)=B\\S(B)=A\end{cases}\Rightarrow SoS(C)=A\Rightarrow \Omega A=-\frac{1}{2}\Omega C\Rightarrow \boxed{C,A,\Omega\ \text{في استقامية}}$$

* * *

حل التمرين 43.

$$\boldsymbol{P(z) = z^3 + z^2 - 4z - 24}$$

1. حساب $P(3)$:

$$P(3) = 3^3 + 3^2 - 4(3) - 24 = 36 - 36 = 0$$
$$P(z) = (z-3)(z^2+4z+8)$$

حل المعادلة $P(z) = 0$

$$P(z) = 0 \Rightarrow (z-3)(z^2+4z+8) = 0 \Rightarrow z - 3 = 0 \Rightarrow \boxed{z_0 = 3}$$
$$z^2 + 4z + 8 = 0\ ;\ \Delta' = -4 = (2i)^2\ ;\ \boxed{z_1 = -2+2i\ ;\ z_2 = -2-2i}$$

2. $z_A = 3$ ، $z_B = -2+2i$ ، $z_C = -2-2i$ ، $z_D = -1-10i$

أ. حساب الأطوال BC, AC, AB ، واستنتاج طبيعة المثلث ABC

$$\begin{cases} AB = |z_B - z_A| = |-5+2i| = \sqrt{29} \\ AC = |z_C - z_A| = |-5-2i| = \sqrt{29} \\ BC = |z_C - z_B| = |-4i| = 4 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\text{المثلث } ABC \text{ متساوي الساقين}}$$

ب. تعيين مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z التي تحقق : $|z+2+2i| = |z+2-2i|$

$$|z+2+2i| = |z+2-2i| \Rightarrow |z - z_C| = |z - z_B| \Rightarrow CM = BM$$

نستنتج أنّ مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z التي تحقق : $|z+2+2i| = |z+2-2i|$ هي محور القطعة $[BC]$ أي محور الفواصل (لأنّ النقطتين B و C متناظرتان بالنسبة لمحور الفواصل)

ج. كتابة العبارة المركّبة للتشابه S الذي مركزه A ويحوّل B إلى D

$$\begin{cases} S(B) = D \Rightarrow z_D = az_B + b \\ S(A) = A \Rightarrow z_A = az_A + b \end{cases} \Rightarrow a = \frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} = \frac{-4-10i}{-5+2i} = 2i$$
$$z_A = az_A + b \Rightarrow b = z_A(1-a) \Rightarrow b = 3(1-2i) = 3 - 6i$$
$$S(M) = M' \Rightarrow \boxed{z' = 2iz + 3 - 6i}$$

تعيين نسبة وزاوية التشابه S

$$k = |2i| = 2\ ;\ \theta = \arg(2i) = \frac{\pi}{2}$$

* * *

حل التمرين 44.

1. إذا كان $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ فإنّ المثلث ABC متقايس الأضلاع (الإجابة أ)

$$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}} \Rightarrow \begin{cases} AB = AC \\ (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \boxed{\text{المثلث } ABC \text{ متقايس الأضلاع}}$$

2. إذا كان $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=e^{i\frac{\pi}{2}}$ فإنّ المثلث ABC قائم في A ومتساوي الساقين (الإجابة ب)

$$\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=e^{i\frac{\pi}{2}}\Rightarrow\begin{cases}AB=AC\\ \left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right)=\frac{\pi}{2}+2k\pi\end{cases}$$

المثلث ABC قائم في A و متساوي الساقين $\Leftarrow$

3. إذا كان الرباعي $OACB$ متوازي أضلاع وكان $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_O}=e^{i\frac{\pi}{2}}$ فإنّ الرباعي $OACB$ مربّع (الإجابة ج)

$\frac{z_B-z_A}{z_C-z_O}=e^{i\frac{\pi}{2}}$ يعني أنّ القطرين $[OC]$ و $[AB]$ متقايسان ومتعامدان ، منه الرباعي $OACB$ مربّع

4. إذا كان $\frac{z_B-z_O}{z_A-z_O}=10e^{i\,2010\pi}$ فإنّ النقط A ، B ، O في استقامية (الإجابة ج)

$$\frac{z_B-z_O}{z_A-z_O}=10e^{i\,2010\pi}\Rightarrow\frac{z_B-z_O}{z_A-z_O}=10\Rightarrow\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)=2k\pi$$

النقط O,B,A في استقامية $\Leftarrow$

5. إذا كان $z_A-z_C=e^{i\frac{\pi}{3}}(z_B-z_C)$ فإنّ A صورة B بالدوران الذي مركزه C وزاويته $\frac{\pi}{3}$ (الإجابة ب)

$$\left|e^{i\frac{\pi}{3}}\right|=1\,;\arg\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)=\frac{\pi}{3}+2k\pi\,;\ z_A-z_C=e^{i\frac{\pi}{3}}(z_B-z_C)$$
$$\Rightarrow A=R_{\left(C;\frac{\pi}{3}\right)}(B)$$

* * *

حل التمرين 45.

$z_A=-i$ ، $z_B=2+3i$ ، $z_C=-4+i$

1. أ. **كتابة العدد المركب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ على الشكل الجبري**

$$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{-4+i+i}{2+3i+i}=\frac{-4+2i}{2+4i}=\frac{-2+i}{1+2i}=\frac{(-2+i)(1-2i)}{5}=i$$

ب. **تعيين طويلة العدد المركب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ وعمدة له واستنتاج طبيعة المثلث ABC**

$$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=i\Rightarrow\begin{cases}\left|\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right|=1\\ \arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=\frac{\pi}{2}+2k\pi\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}AC=AB\\ \left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{2}+2k\pi\end{cases}$$

ومنه نستنتج أنّ المثلث ABC قائم في A ومتساوي الساقين

2. $\boldsymbol{T(M)=M' \Rightarrow z'=iz-1-i}$

أ. تعيين طبيعة التحويل T محددا عناصره المميزة

$$T(M)=M' \Rightarrow z'=az+b\,;a=i\,;b=-1-i$$

$$\begin{cases}|i|=1\\ \arg(i)=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\end{cases};\ z_\omega=\frac{b}{1-a}=\frac{-1-i}{1-i}=-i=z_A$$

منه نستنتج أنّ التحويل T دوران مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$

ب. تعيين صورة النقطة B بالتحويل T

<u>طريقة 1:</u>

$$T(B)=B' \Rightarrow z_{B'}=iz_B-1-i=i(2+3i)-1-i=-4+i=z_C$$
$$\Rightarrow T(B)=C$$

<u>طريقة 2:</u> بما أنّ المثلث ABC قائم في A ومتساوي الساقين ، فإنّ النقطة C هي صورة B بالدوران الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$ ، منه $T(B)=C$.

3. لتكن D النقطة ذات اللاحقة $\boldsymbol{z_D=-6+2i}$

أ. بيان أنّ النقط A ، C ، D في استقامية

$$\frac{z_D-z_A}{z_C-z_A}=\frac{-6+3i}{-4+2i}=\frac{3(-2+i)}{2(-2+i)}=\frac{3}{2}\Rightarrow \boxed{\text{النقط } D,C,A \text{ في استقامية}}$$

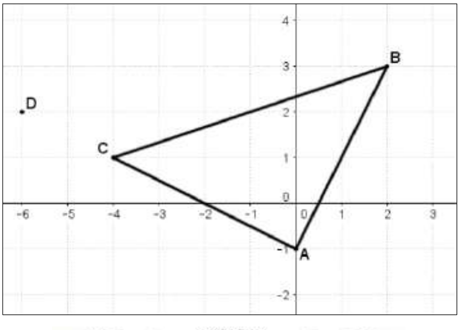
ب. تعيين نسبة التحاكي *h* الذي مركزه A و يحوّل النقطة C إلى النقطة D

$$\frac{z_D-z_A}{z_C-z_A}=\frac{3}{2}\Rightarrow z_D-z_A=\frac{3}{2}(z_C-z_A)\Rightarrow \boxed{k=\frac{3}{2}}$$

ج. تعيين العناصر المميزة للتشابه S الذي مركزه A و يحوّل B إلى D

$$\begin{cases}C=R_{\left(A;\frac{\pi}{2}\right)}(B)\\ D=h_{\left(A;\frac{3}{2}\right)}(C)\end{cases}\Rightarrow D=\left[h_{\left(A;\frac{3}{2}\right)}\right]o\left[R_{\left(A;\frac{\pi}{2}\right)}\right](B)\Rightarrow \boxed{D=S_{\left(A;\frac{3}{2};\frac{\pi}{2}\right)}(B)}$$

نستنتج أنّ التشابه S الذي يحوّل B إلى D ، مركزه A ، نسبته $\frac{3}{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$



* * *

حل التمرين 46.

$$f(M)=M' \Rightarrow z'+2=(1+i)(z+2-2i)$$

1. بيان أنّه يمكن كتابة العبارة السابقة على الشكل : $z'=az+b$ ، وتعيين الطبيعة والعناصر المميزة للتحويل f

$$z'+2=(1+i)(z+2-2i) \Rightarrow z'=(1+i)z+(1+i)(2-2i)-2$$

$$\Rightarrow \boxed{z'=(1+i)z+2}$$

$$|1+i|=\sqrt{2}\,;\arg(1+i)=\frac{\pi}{4}+2k\pi\,;\ z_\omega=\frac{2}{-i}=2i$$

نستنتج أنّ التحويل f تشابه مباشر نسبته $\sqrt{2}$ ، زاويته $\frac{\pi}{4}$ ومركزه $\omega(0;2)$

2. لتكن (Γ) مجموعة النقط M التي تحقق : $|z+2-2i|=\sqrt{2}$ و A نقطة لاحقتها $z_A=-2+2i$

أ. تعيين لاحقتي النقطتين A' و B بحيث : $A=f(B)$ ، $A'=f(A)$

$$A'=f(A) \Rightarrow z_{A'}=(1+i)z_A+2=(1+i)(-2+2i)+2 \Rightarrow \boxed{z_{A'}=-2}$$

$$A=f(B) \Rightarrow z_A=(1+i)z_B+2 \Rightarrow z_B=\frac{z_A-2}{1+i}=\frac{-4+2i}{1+i}$$

$$\Rightarrow \boxed{z_B=-1+3i}$$

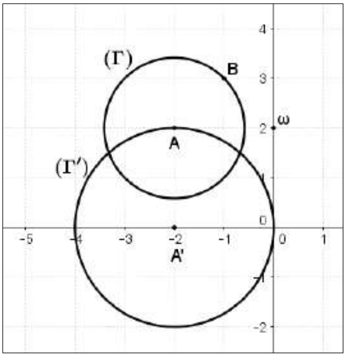
ب. التحقق أنّ النقطة B تنتمي إلى المجموعة (Γ)

$$|z_B+2-2i|=|-1+3i+2-2i|=|1+i|=\sqrt{2} \Rightarrow \boxed{B\in(\Gamma)}$$

ج. اثبات أنّ صورة (Γ) بالتحويل f هي دائرة (Γ') ذات المركز A' ونصف القطر 2

$$|z+2-2i|=\sqrt{2} \Rightarrow AM=\sqrt{2}$$

(Γ) هي الدائرة التي مركزها A ونصف قطرها $r=\sqrt{2}$ ، وتكون عندئذ صورتها بالتحويل f هي الدائرة (Γ') ذات المركز A' ونصف القطر $r'=|k|\times r$ أي $r'=\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$



* * *

حل التمرين 47.

1. حل المعادلة : $z^2 - (4\cos\alpha)z + 4 = 0 \dots (1)$

$$\Delta' = (2\cos\alpha)^2 - 4 = 4\cos^2\alpha - 4 = 4(\cos^2\alpha - 1) = -4\sin^2\alpha$$
$$= (2i\sin\alpha)^2$$

$$\boxed{z_1 = 2\cos\alpha + 2i\sin\alpha\ ;\ z_2 = 2\cos\alpha - 2i\sin\alpha}$$

2. $\alpha = \frac{\pi}{3}$. بيان أنّ : $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2013} = 1$

$$z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow \boxed{z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}}$$

$$z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right] \Rightarrow \boxed{z_2 = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}}$$

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2013} = \left(\frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2e^{-i\frac{\pi}{3}}}\right)^{2013} = \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^{2013} = e^{i\,1342\pi} \Rightarrow \boxed{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2013} = 1}$$

3. $z_A = 1 + i\sqrt{3}$ ، $z_B = 1 - i\sqrt{3}$ و $z_C = 4 + i\sqrt{3}$

أ. انشاء النقط C, B, A (انظر الشكل في نهاية حل التمرين)

ب. كتابة العدد المركّب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل الجبري

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{4 + i\sqrt{3} - 1 - i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3} - 1 - i\sqrt{3}} = \frac{3}{-2i\sqrt{3}} \Rightarrow \boxed{\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

استنتاج أنّ C هي صورة B بالتشابه S الذي مركزه A ويُطلب تعيين نسبته وزاويته

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{\sqrt{3}}{2}i \Rightarrow z_C - z_A = \frac{\sqrt{3}}{2}i(z_B - z_A)$$

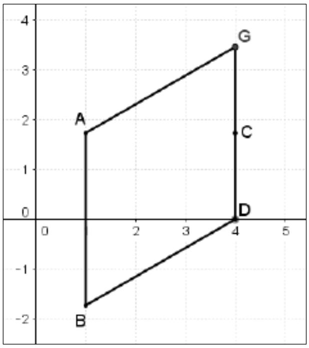
نستنتج أنّ C هي صورة B بالتشابه S الذي مركزه A نسبته $\frac{\sqrt{3}}{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$

ج. تعيين لاحقة النقطة G مرجح الجملة $\{(A;1),(B;-1),(C;2)\}$، وانشاء G

$$z_G = \frac{z_A - z_B + 2z_C}{2} = \frac{1 + i\sqrt{3} - 1 + i\sqrt{3} + 8 + 2i\sqrt{3}}{2}$$
$$\Rightarrow \boxed{z_G = 4 + 2i\sqrt{3}}$$

د. حساب z_D لاحقة النقطة D ، بحيث يكون الرباعي $ABDG$ متوازي أضلاع

$$AB = GD \Rightarrow z_B - z_A = z_D - z_G \Rightarrow z_D = z_B - z_A + z_G$$
$$\Rightarrow z_D = 1 - i\sqrt{3} - 1 - i\sqrt{3} + 4 + 2i\sqrt{3} = \boxed{4}$$



حل التمرين 48.

$$\alpha = -2\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right) \quad ، \quad \beta = \left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right) - i\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$$

1. **حساب β^2 وكتابته على الشكل المثلثي**

$$\beta^2 = \left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2 - \left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)^2 - 2i\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$$

$$\beta^2 = 8 - 4\sqrt{3} - 8 - 4\sqrt{3} - 8i = \boxed{-8\sqrt{3} - 8i}$$

$$\beta^2 = 16\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = \boxed{16\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)}$$

2. **استنتاج طويلة وعمدة β**

$$\begin{cases} \left|\beta^2\right| = 16 \\ \arg\left(\beta^2\right) = \dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |\beta| = 4 \\ \arg(\beta) = \dfrac{7\pi}{12} + k\pi \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} |\beta| = 4 \\ \arg(\beta) = \dfrac{19\pi}{12} \end{cases}}$$

ملاحظة: القيمة $\frac{7\pi}{12}$ مرفوضة لأنّ $Ré(\beta) > 0$ و $Im(\beta) < 0$ أي $\beta \in \left]\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right[$

3. **استنتاج قيمتي $\cos\frac{19\pi}{12}$ و $\sin\frac{19\pi}{12}$**

$$\cos\frac{19\pi}{12} = \frac{Ré(\beta)}{|\beta|} = \boxed{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}\ ;\ \sin\frac{19\pi}{12} = \frac{Im(\beta)}{|\beta|} = \boxed{\frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$$

4. **تعيين طويلة وعمدة α**

$$\alpha = -2\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right) = 2\left(-\cos\frac{\pi}{12} - i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

$$\alpha = 2\left(\cos\frac{13\pi}{12} + i\sin\frac{13\pi}{12}\right) \Rightarrow \boxed{|\alpha| = 2\ ;\ \arg(\alpha) = \frac{13\pi}{12}}$$

5. **كتابة العدد $(\alpha\beta)^{2008}$ على الشكل الأسّي**

$$(\alpha\beta)^{2008}=\left(2e^{i\frac{13\pi}{12}}\times 4e^{i\frac{19\pi}{12}}\right)^{2008}=\left(8e^{i\frac{32\pi}{12}}\right)^{2008}=\left(8e^{i\frac{8\pi}{3}}\right)^{2008}$$

$$(\alpha\beta)^{2008}=8^{2008}e^{i\frac{2008\times 8\pi}{3}}=8^{2008}e^{i\frac{16064\pi}{3}}=\boxed{8^{2008}e^{i\frac{2\pi}{3}}}$$

* * *

حل التمرين 49.

I- $P(z)=z^3-z-10i$

1. حساب $P(-2i)$

$P(-2i)=(-2i)^3-(-2i)-10i=8i+2i-10i=0$

2. تعيين العددين الحقيقيين a و b بحيث : $P(z)=(z+2i)(z^2+aiz+b)$

	1	0	-1	$-10i$
$-2i$				
	1	$-2i$	-5	0

$$\boxed{P(z)=(z+2i)(z^2-2iz-5)}$$

3. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z)=0$

$P(z)=0\Rightarrow(z+2i)(z^2-2iz-5)=0$

$z+2i=0\Rightarrow z_1=-2i$

$z^2-2iz-5=0\ ;\ \Delta'=-1+5=4\ ;\ z_2=-2+i\ ;\ z_3=2+i$

$\boxed{S=\{-2i\,;-2+i\,;\ 2+i\}}$

II- المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$.

1. $z_A=-2i$، $z_B=-2+i$، $z_C=2+i$، $G_\alpha\{(A,\alpha);(B,1);(C,2\alpha-1)\}$

- **تعيين مجموعة قيم α حتى تكون G_α مرجحا**

$\alpha+1+2\alpha-1\neq 0\Rightarrow 3\alpha\neq 0\Rightarrow \alpha\neq 0\Rightarrow \boxed{\alpha\in\mathbb{R}^*}$

- **تعيين إحداثيات G_α بدلالة α**

$$z_{G_\alpha}=\frac{\alpha z_A+z_B+(2\alpha-1)z_C}{3\alpha}=\frac{-2\alpha i-2+i+(2\alpha-1)(2+i)}{3\alpha}$$

$$z_{G_\alpha}=\frac{4\alpha-4}{3\alpha}\Rightarrow\boxed{G_\alpha\left(\frac{4\alpha-4}{3\alpha};0\right)}$$

- **تعيين مجموعة النقط G_α لما α يمسح $\mathbb{R}^*$**

مجموعة النقط G_α لما α يمسح $\mathbb{R}^*$ هي محور الفواصل $(y=0)$ باستثناء النقطة $\left(\frac{4}{3};0\right)$ لأنّ :

$\frac{4\alpha-4}{3\alpha}=\frac{4}{3}\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)$ ، وبما أنّ $\alpha-1\neq\alpha$ ، فإنّ $\frac{\alpha-1}{\alpha}\neq 1$ ، منه $\frac{4}{3}\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)\neq\frac{4}{3}$

ملاحظة : يمكن دراسة تغيرات الدالة $f(x)=\frac{4x-4}{3x}$ وبيان أنّ :

$$x\in\mathbb{R}^*\Rightarrow f(x)\in\mathbb{R}-\left\{\frac{4}{3}\right\}$$

2. لتكن (E) مجموعة النقط M التي تحقق ما يلي : $MA^2+MB^2+MC^2=29$

- **التحقق أن B و C تنتميان إلى المجموعة (E)**

$$BA^2+BC^2=|z_A-z_B|^2+|z_C-z_B|^2=|2-3i|^2+|4|^2$$

$$=13+16=29\Rightarrow\boxed{B\in(E)}$$

$$CA^2+CB^2=|z_A-z_C|^2+|z_B-z_C|^2=|-2-3i|^2+|-4|^2$$

$$=13+16=29\Rightarrow\boxed{C\in(E)}$$

- **بيان أنّ مجموعة النقط (E) هي الدائرة التي مركزها O و نصف قطرها r يطلب تعيينه**

لدينا : $G_1\{(A,1);(B,1);(C,1)\}$ ، منه $G_1(0;0)$ أي $G_1=O$

$$MA^2+MB^2+MC^2=29\Rightarrow\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2+\overrightarrow{MC}^2=29$$

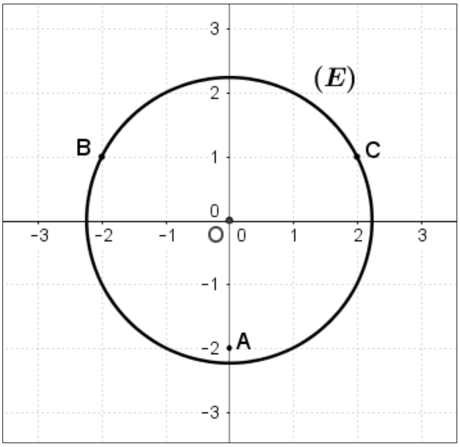
$$\Rightarrow\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB}\right)^2+\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OC}\right)^2=29$$

$$\Rightarrow 3MO^2+OA^2+OB^2+OC^2+2\overrightarrow{MO}\underbrace{\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)}_{\vec{0}}=29$$

$$\Rightarrow 3MO^2=29-OA^2-OB^2-OC^2=29-|z_A|^2-|z_B|^2-|z_C|^2$$

$$\Rightarrow 3MO^2=29-4-5-5=15\Rightarrow\boxed{MO^2=5}$$

منه مجموعة النقط (E) هي الدائرة التي مركزها O و نصف قطرها $r=\sqrt{5}$



* * *

حل التمرين 50.

I- $P(z) = z^3 - z^2 + 3z + 5$

1. بيان أنّ $\overline{P(z)} = P(\bar{z})$

$$\overline{P(z)} = \overline{z^3 - z^2 + 3z + 5} = \overline{z^3} - \overline{z^2} + \overline{3z} + 5 = \bar{z}^3 - \bar{z}^2 + 3\bar{z} + 5 = P(\bar{z})$$

نستنتج أنّه إذا كان z حلا للمعادلة $P(z) = 0$ ، فإنّ مرافقه $\bar{z}$ حل لها أيضا

z حل $\Rightarrow P(z) = 0 \Rightarrow \overline{P(z)} = 0 \Rightarrow P(\bar{z}) = 0 \Rightarrow$ $\bar{z}$ حل

2. حساب $P(-1)$

$$P(-1) = -1 - 1 - 3 + 5 = \boxed{0}$$

3. تعيين العددين الحقيقيين a ، b حيث : $P(z) = (z + 1)(z^2 + az + b)$

	1	-1	3	5
-1				
	1	-2	5	0

$$\boxed{P(z) = (z+1)(z^2 - 2z + 5)}$$

استنتاج حلول المعادلة $P(z) = 0$

$$P(z) = 0 \Rightarrow (z+1)(z^2 - 2z + 5) = 0$$

$$z + 1 = 0 \Rightarrow z_0 = -1$$

$$z^2 - 2z + 5 = 0\ ;\ \Delta = -16 = (4i)^2\ ;\ z_1 = 1 - 2i\ ;\ z_2 = 1 + 2i$$

$$\boxed{S = \{-1\ ;\ 1 - 2i\ ; 1 + 2i\}}$$

II- $z_A = -1$ ، $z_B = 1 - 2i$ ، $z_C = 1 + 2i$

أ- تعيين التشابه الذي مركزه C و يحول النقطة A إلى B

$$S(A) = B \Rightarrow z_B - z_C = a(z_A - z_C) \Rightarrow a = \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \frac{-4i}{-2 - 2i} = \frac{2i}{1 + i}$$

$$\Rightarrow a = 1 + i$$

$$z_C = \frac{b}{1 - a} \Rightarrow b = z_C(1 - a) = (1 + 2i)(-i) = 2 - i$$

$$S(M) = M' \Rightarrow \boxed{z' = (1 + i)z + 2 - i}$$

تعيين العناصر المميزة للتشابه S

$$a = 1 + i \Rightarrow \begin{cases} k = |1 + i| = \sqrt{2} \\ \theta = \arg(1 + i) = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}$$

نستنتج أنّ التشابه S مركزه C ، نسبته $\sqrt{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{4}$

ب- $L = (z_A - z_C)$

- **كتابة L على الشكل الأسي ثم المثلثي**

$$\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \Rightarrow \frac{-4i}{L} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \Rightarrow \frac{4e^{-i\frac{\pi}{2}}}{L} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \Rightarrow L = \frac{4e^{-i\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}$$

$$\Rightarrow \boxed{L = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}} = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)}$$

- **تعيين قيمة العدد الطبيعي n بحيث يكون L^n حقيقيا**

$$L^n \in \mathbb{R} \Rightarrow \arg(L^n) = k\pi \Rightarrow \frac{5n\pi}{4} = k\pi \Rightarrow 5n = 4k \Rightarrow n = \frac{4}{5}k = 4\left(\frac{k}{5}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{n = 4k' ; k' \in \mathbb{N}}$$

مجموعة قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون L^n حقيقيا هي مضاعفات 4

* * *

حل التمرين 51.

1. حلّ في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة : $z^2 - (1 - i)^2 = 0$

$z^2 - (1-i)^2 = 0 \Rightarrow z^2 = (1-i)^2 \Rightarrow z = 1 - i$ أو $z = -1 + i$

$$\boxed{S = \{1 - i\,;\, -1 + i\}}$$

2. $z_1 = 1 - i$ ، $z_2 = -1 + i$

أ. كتابة z_1 على الشكل الأسي

$$z_1 = 1 - i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) \Rightarrow \boxed{z_1 = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}$$

استنتاج الشكل الأسي لـ z_2

$$z_2 = -z_1 = -\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) \Rightarrow \boxed{z_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}}$$

طريقة ثانية :

$$z_2 = -z_1 \Rightarrow z_2 = \sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4} + \pi\right)} \Rightarrow \boxed{z_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}} ; [\arg(-z) = \arg(z) + \pi]$$

ب. كتابة العدد المركب $\frac{z_2}{z_1}$ على الشكل المثلثي واستنتاج أنه عدد حقيقي سالب

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}} = e^{i\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right)} = e^{i\pi} \Rightarrow \boxed{\frac{z_2}{z_1} = -1}$$

3. المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$. لتكن A ، B ، G ، M أربع نقط من المستوي لواحقها z_1 ، z_2 ، $3i$ ، z على الترتيب

أ. تعيين لاحقة C حتى تكون G مرجح الجملة $\{(A, -1); (B, 2); (C, 1)\}$

$$G\{(A,-1);(B,2);(C,1)\} \Rightarrow z_G = \frac{-z_A + 2z_B + z_C}{2}$$

$$\Rightarrow z_C = 2z_G + z_A - 2z_B = 6i + 1 - i - 2(-1+i) = \boxed{3+3i}$$

ب. تعيين مجموعة النقط $M(x,y)$ من المستوي حتى تكون النقط A، B، M في استقامية

طريقة ①:

$$M,B,A \text{ استقامية} \Rightarrow \left(\frac{z_B - z}{z_A - z}\right) \in \mathbb{R} \Rightarrow \arg\left(\frac{z_B - z}{z_A - z}\right) = k\pi$$

$$\Rightarrow \left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}\right) = k\pi \Rightarrow \boxed{M \in (AB)}$$

مجموعة النقط M من المستوي حتى تكون النقط A، B، M في استقامية هي المستقيم (AB)

طريقة ②:

حتى تكون النقط A، B، M في استقامية ، ينبغي أن يكون الشعاعان $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطين خطّيا

$$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-1 \\ y+1 \end{pmatrix} \; ; \; \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AM} \parallel \overrightarrow{AB} \Rightarrow 2(y+1) + 2(x-1) = 0 \Rightarrow y + x = 0 \Rightarrow \boxed{y = -x}$$

مجموعة النقط M من المستوي حتى تكون النقط A، B، M في استقامية هي المستقيم ذي المعادلة : $y = -x$ ، أي المستقيم (AB)

4. (C) دائرة معادلتها : $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$

أ. تعيين مركز و نصف قطر الدائرة (C)

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega(1;-2); r = 2}$$

ب. تعيين صورة (C) بالتشابه المباشر الذي مركزه O و يحوّل B إلى C

نسمي S التشابه المباشر الذي مركزه O و يحوّل B إلى C. لدينا :

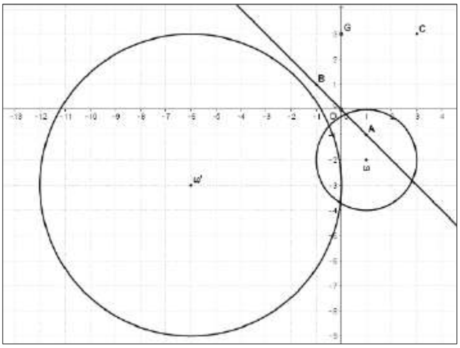
$$S(B) = C \Rightarrow z_C = ke^{i\theta}(z_B) \Rightarrow ke^{i\theta} = \frac{z_C}{z_B} = \frac{3+3i}{-1+i} = -3i = 3e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow k = 3 \; ; \; \theta = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$S[(C)] = (C') \Rightarrow \begin{cases} z_{\omega'} = -3i.z_\omega \\ r' = 3r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_{\omega'} = -3i(1-2i) \\ r' = 3(2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z_{\omega'} = -6-3i \\ r' = 6 \end{cases}$$

نستنتج أنّ صورة (C) بالتشابه المباشر S هي الدائرة (C') التي مركزها $\omega'(-6;-3)$ ونصف قطرها $r' = 6$



* * *

حل التمرين 52.

$$\boldsymbol{z' = \frac{1}{2}(1+i)z + 1}$$

1. تبرير أنّ f تشابه مباشر يُطلب تعيين مركزه Ω ذو اللاحقة ω ، نسبته k وزاويته θ

$$a = \frac{1}{2}(1+i) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}$$

$$\omega = \frac{b}{1-a} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}(1+i)} = \frac{2}{1-i} = \boxed{1+i}$$

منه ، نستنتج أنّ f تشابه مباشر مركزه $\Omega(1;1)$ ، نسبته $\frac{\sqrt{2}}{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{4}$

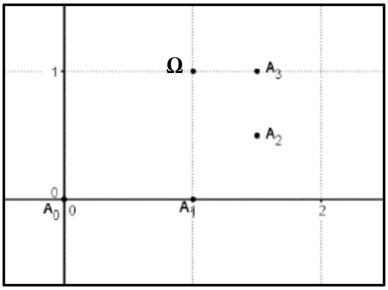
2. نسمي A_0 النقطة O ومن أجل كل عدد طبيعي n نضع : $A_{n+1} = f(A_n)$

أ. تعيين لاحقات النقط A_1 ، A_2 ، A_3

$$A_1 = f(A_0) \Rightarrow z_1 = \frac{1}{2}(1+i)z_0 + 1 \Rightarrow \boxed{z_1 = 1}$$

$$A_2 = f(A_1) \Rightarrow z_2 = \frac{1}{2}(1+i)z_1 + 1 = \frac{1}{2}(1+i) + 1 \Rightarrow \boxed{z_2 = \frac{1}{2}(3+i)}$$

$$A_3 = f(A_2) \Rightarrow z_3 = \frac{1}{2}(1+i)z_2 + 1 = \frac{1}{4}(1+i)(3+i) + 1 \Rightarrow \boxed{z_3 = \frac{3}{2} + i}$$



ب. بيان أنّ المتتالية (u_n) هندسية

$$\begin{cases} u_{n+1} = \Omega A_{n+1} \\ A_{n+1} = f(A_n) \end{cases} \Rightarrow \Omega A_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\Omega A_n \Rightarrow \boxed{u_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}u_n}$$

نستنتج أنّ المتتالية (u_n) هندسية أساسها $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$ وحدّها الأول

$$u_0 = \Omega A_0 = |\omega| = |1+i| = \sqrt{2}$$

بيان أنّ عبارة الحد العام u_n هي : $u_n = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$

$$u_n = u_0 q^n = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \Rightarrow \boxed{u_n = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n}$$

ج. تعيين رتبة n_0 حتى تنتمي كل النقط A_n إلى القرص الذي مركزه Ω ونصف قطره $0,1$

تنتمي النقط A_n إلى القرص الذي مركزه Ω ونصف قطره 0,1 إذا وفقط إذا كان $\Omega A_n \leq 0,1$

$$\Omega A_n \leq 0,1 \Rightarrow u_n \leq 0,1 \Rightarrow \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \leq 0,1 \Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \leq \frac{0,1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \leq \ln\left(\frac{0,1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow n\underbrace{\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}_{<0} \leq \ln\left(\frac{0,1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow n \geq \frac{\ln\left(\frac{0,1}{\sqrt{2}}\right)}{\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$$

$$\Rightarrow n \geq 7,64 \Rightarrow \boxed{n_0 = 8}$$

.3 أ. تعيين طبيعة المثلث $\Omega A_0 A_1$

$$\begin{cases} \Omega A_1 = A_0A_1 = 1 \\ (\Omega A_1) \perp (A_0A_1) \end{cases} \Rightarrow \boxed{\text{المثلث } \Omega A_0A_1 \text{ قائم في } A_1 \text{ ومتساوي الساقين}}$$

استنتاج من أجل كل عدد طبيعي n طبيعة المثلث $\Omega A_n A_{n+1}$

بما أنّ المثلث $\Omega A_n A_{n+1}$ هو صورة المثلث $\Omega A_0 A_1$ بالتشابه المباشر $f^n = \underbrace{fofo\ldots of}_{n \text{ مرة}}$ ، وعلما أنّ التشابه المباشر يحافظ على الأشكال ،

نستنتج أنّ المثلث $\Omega A_n A_{n+1}$ قائم في A_{n+1} ومتساوي الساقين

ب. كتابة l_n بدلالة n ، ثمّ حساب $\lim\limits_{n \to +\infty} l_n$

$$l_n = \Omega A_1 + \Omega A_2 + \cdots + \Omega A_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = u_1\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)$$

$$l_n = \frac{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n}{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \boxed{\frac{2}{2-\sqrt{2}}\left[1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\right]}$$

$$\lim_{n\to+\infty} l_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{2}{2-\sqrt{2}}\left[1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\right] = \lim_{n\to+\infty}\frac{2}{2-\sqrt{2}}\left[1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\right]$$

$$= \boxed{\frac{2}{2-\sqrt{2}}}$$

* * *

حل التمرين 53.

$$\boldsymbol{P(z) = z^3 - 6z^2 + 12z - 16}$$

1. حساب P(4)

$P(4) = 4^3 - 6(4)^2 + 12(4) - 16 = 112 - 112 = 0$

$P(4) = 0 \Rightarrow P(z) = (z-4)(z^2-2z+4)$

حل المعادلة $P(z) = 0$

$P(z) = 0 \Rightarrow (z-4)(z^2-2z+4) = 0 \Rightarrow z-4=0$ أو $z^2-2z+4=0$

$z - 4 = 0 \Rightarrow z_0 = 4$

$z^2 - 2z + 4 = 0\ ;\ \Delta = -12 = \left(2\sqrt{3}i\right)^2\ ; z_1 = 1+\sqrt{3}i\ ; z_2 = 1-\sqrt{3}i$

$\boxed{S = \left\{4; 1+\sqrt{3}i; 1-\sqrt{3}i\right\}}$

2. A، B، C نقط لواحقها $z_1 = 4$ ، $z_2 = 1+\sqrt{3}i$ ، $z_3 = \overline{z_2}$ على الترتيب

أ. بيان أنّ المثلث ABC متقايس الأضلاع

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{-3+\sqrt{3}i}{-3-\sqrt{3}i} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

$$\begin{cases} \left|\dfrac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}\right| = 1 \\ \arg\left(\dfrac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}\right) = -\dfrac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AB = AC \\ \left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right) = -\dfrac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\text{المثلث } ABC \text{ متقايس الأضلاع}}$$

3. لتكن D نقطة لاحقتها $z_4 = -\sqrt{3} + i$ ، ولتكن E صورة D بالدوران الذي مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{3}$ ، و F صورة D بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{OB}$

أ. تعيين z_5 و z_6 لاحقتي E وF على الترتيب

$$E = R(D) \Rightarrow z_5 = z_4 . e^{i\frac{\pi}{3}} = \left(-\sqrt{3}+i\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \Rightarrow \boxed{z_5 = -\sqrt{3}-i}$$

$$F = T(D) \Rightarrow z_6 = z_4 + z_2 = -\sqrt{3} + i + 1 + \sqrt{3}i$$

$$\Rightarrow \boxed{z_6 = \left(1-\sqrt{3}\right) + (1+\sqrt{3})i}$$

ب. تعليم النقط A ، B ، C ، D ، E ، F في المعلم السابق

(انظر الشكل في نهاية حل التمرين)

ج. بيان أنّ المستقيمين (OC) و (OE) متعامدان

$$\frac{z_3}{z_5} = \frac{1-\sqrt{3}i}{-\sqrt{3}-i} = i = e^{i\frac{\pi}{2}} ; \arg\left(\frac{z_3}{z_5}\right) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \left(\overrightarrow{OE};\overrightarrow{OC}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{(OC) \perp (OE)}$$

4. لتكن النقطة H الرأس الرابع لمتوازي الأضلاع COEH

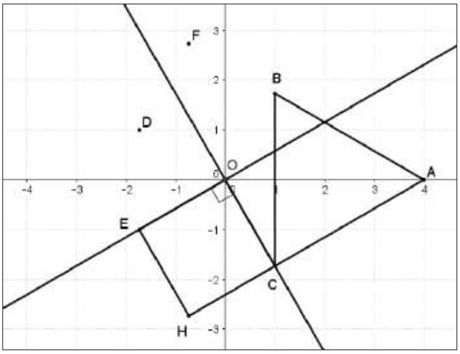
أ. بيان أنّ الرباعي COEH مربع

بما أنّ $\frac{z_3}{z_5} = e^{i\frac{\pi}{2}}$ ، فإنّ المثلث COE قائم في O ومتساوي الساقين ،
وباعتبار أنّ النقطة H هي الرأس الرابع لمتوازي الأضلاع COEH ،
نستنتج أنّ هذا الأخير مربع

ب. حساب z_7 لاحقة النقطة H

$$CH = OE \Rightarrow z_7 - z_3 = z_5 \Rightarrow z_7 = z_3 + z_5 = 1 - \sqrt{3}i - \sqrt{3} - i$$

$$\Rightarrow \boxed{z_7 = \left(1-\sqrt{3}\right) - (1+\sqrt{3})i}$$



* * *

حل التمرين 54.

1. حل المعادلة : $(1+i)z^2 - 2z + 1 - i = 0$

نلاحظ أنّ مجموع المعاملات معدوم $(1 + i - 2 + 1 - i = 0)$ ، منه المعادلة تقبل حلين هما 1 و $\frac{c}{a}$ ، ومنه : $\boxed{S = \left\{1 ; \frac{1-i}{1+i}\right\}}$

.2 $|m| = \sqrt{2}$. حل المعادلة : $mz^2 - 2z + \bar{m} = 0 \ldots (E)$

$$\Delta' = 1 - m.\bar{m} = 1 - |m|^2 = -1 = i^2 \; ; \boxed{z_1 = \frac{1+i}{m} \; ; z_2 = \frac{1-i}{m}}$$

.3 $m = \sqrt{2}e^{i\alpha}$ ، $\alpha \in \mathbb{R}$

أ. اثبات أنّ حلّي المعادلة (E) ، z_1 و z_2 يُكتبان كما يلي : $z_1 = e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}$ و $z_2 = e^{-i\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}$

$$z_1 = \frac{1+i}{m} = \frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}e^{i\alpha}} = e^{i\frac{\pi}{4}-i\alpha} = \boxed{e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}}$$

$$z_2 = \frac{1-i}{m} = \frac{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}e^{i\alpha}} = e^{-i\frac{\pi}{4}-i\alpha} = \boxed{e^{-i\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}}$$

ب. $M_1(z_1)$, $M_2(z_2)$, $M(z_1+z_2)$. اثبات أنّ $\frac{z_1}{z_2} = i$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}}{e^{-i\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}} = e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)+i\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)} = e^{i\frac{\pi}{2}} \Rightarrow \boxed{\frac{z_1}{z_2} = i}$$

استنتاج طبيعة الرباعي OM_1MM_2

بما أنّ $\frac{z_1}{z_2} = i$ ، فإنّ المثلث OM_1M_2 قائم في O ومتساوي الساقين ، وبما أنّ لاحقة النقطة M هي $z_1 + z_2$ ، فإنّ الشعاع $\overrightarrow{OM}$ هو محصّلة الشعاعين $\overrightarrow{OM_1}$ و $\overrightarrow{OM_2}$ ، منه الرباعي OM_1MM_2 مربّع.

* * *

حل التمرين 55.

$$P(z) = z^3 + 2\left(\sqrt{3} - i\right)z^2 + 4\left(1 - \sqrt{3}i\right)z - 8i$$

.1 حساب $P(2i)$

$$P(2i) = \underbrace{(2i)^3}_{-8i} + 2\left(\sqrt{3} - i\right)\underbrace{(2i)^2}_{-4} + 4\left(1 - \sqrt{3}i\right)(2i) - 8i$$

$$= -8i - 8\sqrt{3} + 8i + 8i + 8\sqrt{3} - 8i = 0$$

تحليل $P(z)$ (باستعمال خوارزمية هورنر)

	1	$2\left(\sqrt{3} - i\right)$	$4\left(1 - \sqrt{3}i\right)$	$-8i$
$2i$				
	1	$2\sqrt{3}$	4	0

$P(z) = (z - 2i)(z^2 + 2\sqrt{3}z + 4)$

2. حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z) = 0$

$$P(z) = 0 \Rightarrow (z - 2i)\left(z^2 + 2\sqrt{3}z + 4\right) = 0$$

$$z - 2i = 0 \Rightarrow z_0 = 2i$$

$$z^2 + 2\sqrt{3}z + 4 = 0\ ;\ \Delta = -4 = (2i)^2\ ;\ z_1 = -\sqrt{3} + i\ \ ;\ z_2 = -\sqrt{3} - i$$

$$\boxed{S = \left\{2i\ ;\ -\sqrt{3} + i\ \ ;\ -\sqrt{3} - i\right\}}$$

3. $z_A = 2i$ ، $z_B = -\sqrt{3} + i$ ، $z_C = -\sqrt{3} - i$

أ. كتابة العددين z_A و z_B على الشكل الأسّي

$$z_A = 2i \Rightarrow \boxed{z_A = 2e^{i\frac{\pi}{2}}}\ ;\ z_B = -\sqrt{3} + i = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) \Rightarrow \boxed{z_B = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}}$$

استنتاج الشكل الأسّي للعددين z_C و $\frac{z_B}{z_A}$

$$z_C = \overline{z_B} = 2e^{-i\frac{5\pi}{6}} \Rightarrow \boxed{z_C = 2e^{i\frac{7\pi}{6}}}$$

$$\frac{z_B}{z_A} = \frac{2e^{i\frac{5\pi}{6}}}{2e^{i\frac{\pi}{2}}} = e^{i\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{2}\right)} = e^{i\frac{2\pi}{6}} \Rightarrow \boxed{\frac{z_B}{z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}}$$

ب. بيان أنّ $(z_B)^{1434}$ عدد حقيقي وأنّ $(z_B)^{2013}$ عدد تخيلي صرف

$$(z_B)^{1434} = \left(2e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)^{1434} = 2^{1434}e^{i\frac{1434\times5\pi}{6}} = 2^{1434}e^{i1195\pi} = 2^{1434}e^{i\pi}$$

$$\Rightarrow \boxed{(z_B)^{1434} = -2^{1434}}$$

$$(z_B)^{2013} = \left(2e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)^{2013} = 2^{2013}e^{i\frac{2013\times5\pi}{6}} = 2^{2013}e^{i\frac{3355}{2}\pi} = 2^{2013}e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{(z_B)^{2013} = -2^{2013}i}$$

.4

أ. حساب قيس للزاوية $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB})$

$$\arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right) = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \boxed{\left(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}\right) = \frac{\pi}{3}}$$

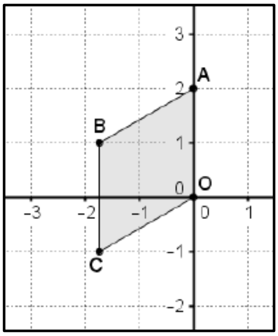
استنتاج طبيعة المثلث OAB

$$\begin{cases} \left|\frac{z_B}{z_A}\right| = 1 \\ \arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right) = \frac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} OA = OB \\ \left(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}\right) = \frac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\text{المثلث } OAB \text{ متقايس الأضلاع}}$$

ب. بيان أنّ الرباعي $OABC$ معين يُطلب حساب مساحته

$$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = -\sqrt{3} + i - 2i = -\sqrt{3} - i = z_C \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC} \\ OA = AB \\ \left(\overrightarrow{AO};\overrightarrow{AB}\right) = \frac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\text{الرباعي } OABC \text{ معيّن}}$$



ج. تعيين زاوية الدوران $\mathscr{R}$ الذي مركزه B و يحوّل O إلى A

بما أنّ المثلث OAB متقايس الأضلاع ، فإنّ $\left(\overrightarrow{BO};\overrightarrow{BA}\right) = \frac{\pi}{3}$ ، منه زاوية الدوران $\mathscr{R}$ الذي مركزه B و يحوّل O إلى A هي $\frac{\pi}{3}$

د. تعيين العبارة المركّبة لهذا الدوران

$$R(M) = M' \Rightarrow z' = az + b\ ; a = e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$z_A = az_O + b \Rightarrow b = z_A = 2i \Rightarrow \boxed{z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z + 2i}$$

* * *

حل التمرين 56.

$z_A = 7 - \sqrt{3}i$ ، $z_B = 5 + 3\sqrt{3}i$ ، C **منتصف** $[OB]$

1. بيان أنّ : $|z_A| = |z_B|$

$$\begin{cases} |z_A| = \left|7 - \sqrt{3}i\right| = \sqrt{52} = 2\sqrt{13} \\ |z_B| = \left|5 + 3\sqrt{3}i\right| = \sqrt{52} = 2\sqrt{13} \end{cases} \Rightarrow \boxed{|z_A| = |z_B|}$$

2. ليكن الدوران $\mathscr{R}$ الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{3}$

أ. كتابة العبارة المركّبة لهذا الدوران

$$M' = R(M) \Rightarrow z' = e^{i\frac{\pi}{3}}.z \Rightarrow \boxed{z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z}$$

ب. اثبات أنّ النقطة **B هي صورة النقطة A بالدوران $\mathscr{R}$**

$$e^{i\frac{\pi}{3}}.z_A=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z_A=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(7-\sqrt{3}i\right)=5+3\sqrt{3}i=z_B$$

$$e^{i\frac{\pi}{3}}.z_A=z_B\Rightarrow\boxed{B=R(A)}$$

استنتاج طبيعة المثلث OAB

$$B=R(A)\Rightarrow\begin{cases}OA=OB\\ \left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)=\dfrac{\pi}{3}\end{cases}\Rightarrow\boxed{\text{المثلث } OAB \text{ متقايس الأضلاع}}$$

ج. تعيين z_C

C منتصف $[OB]$ $\Rightarrow z_C=\frac{z_B}{2}\Rightarrow\boxed{z_C=\frac{5}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i}$

تعيين z_D

$ABCD$ متوازي أضلاع $\Rightarrow\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}\Rightarrow z_D-z_A=z_C-z_B$

$$\Rightarrow z_D=z_A+z_C-z_B=7-\sqrt{3}i+\frac{5}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i-5-3\sqrt{3}i=\boxed{\frac{9}{2}-\frac{5\sqrt{3}}{2}i}$$

3. كتابة العدد $\frac{z_D-z_A}{z_D}$ على الشكل الأسّي

$$\frac{z_D-z_A}{z_D}=\frac{\frac{9}{2}-\frac{5\sqrt{3}}{2}i-7+\sqrt{3}i}{\frac{9}{2}-\frac{5\sqrt{3}}{2}i}=\frac{-\frac{5}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}i}{\frac{9}{2}-\frac{5\sqrt{3}}{2}i}=\frac{-5-3\sqrt{3}i}{9-5\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}i$$

$$\Rightarrow\boxed{\frac{z_D-z_A}{z_D}=-\frac{\sqrt{3}}{3}e^{i\frac{\pi}{2}}}$$

استنتاج طبيعة المثلث OAD

$$arg\left(\frac{z_D-z_A}{z_D}\right)=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\left(\overrightarrow{OD};\overrightarrow{AD}\right)=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\boxed{\text{المثلث } OAD \text{ قائم في } D}$$

4. حساب $\frac{z_D-z_B}{z_D-z_E}$

$$\frac{z_D-z_B}{z_D-z_E}=\frac{z_D-z_B}{z_D-\frac{2}{3}z_A}=\frac{\frac{9}{2}-\frac{5\sqrt{3}}{2}i-5-3\sqrt{3}i}{\frac{9}{2}-\frac{5\sqrt{3}}{2}i-\frac{14}{3}+\frac{2\sqrt{3}}{3}i}=\frac{-\frac{1}{2}-\frac{11\sqrt{3}}{2}i}{-\frac{1}{6}-\frac{11\sqrt{3}}{6}i}$$

$$\Rightarrow\boxed{\frac{z_D-z_B}{z_D-z_E}=3}$$

بما أنّ العدد $\frac{z_D-z_B}{z_D-z_E}$ حقيقي ، نستنتج أنّ النقط D,B,E على استقامة واحدة

.5 $S(M) = M' \Rightarrow z' = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}z + 1$

أ. تعيين طبيعة التحويل النقطي S وذكر عناصره المميزة

$$z' = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}z + 1 \Rightarrow |a| = \sqrt{2}\,; \arg(a) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

$$z_\omega = \frac{1}{1-\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} = \frac{1}{1-(1+i)} = -\frac{1}{i} = i$$

نستنتج أنّ التحويل (S) تشابه مباشر مركزه $\omega(0;1)$ ، نسبته $\sqrt{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{4}$

ب. تعيين (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث : $|z-2| = \sqrt{2}$

لتكن F النقطة ذات اللاحقة 2 ، لدينا :

$$|z-2| = \sqrt{2} \Rightarrow |z - z_F| = \sqrt{2} \Rightarrow \boxed{FM = \sqrt{2}}$$

المجموعة (Γ) هي الدائرة التي مركزها F ونصف قطرها $\sqrt{2}$.

ج. بيان أنّ : $z' - 3 - 2i = (1+i)(z-2)$

$$z' - 3 - 2i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}z - 2 - 2i = (1+i)z - 2(1+i) = (1+i)(z-2)$$

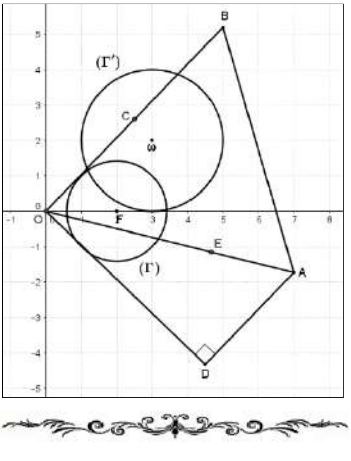
د. استنتاج أنّه إذا كانت النقطة M تنتمي إلى (Γ) فإنّ النقطة M' تنتمي إلى دائرة يُطلب تعيين مركزها ونصف قطرها

$$M \in (\Gamma) \Rightarrow |z-2| = \sqrt{2} \Rightarrow |z-2|\,\underbrace{|1+i|}_{\sqrt{2}} = 2 \Rightarrow |(1+i)(z-2)| = 2$$

$$\Rightarrow |z' - 3 - 2i| = 2 \Rightarrow \left|z' - \underbrace{(3+2i)}_{z_\omega}\right| = 2 \Rightarrow |z' - z_\omega| = 2$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega M' = 2}$$

نستنتج أنّه إذا كانت النقطة M تنتمي إلى (Γ) فإنّ النقطة M' تنتمي إلى الدائرة (Γ') التي مركزها $\omega(3;2)$ ونصف قطرها 2.



* * *

حل التمرين 57.

$z_A = i$ ، $z_B = \sqrt{2}$ ، $z_C = \sqrt{2} + i$. نسمي K, J, I منتصفات القطع $[BC], [AC], [OB]$ على الترتيب.

1. أ. برهان أنّه يوجد تشابه مباشر وحيد S يحوّل A إلى I ويحوّل O إلى B

$$\begin{cases} S(A) = I \\ S(0) = B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_I = az_A + b \\ z_B = b \end{cases} \Rightarrow a = \frac{z_I - z_B}{z_A} = \frac{\frac{1}{2}z_B - z_B}{z_A} = -\frac{z_B}{2z_A}$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2i} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}i}$$

ب. تعيين نسبة وزاوية هذا التشابه

$$a = \frac{\sqrt{2}}{2}i = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{2}} \Rightarrow \boxed{k = \frac{\sqrt{2}}{2}\ ;\ \theta = \frac{\pi}{2}}$$

ج. كتابة العبارة المركّبة لهذا التشابه

$$S(M) = M' \Rightarrow \boxed{z' = \frac{\sqrt{2}}{2}iz + \sqrt{2}}$$

د. استنتاج ω لاحقة Ω مركز التشابه S

$$\omega = \frac{b}{1-a} = \frac{\sqrt{2}}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}i} = \frac{2\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}i} = \frac{2\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}i} \Rightarrow \boxed{\omega = \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{2}{3}i}$$

ه. تعيين صورة المستطيل $AOBC$ بالتشابه S

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}iz_B + \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}i\sqrt{2} + \sqrt{2} = \sqrt{2} + i = z_C \Rightarrow S(B) = C \\ \frac{\sqrt{2}}{2}iz_C + \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}i\left(\sqrt{2} + i\right) + \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i = z_J \Rightarrow S(C) = J \end{cases}$$

$$\begin{cases} S(A) = I \\ S(0) = B \\ S(B) = C \\ S(C) = J \end{cases} \Rightarrow \boxed{S(AOBC) = IBCJ}$$

2. نعتبر التحويل النقطي $S^2 = SoS$

أ. تعيين صورة كل من النقط A, B, O بالتحويل S^2

$$s^2(A) = SoS(A) = S(I) \Rightarrow \boxed{s^2(A) = K}$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}iz_I + \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}i\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} = \sqrt{2} + \frac{1}{2}i = z_K\right)$$

$$s^2(B) = SoS(B) = S(C) \Rightarrow \boxed{s^2(B) = J}$$

$$s^2(O) = SoS(0) = S(B) \Rightarrow \boxed{s^2(O) = C}$$

ب. تعيين طبيعة التحويل S^2 وعناصره المميزة

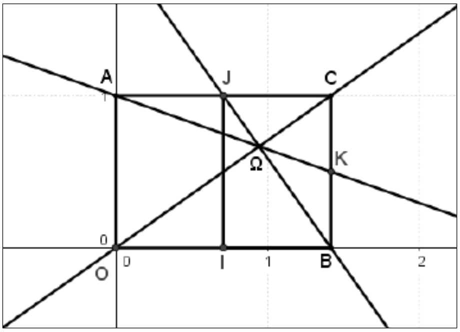
$$S_{(\Omega\,;\,k\,;\,\theta)}\ o\ S_{(\Omega\,;\,k\,;\,\theta)} = S_{(\Omega\,;\,k^2;\,2\theta)} \Rightarrow \boxed{S^2_{\left(\Omega\,;\,\frac{1}{2}\,;\,\pi\right)}}$$

منه ، نستنتج أنّ التحويل S^2 تحاكي مركزه Ω ونسبته $-\frac{1}{2}$

ج. استنتاج أنّ المستقيمات $(AK),(BJ),(OC)$ تتقاطع في نقطة واحدة

$$\begin{cases} s^2(A) = K \Rightarrow \Omega K = -\dfrac{1}{2}\Omega A \Rightarrow K; A; \Omega \text{ على استقامة واحدة} \\ s^2(B) = J \Rightarrow \Omega J = -\dfrac{1}{2}\Omega B \Rightarrow J; B; \Omega \text{ على استقامة واحدة} \\ s^2(O) = C \Rightarrow \Omega C = -\dfrac{1}{2}\Omega O \Rightarrow C; O; \Omega \text{ على استقامة واحدة} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{(AK) \cap (BJ) \cap (OC) = \{\Omega\}}$$



* * *

حل التمرين 58.

$z_A = 3 + 5i$ ، $z_B = -4 + 2i$ ، $z_C = 1 + 4i$. (انظر الشكل في نهاية حل التمرين)

1. $f(M) = M' \Rightarrow z' = (2 - 2i)z + 1$

أ. تعيين طبيعة التحويل f وذكر عناصره المميزة

$$|2 - 2i| = 2\sqrt{2}\,; \arg(2 - 2i) \equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi];\ z_\omega = \frac{1}{-1 + 2i} = -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$$

نستنتج أنّ التحويل f تشابه مباشر مركزه $\omega\left(-\frac{1}{5}; -\frac{2}{5}\right)$ ، نسبته $2\sqrt{2}$ وزاويته $-\frac{\pi}{4}$

ب. تعيين لاحقة B' صورة B بالتحويل f

$$f(B) = B' \Rightarrow z_{B'} = (2 - 2i)z_B + 1 = (2 - 2i)(-4 + 2i\ \ ) + 1$$

$$\Rightarrow \boxed{z_{B'} = -3 + 12i}$$

استنتاج أنّ المستقيمين (CB') و (CA) متعامدان

$$\frac{z_{B'}-z_C}{z_A-z_C}=\frac{-3+12i-1-4i}{3+5i-1-4i}=\frac{-4+8i}{2+i}=4i$$

$$\arg\left(\frac{z_{B'}-z_C}{z_A-z_C}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]\Rightarrow\boxed{(CA)\perp(CB')}$$

2. لتكن M النقطة ذات اللاحقة $z=x+iy$ ، حيث x و y عددان صحيحان.
ولتكن M' صورة M بالتحويل f

أ. بيان أنّ $\overrightarrow{CM'}$ و $\overrightarrow{CA}$ متعامدان إذا وفقط إذا كان (E) ... $x+3y=2$

$$f(M)=M'\Rightarrow z'=(2-2i)z+1=(2-2i)(x+iy)+1$$
$$=(2x+2y+1)+2(-x+y)i$$

$$z_{\overrightarrow{CA}}=z_A-z_C=2+i\Rightarrow\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\ ;\ z_{\overrightarrow{CM'}}=z_{M'}-z_C$$
$$=(2x+2y+1)+2(-x+y)i-1-4i$$

$$z_{\overrightarrow{CM'}}=2(x+y)+2(-x+y-2)i\Rightarrow\overrightarrow{CM'}\begin{pmatrix}2(x+y)\\2(-x+y-2)\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{CA}\perp\overrightarrow{CM'}\Rightarrow4(x+y)+2(-x+y-2)=0\Rightarrow2x+6y-4=0$$
$$\Rightarrow\boxed{x+3y=2}$$

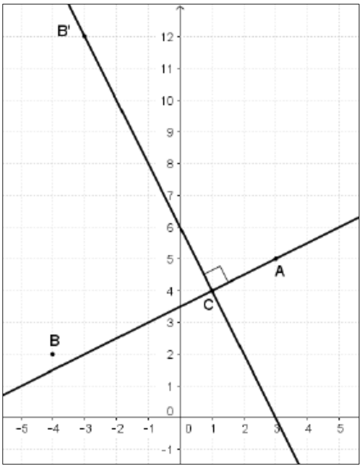
ب. حل في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة (E)

$$\begin{cases}x+3y=2\\(-1)+3(1)=2\end{cases}\Rightarrow(x+1)+3(y-1)=0\Rightarrow x+1=3(-y+1)$$
$$\Rightarrow x+1=3k\Rightarrow x=3k-1$$
$$x+1=3(-y+1)\Rightarrow3k=3(-y+1)\Rightarrow y=-k+1$$
$$\boxed{S=\{(3k-1;-k+1)\}\,;k\in\mathbb{Z}}$$

ج. استنتاج مجموعة النقط M التي إحداثياتها أعداد صحيحة من المجال $[-5;5]$ والتي يكون من أجلها الشعاعان $\overrightarrow{CM'}$ و $\overrightarrow{CA}$ متعامدين.

$$\begin{cases}-5\le x\le5\\-5\le y\le5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-5\le3k-1\le5\\-5\le-k+1\le5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-\frac{4}{3}\le k\le2\\-4\le k\le6\end{cases}\Rightarrow k\in\{-1;0;1;2\}$$

- $k=-1: x=-4\,;y=2\,;M(-4;2)$ (M و B متطابقتان)
- $k=0: x=-1\,;y=1\,;M(-1;1)$
- $k=1: x=2\,;y=0\,;M(2;0)$
- $k=2: x=5\,;y=-1\,;M(5;-1)$



حل التمرين 59.

$P(z)$ كثير حدود في $\mathbb{C}$ حيث : $P(z) = z^4 - 6z^3 + 23z^2 - 34z + 26$

1. **اثبات أنّه إذا كان z_0 جذرا لـ $P(z)$ ، فإنّ $\overline{z_0}$ هو كذلك جذر لـ $P(z)$**

$$P(z_0) = 0 \Rightarrow {z_0}^4 - 6{z_0}^3 + 23{z_0}^2 - 34z_0 + 26 = 0$$

$$\Rightarrow \overline{{z_0}^4 - 6{z_0}^3 + 23{z_0}^2 - 34z_0 + 26} = 0$$

$$\Rightarrow \overline{{z_0}^4} - \overline{6{z_0}^3} + \overline{23{z_0}^2} - \overline{34z_0} + 26 = 0$$

$$\Rightarrow \bar{z_0}^4 - 6\bar{z_0}^3 + 23\bar{z_0}^2 - 34\bar{z_0} + 26 = 0 \Rightarrow P(\bar{z_0}) = 0$$

2. $z_0 = 1 + i$

حساب $P(z_0)$

$$P(z_0) = (1+i)^4 - 6(1+i)^3 + 23(1+i)^2 - 34(1+i) + 26$$

$$P(z_0) = (1+i)^2[(1+i)^2 - 6(1+i) + 23] - 34(1+i) + 26$$

$$P(z_0) = 2i[2i - 6 - 6i + 23] - 34 - 34i + 26$$

$$P(z_0) = 2i(17 - 4i) - 8 - 34i = 0$$

حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $P(z) = 0 \ldots (1)$

$$P(1+i) = 0 \Rightarrow P(1-i) = 0$$

$$\Rightarrow P(z) = (z - 1 - i)(z - 1 + i)(az^2 + bz + c)$$

$$\Rightarrow \boxed{P(z) = (z^2 - 2z + 2)(z^2 - 4z + 13)}$$

$$P(z) = 0 \Rightarrow (z^2 - 2z + 2)(z^2 - 4z + 13) = 0 \Rightarrow \begin{cases} z^2 - 2z + 2 = 0 \\ \text{أو} \\ z^2 - 4z + 13 = 0 \end{cases}$$

$$z^2 - 4z + 13 = 0\ ;\ \Delta' = -9 = (3i)^2\ ; z' = 2 + 3i\ \ ; z'' = 2 - 3i$$

$$\boxed{S = \{1 + i; 1 - i; 2 + 3i\ ; 2 - 3i\}}$$

3. $z_E = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$ ، S تحويل نقطي يقبل نقطة صامدة هي $\Omega(2;-1)$ عبارته المركّبة $z' = z_0 z + b$ ، $b \in \mathbb{C}$

أ. تعيين طبيعة التحويل S وعناصره المميزة

$$z_\Omega = z_0 z_\Omega + b \Rightarrow b = z_\Omega(1 - z_0) = (2 - i)(-i) \Rightarrow \boxed{b = -1 - 2i}$$

$$z' = z_0 z + b = (1 + i)z - 1 - 2i \Rightarrow \boxed{z' = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}z - 1 - 2i}$$

نستنتج أنّ التحويل S تشابه مباشر مركزه Ω ، نسبته $\sqrt{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{4}$

تعيين $S(E)$

$$S(E) = E' \Rightarrow z_{E'} = (1 + i)z_E - 1 - 2i = (1 + i)\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}i\right) - 1 - 2i$$

$$= 1 - i \Rightarrow \boxed{E'(1;-1)}$$

ب. لتكن $(\mathscr{C})$ الدائرة ذات المركز $H(1;-1)$ ونصف القطر $4\sqrt{2}$

تعيين (Γ) مجموعة النقط من المستوي التي صورتها $(\mathscr{C})$ بالتحويل S

لتكن (Γ) الدائرة ذات المركز ω ونصف القطر r. لدينا :

$$S(\Gamma) = (\mathcal{C}) \Rightarrow \begin{cases} z_H = (1 + i)z_\omega - 1 - 2i \\ \sqrt{2}r = 4\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_\omega = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i \\ r = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega = E \\ r = 4 \end{cases}$$

نستنتج أنّ (Γ) هي الدائرة التي مركزها $E\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$ ونصف قطرها 4.

4. A و A_n نقطتان من المستوي لاحقتاهما على الترتيب z_0 و z_0^n ، حيث n عدد طبيعي أكبر تماما من 1

تعيين قيم n من المجال $[2005;2010]$ حيث تكون النقط O ، A و A_n على استقامة واحدة

تكون النقط O ، A و A_n على استقامة واحدة إذا وفقط إذا كان العدد $\frac{z_0^n}{z_0}$ حقيقيا

$$\frac{z_0^n}{z_0} = z_0^{n-1} = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{n-1} = \left(\sqrt{2}\right)^{n-1}e^{i\frac{n-1}{4}\pi}$$

$$z_0^{n-1} \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{n-1}{4}\pi = k\pi \Rightarrow \frac{n-1}{4} = k \Rightarrow n = 4k + 1$$

$$2005 \leq n \leq 2010 \Rightarrow 2005 \leq 4k + 1 \leq 2010 \Rightarrow 501 \leq k \leq 502{,}25$$

$$\Rightarrow k \in \{501; 502\} \Rightarrow \boxed{n \in \{2005; 2009\}}$$

* * *

حل التمرين 60.

1. **حل المعادلة:** $\boldsymbol{z^2 - 4\sqrt{3}z + 16 = 0}$

$$\Delta' = \left(2\sqrt{3}\right)^2 - 16 = -4 = (2i)^2\ ;\ \boxed{z_1 = 2\sqrt{3} + 2i\ ;\ z_2 = 2\sqrt{3} - 2i}$$

2. $z_A = 2\sqrt{3} + 2i$ ، $z_B = 2\sqrt{3} - 2i$ ، $z_C = -1 + i\sqrt{3}$.

أ. **تعيين الشكل الأسّي لكل من** $\boldsymbol{z_A}$ ، $\boldsymbol{z_B}$ **و** $\boldsymbol{z_C}$

$$|z_A| = \left|2\sqrt{3} + 2i\right| = 4\ ; \cos\theta_A = \frac{\sqrt{3}}{2}\ ; \sin\theta_A = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta_A \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$$

$$\Rightarrow \boxed{z_A = 4e^{i\frac{\pi}{6}}}$$

$$|z_B| = \left|2\sqrt{3} - 2i\right| = 4\ ; \cos\theta_B = \frac{\sqrt{3}}{2}\ ; \sin\theta_B = -\frac{1}{2} \Rightarrow \theta_B \equiv -\frac{\pi}{6}[2\pi]$$

$$\Rightarrow \boxed{z_B = 4e^{-i\frac{\pi}{6}}}$$

$$|z_C| = \left|-1 + i\sqrt{3}\right| = 2\ ; \cos\theta_C = -\frac{1}{2}\ ; \sin\theta_C = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta_C \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$$

$$\Rightarrow \boxed{z_C = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}}$$

ب. **انشاء الدائرتين** $(\boldsymbol{\delta})$ **و** $(\boldsymbol{\delta'})$ **و النقط** $\boldsymbol{A}$ ، $\boldsymbol{B}$ **و** $\boldsymbol{C}$: (انظر الشكل في نهاية حل التمرين)

3. $\mathscr{R}$ هو الدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{3}$ و T هو الانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}$ ذو اللاحقة 2

أ. **تعيين** $\boldsymbol{z_{A'}}$ **و** $\boldsymbol{z_{B'}}$ **لاحقتي النقطتين** $\boldsymbol{A'}$ **و** $\boldsymbol{B'}$ **صورتي النقطتين** $\boldsymbol{A}$ **و** $\boldsymbol{B}$ **على الترتيب بالدوران** $\mathscr{R}$

$$z_{A'} = z_A . e^{i\frac{\pi}{3}} = 4e^{i\frac{\pi}{6}} . e^{i\frac{\pi}{3}} = 4e^{i\frac{\pi}{2}} \Rightarrow \boxed{z_{A'} = 4i}$$

$$z_{B'} = z_B . e^{i\frac{\pi}{3}} = 4e^{-i\frac{\pi}{6}} . e^{i\frac{\pi}{3}} = 4e^{i\frac{\pi}{6}} \Rightarrow \boxed{z_{B'} = z_A}$$

ب. **تعيين** $\boldsymbol{z_{C'}}$ **لاحقة النقطة** $\boldsymbol{C'}$ **صورة** $\boldsymbol{C}$ **بالانسحاب** $\mathbf{T}$

$$z_{C'} = -z_C + 2 = -1 + i\sqrt{3} + 2 \Rightarrow \boxed{z_{C'} = 1 + i\sqrt{3}}$$

انشاء النقط $\boldsymbol{A'}$ ، $\boldsymbol{B'}$ **و** $\boldsymbol{C'}$: (انظر الشكل في نهاية حل التمرين)

تعيين طبيعة المثلث $\boldsymbol{OA'B'}$

بما أنّ النقطتين A و B' متطابقتين ، والنقطة A' هي صورة A بالدوران $\mathscr{R}$ ، نستنتج أنّ المثلث $OA'B'$ (وهو المثلث $OA'A$) متقايس الأضلاع (مركز الدوران O وزاويته $\frac{\pi}{3}$)

ج. تعيين عمدة العدد المركّب $\frac{z_{A\prime}-z_{B\prime}}{z_{C\prime}}$

$$\frac{z_{A\prime}-z_{B\prime}}{z_{C\prime}}=\frac{4i-2\sqrt{3}-2i}{1+i\sqrt{3}}=\frac{-2\sqrt{3}+2i}{1+i\sqrt{3}}=2i$$

$$\Rightarrow \boxed{arg\left(\frac{z_{A\prime}-z_{B\prime}}{z_{C\prime}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]}$$

استنتاج أنّ المستقيم (OC') محور في المثلث $OA'B'$

$$arg\left(\frac{z_{A\prime}-z_{B\prime}}{z_{C\prime}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]\Rightarrow\left(\overrightarrow{OC'};\overrightarrow{B'A'}\right)=\frac{\pi}{2}\Rightarrow(OC')\perp(A'B')$$

نستنتج أنّ المستقيم (OC') هو الارتفاع المتعلق بالضلع $[A'B']$ ، وبما أنّ المثلث $OA'B'$ متقايس الأضلاع ، فإنّ المستقيم (OC') محور في المثلث $OA'B'$ (راجع المستقيمات الخاصة في المثلث)

4. ليكن H التحاكي الذي مركزه O ويحوّل (δ) إلى (δ')

أ. تعيين نسبة التحاكي H

ليكن r نصف قطر الدائرة (δ) ، r' نصف قطر الدائرة (δ') و k نسبة التحاكي H. لدينا :

$$H_{(O;k)}(\delta)=(\delta')\Rightarrow r'=kr\Rightarrow k=\frac{r'}{r}=\frac{2}{4}\Rightarrow\boxed{k=\frac{1}{2}}$$

ب. تعيين طبيعة التحويل HoR وعناصره المميزة

لتكن النقطة M' صورة M بالدوران $\mathscr{R}$ و M'' صورة M' بالتحاكي H. لدينا

:

$$\begin{cases}R(M)=M'\\H(M')=M''\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}z'=e^{i\frac{\pi}{3}}.z\Rightarrow z"\\ z"=2z'\end{cases}$$

$$=\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}.z\,;\boxed{HoR(M)=M"\Rightarrow z"=\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}.z}$$

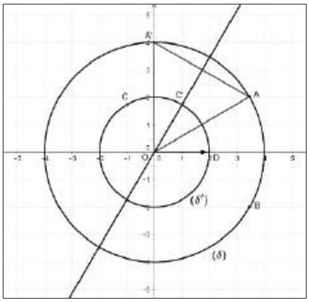
نستنتج أنّ التحويل HoR تشابه مباشر مركزه O ، نسبته $\frac{1}{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{3}$

بصفة عامة لدينا : $\boxed{H_{(\omega\,;k)}oR_{(\omega\,;\theta)}=S_{(\omega\,;k\,;\theta)}}$

ج. تعيين صورة (δ) بالتحويل HoR

بما أنّ مركز الدائرة (δ) هو مركز الدوران $\mathscr{R}$ ، فإنّ صورة الدائرة (δ) بالدوران $\mathscr{R}$ هي (δ) نفسها ، منه : $HoR(\delta)=H(\delta)=(\delta')$

نستنتج أنّ صورة الدائرة (δ) بالتشابه المباشر HoR هي الدائرة (δ').



حل التمرين 61.

1. حل المعادلة: $(z^2+4)(z^2-2\sqrt{3}z+4)=0$

$z^2+4=0 \Rightarrow z^2=-4=(2i)^2 \Rightarrow z_1=-2i\ ;\ z_2=2i$

$z^2-2\sqrt{3}z+4=0\ ;\ \Delta'=-1=i^2\ ;\ z_3=\sqrt{3}-i\ ;\ z_4=\sqrt{3}+i$

$$\boxed{S=\{-2i\ ;\ 2i\ ;\ \sqrt{3}-i\ ;\ \sqrt{3}+i\}}$$

.2 $z_A=\sqrt{3}+i$ ، $z_B=\overline{z_A}$ ، $z_C=-2i$ ، $z_D=\overline{z_C}$

بيان أنّ النقط A، B، C وD تنتمي إلى دائرة (γ) يُطلب تعيين مركزها ونصف قطرها

$|z_A|=|\sqrt{3}+i|=2\ ;\ |z_B|=|\sqrt{3}-i|=2\ ;\ |z_C|=|-2i|=2\ ;$
$|z_D|=|2i|=2$

نستنتج أنّ النقط D, C, B, A تنتمي إلى الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها 2

انشاء النقط A ، B ، C وD : (انظر الشكل في نهاية حل التمرين)

.3 $z_E=-\sqrt{3}+i$

أ. بيان أنّ : $\frac{z_A-z_C}{z_E-z_C}=e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$

$$\frac{z_A-z_C}{z_E-z_C}=\frac{\sqrt{3}+3i}{-\sqrt{3}+3i}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=\boxed{e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}}$$

ب. بيان أنّ النقطة A هي صورة E بدوران $\mathscr{R}$ مركزه C يُطلب تعيين زاويته

$$\frac{z_A-z_C}{z_E-z_C}=e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)} \Rightarrow \boxed{z_A-z_C=e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}(z_E-z_C)}$$

منه ، نستنتج أنّ النقطة A هي صورة النقطة E بدوران $\mathscr{R}$ مركزه C وزاويته $-\frac{\pi}{3}$

ج. استنتاج طبيعة المثلث AEC

طريقة أولى:

بما أنّ النقطة A هي صورة E بدوران $\mathscr{R}$ مركزه C وزاويته $-\frac{\pi}{3}$ ، فإنّ :

$CE=CA$ و$(\overrightarrow{CE};\overrightarrow{CA})=-\frac{\pi}{3}$ ، منه نستنتج أنّ المثلث AEC متقايس الأضلاع

طريقة ثانية:

$$\frac{z_A - z_C}{z_E - z_C} = e^{-i\frac{\pi}{3}} \Rightarrow \begin{cases} \left|\frac{z_A - z_C}{z_E - z_C}\right| = 1 \\ \arg\left(\frac{z_A - z_C}{z_E - z_C}\right) = -\frac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} CE = CA \\ \left(\overrightarrow{CE};\overrightarrow{CA}\right) = -\frac{\pi}{3} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ **المثلث AEC متقايس الأضلاع**

د. تعيين طبيعة التحويل RoH وعناصره المميزة

$$\begin{cases} H(M) = M_1 \\ R(M_1) = M' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = 2z \\ z' - z_C = e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}(z_1 - z_C) \end{cases} \Rightarrow z' - z_C = e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}(2z - z_C)$$

$$z' = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(2z + 2i) - 2i = \left(1 - \sqrt{3}i\right)(z + i) - 2i$$

$$z' = \left(1 - \sqrt{3}i\right)z + \sqrt{3} - i = \boxed{2e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}z + \sqrt{3} - i}$$

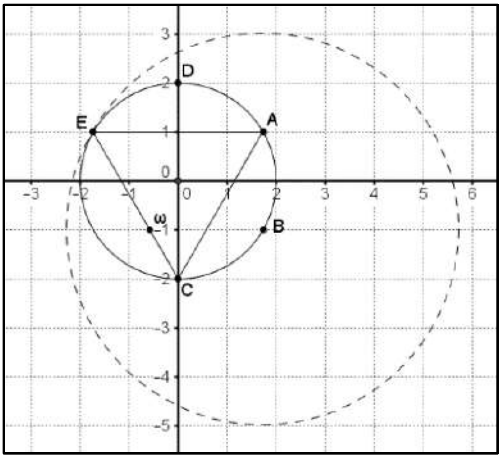
$$z_\omega = \frac{\sqrt{3} - i}{1 - \left(1 - \sqrt{3}i\right)} = \frac{\sqrt{3} - i}{\sqrt{3}i} = -\frac{\sqrt{3}}{3} - i$$

من العبارة المركّبة للتحويل RoH ، نستنتج أنّ هذا الأخير تشابه مباشر مركزه $\omega\left(-\frac{\sqrt{3}}{3};-1\right)$ نسبته 2 وزاويته $-\frac{\pi}{3}$

استنتاج صورة الدائرة (γ) بالتحويل RoH

$$RoH(O) = O' \Rightarrow z_{O'} = \left(1 - \sqrt{3}i\right)z_O + \sqrt{3} - i = \sqrt{3} - i = z_B$$

نستنتج أنّ صورة الدائرة (γ) بالتحويل RoH هي الدائرة (γ') التي مركزها B ونصف قطرها $r' = 2r = 4$.



* * *

حل التمرين 62.

1. **حل في مجموعة الأعداد المركّبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - 6z + 13 = 0$**

$\Delta = 4 - 24 = -16 = (4i)^2$; $z_1 = 3 - 2i$; $z_2 = 3 + 2i$

$\boxed{S = \{3 - 2i\,; 3 + 2i\}}$

2. **$a = 3 - 2i$ ، $b = 3 + 2i$ ، $c = 4i$**

أ. تعليم النقط A ، B و C (انظر الشكل في نهاية التمرين)

ب. بيان أنّ الرباعي $OABC$ متوازي أضلاع

$b - c = 3 - 2i = a \Rightarrow \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OA} \Rightarrow$ $\boxed{OABC \text{ متوازي أضلاع}}$

ج. تعيين لاحقة النقطة Ω مركز ثقل الرباعي $OABC$

النقطة Ω هي تقاطع القطرين $[OB]$ و$[AC]$ ، أي منتصف القطعة $[OB]$ ،

ومنه : $\boxed{z_\Omega = \frac{b}{2} = \frac{3}{2} + i}$

د. تعيين وإنشاء مجموعة النقط M من المستوي حيث :

$$\left\|\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = 12$$

$\left\|\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = 12 \Rightarrow 4\left\|\overrightarrow{M\Omega}\right\| = 12 \Rightarrow \boxed{\left\|\overrightarrow{M\Omega}\right\| = 3}$

منه نستنتج أنّ مجموعة النقط M هي الدائرة التي Ω مركزها ونصف قطرها 3

3. **لتكن M نقطة من المستقيم (AB). نرمز بـ β إلى الجزء التخيلي للاحقة النقطة M ولتكن N صورة النقطة M بالدوران الذي مركزه Ω وزاويته $\frac{\pi}{2}$**

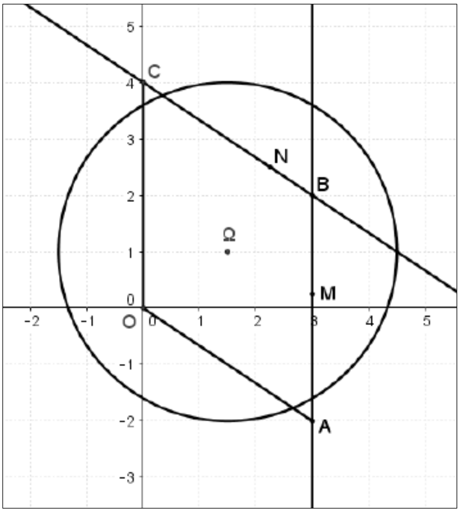
أ. بيان أنّ لاحقة النقطة N هي : $z_N = \frac{5}{2} - \beta + \frac{5}{2}i$

$M \in (AB) \Rightarrow M(3;\beta)$; $N = R(M) \Rightarrow z_N - z_\Omega = e^{i\frac{\pi}{2}}(z_M - z_\Omega)$

$$\Rightarrow z_N = i(z_M - z_\Omega) + z_\Omega = i\left(3 + i\beta - \frac{3}{2} - i\right) + \frac{3}{2} + i = \boxed{\frac{5}{2} - \beta + \frac{5}{2}i}$$

ب. تعيين قيمة β حتى تنتمي النقطة N إلى المستقيم (BC)

$$N \in (BC) \Rightarrow \overrightarrow{BN}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - \beta \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \parallel \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow -1 - 2\beta + \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow \boxed{\beta = \frac{1}{4}}$$



* * *

حل التمرين 63.

1. **حل في مجموعة الأعداد المركّبة $\mathbb{C}$ المعادلة :** $\boldsymbol{z^2+8\sqrt{3}z+64=0}$

$\Delta=-64=(8i)^2\,;z_1=-4\sqrt{3}-4i\,;z_2=-4\sqrt{3}+4i$

$\boxed{S=\{-4\sqrt{3}-4i\,;-4\sqrt{3}+4i\}}$

2. $\boldsymbol{z_B=-4\sqrt{3}+4i}$ ، $\boldsymbol{z_A=-4\sqrt{3}-4i}$

أ. **تعيين لاحقة النقطة $\boldsymbol{G}$ مرجح الجملة** $\boldsymbol{\{(O;1),(A;1),(B;-1)\}}$

$G\{(O;1),(A;1),(B;-1)\}\Rightarrow z_G=z_A-z_B=\boxed{-8i}$

ب. **تعيين طبيعة المجموعة $\boldsymbol{(C)}$ للنقط $\boldsymbol{M}$ من المستوي لاحقتها $\boldsymbol{z}$ والتي تحقق :**

$\boldsymbol{|z|^2+|z-z_A|^2-|z-z_B|^2=17}$

طريقة ① :

$|z|^2+|z-z_A|^2-|z-z_B|^2=17$

$|x+iy|^2+\left|\left(x+4\sqrt{3}\right)+i(y+4)\right|^2-\left|\left(x+4\sqrt{3}\right)+i(y-4)\right|^2=17$

$x^2+y^2+\left(x+4\sqrt{3}\right)^2+(y+4)^2-\left(x+4\sqrt{3}\right)^2-(y-4)^2=17$

$x^2+y^2+16y=17\Rightarrow\boxed{x^2+(y+8)^2=81}$

منه نستنتج أنّ المجموعة (C) هي الدائرة التي مركزها G ونصف قطرها 9

طريقة ② :

$|z|^2+|z-z_A|^2-|z-z_B|^2=17\Rightarrow OM^2+AM^2-BM^2=17$

$\Rightarrow\overrightarrow{OM}^2+\overrightarrow{AM}^2-\overrightarrow{BM}^2=17$

$\Rightarrow\left(\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GM}\right)^2+\left(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GM}\right)^2-\left(\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GM}\right)^2=17$

$$\Rightarrow \overrightarrow{GM}^2+\overrightarrow{OG}^2+\overrightarrow{AG}^2-\overrightarrow{BG}^2=17$$
$$\Rightarrow GM^2=17-OG^2-AG^2+BG^2$$
$$\Rightarrow GM^2=17-|z_G|^2-|z_G-z_A|^2+|z_G-z_B|^2$$
$$\Rightarrow GM^2=17-|-8i|^2-\left|4\sqrt{3}-4i\right|^2+\left|4\sqrt{3}-12i\right|^2$$
$$\Rightarrow GM^2=17-64-64+192=81\Rightarrow \boxed{GM=9}$$

منه نستنتج أنّ المجموعة (C) هي الدائرة التي مركزها G ونصف قطرها 9

* * *

حل التمرين 64.

1. $\boldsymbol{z_A=5-5i}$ **و** $\boldsymbol{z_B=5\sqrt{2}e^{-i\frac{7\pi}{12}}}$

أ. تعليم النقطة A (انظر الشكل في نهاية التمرين)

ب. كتابة z_A على الشكل الأسّي

$$z_A=5-5i=5\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\Rightarrow \boxed{z_A=5\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}$$

2. $\boldsymbol{T(M)=M'\Rightarrow z'=e^{-i\frac{\pi}{3}}z}$

أ. تعيين طبيعة التحويل T واذكر عناصره المميزة

التحويل T دوران مركزه O وزاويته $-\frac{\pi}{3}$

ب. بيان أنّ : $T(A)=B$

$$e^{-i\frac{\pi}{3}}z_A=e^{-i\frac{\pi}{3}}\times 5\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}=5\sqrt{2}e^{-i\frac{7\pi}{12}}=z_B\Rightarrow \boxed{T(A)=B}$$

ج. انشاء بعناية النقطة B (انظر الشكل في نهاية التمرين)

3. أ. كتابة $e^{-i\frac{\pi}{3}}$ على الشكل الجبري واستنتاج كتابة جبرية للعدد z_B

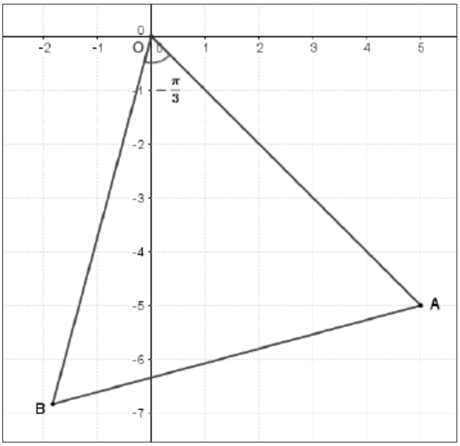
$$e^{-i\frac{\pi}{3}}=\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\boxed{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

$$z_B=e^{-i\frac{\pi}{3}}z_A=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(5-5i)=\boxed{\frac{5-5\sqrt{3}}{2}-\frac{5+5\sqrt{3}}{2}i}$$

ب. استنتاج القيمة المضبوطة لكل من العددين $\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)$

$$\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right)=\frac{\frac{5-5\sqrt{3}}{2}}{5\sqrt{2}}=\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\boxed{\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}}$$

$$\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)=\frac{\frac{-5-5\sqrt{3}}{2}}{5\sqrt{2}}=\frac{-1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\boxed{\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}}$$



* * *

<u>حل التمرين 65.</u>

1. **حل في مجموعة الأعداد المركّبة $\mathbb{C}$ كلا من المعادلتين :**

$$\boldsymbol{z^2-2z+5=0} \quad ؛ \quad \boldsymbol{z^2-2z+3+2i\sqrt{3}=0}$$

$$z^2-2z+5=0\ ;\ \Delta=-16=(4i)^2\ ;\boxed{S_1=\{1+2i\,;1-2i\}}$$

$$z^2-2z+3+2i\sqrt{3}=0\ ;\ \Delta=-8-8\sqrt{3}i$$

$$\Delta=(a+ib)^2=-8-8\sqrt{3}i\Rightarrow\begin{cases}a^2+b^2=16\\a^2-b^2=-8\\2ab=-8\sqrt{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^2=4\\ab=-4\sqrt{3}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=2\\b=-2\sqrt{3}\end{cases}\Rightarrow\Delta=\left(2-2i\sqrt{3}\right)^2$$

$$\boxed{S_2=\left\{2-i\sqrt{3}\,;\ i\sqrt{3}\right\}}$$

ملاحظة: يمكننا أيضا استعمال الجذر التربيعي الثاني لـ Δ وهو $\left(-2+2i\sqrt{3}\right)$

2. $\boldsymbol{z_A=1+2i}$ ، $\boldsymbol{z_B=1+\sqrt{3}+i}$ ، $\boldsymbol{z_C=1-2i}$ ، $\boldsymbol{z_D=2-i\sqrt{3}}$ ، $\boldsymbol{z_E=i\sqrt{3}}$.

أ. كتابة $\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}$ على الشكل الجبري

$$\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}=\frac{-\sqrt{3}-3i}{-\sqrt{3}+i}=\frac{\left(-\sqrt{3}-3i\right)\left(-\sqrt{3}-i\right)}{4}=\boxed{\sqrt{3}i}$$

استنتاج طبيعة المثلث ABC

$$\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}=\sqrt{3}i=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}\Rightarrow\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right)=\frac{\pi}{2}+2k\pi\Rightarrow\boxed{\text{المثلث } ABC \text{ قائم في } B}$$

ب. كتابة معادلة الدائرة (Γ) المحيطة بالمثلث ABC

بما أنّ الدائرة (Γ) محيطة بالمثلث ABC القائم في B ، فإنّ مركزها ω هو منتصف $[AC]$ ونصف قطرها $r = \frac{AC}{2}$.

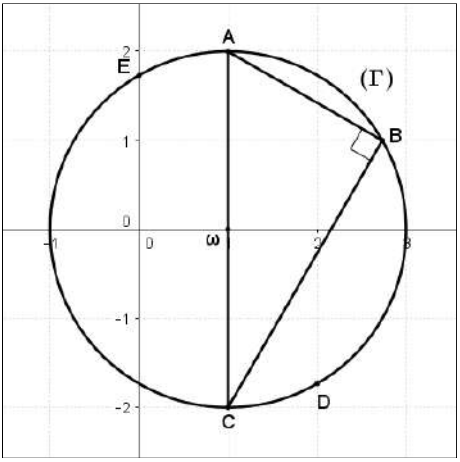
$$z_\omega = \frac{z_A + z_C}{2} = \frac{2}{2} = 1\ ; r = \frac{|z_C - z_A|}{2} = \frac{|-4i|}{2} = 2$$

$$M(x;y) \in (\Gamma) \Rightarrow \omega M^2 = r^2 \Rightarrow (x-1)^2 + y^2 = 4$$

$$\Rightarrow \boxed{x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0}$$

ج. انشاء الدائرة (Γ) والنقط E, D, C, B, A

نلاحظ أنّ : $|z_D - z_\omega| = |z_E - z_\omega| = 2$ ، أي إنّ النقطتين D وE تنتميان إلى الدائرة (Γ) ، وبالتالي تكون B النقطة من (Γ) التي ترتيبها 1 وفاصلتها موجبة وD النقطة من (Γ) التي فاصلتها 2 وترتيبها سالب أمّا E فهي النقطة من (Γ) التي فاصلتها معدومة وترتيبها موجب (تنتمي إلى محور التراتيب).



* * *

حل التمرين 66.

$$z_B = 1 - i\sqrt{3} \text{ ، } z_0 = 1 + i\sqrt{3} \text{ ، } f(M) = M' \Rightarrow 2z' = \left(1 + i\sqrt{3}\right)z - 2$$

1. كتابة العدد z_0 على الشكل المثلثي

$$z_0 = 1 + i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \boxed{2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)}$$

تعيين العددين الحقيقيين b و θ حيث : $z' = e^{i\theta}z + b$

$$2z' = \left(1 + i\sqrt{3}\right)z - 2 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}z - 2 \Rightarrow z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z - 1 \Rightarrow \boxed{b = -1; \theta = \frac{\pi}{3}}$$

2. استنتاج طبيعة التحويل f والعناصر المميزة له

$$a=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\ ;b=-1\ ;\ z_\omega=\frac{b}{1-a}=\frac{-1}{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

منه نستنتج أنّ التحويل f دوران مركزه $\omega\left(-\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ وزاويته $\theta=\frac{\pi}{3}$

3. كتابة العبارة التحليلية للتحويل f

$$f(M)=M'\Rightarrow \boxed{z'-z_\omega=e^{i\frac{\pi}{3}}(z-z_\omega)}$$

4. تعيين B' صورة النقطة B بواسطة التحويل f

$$f(B)=B'\Rightarrow z_{B'}=e^{i\frac{\pi}{3}}z_B-1=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(1-i\sqrt{3}\right)-1\Rightarrow \boxed{z_{B'}=1}$$

5. التحقق أنّ $f=t_{\vec{u}}\ o\ r$

لتكن $z_{\vec{u}}$ لاحقة الشعاع $\vec{u}$ ، لدينا :

$$t_{\vec{u}}\ o\ r(M)=t_{\vec{u}}\,[r(M)]=t_{\vec{u}}(M_1)=M'$$

$$\begin{cases} r(M)=M_1 \\ t_{\vec{u}}(M_1)=M' \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} z_1=e^{i\frac{\pi}{3}}z \\ z'=z_1+z_{\vec{u}} \end{cases}\Rightarrow z'=e^{i\frac{\pi}{3}}z+z_{\vec{u}}=e^{i\frac{\pi}{3}}z-1$$

منه نستنتج أنّ f تركيب دوران مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{3}$ وانسحاب شعاعه $\vec{u}(-1;0)$.

* * *

حل التمرين 67.

1. حل في مجموعة الأعداد المركّبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-2\sqrt{3}z+4=0$

$$z^2-2\sqrt{3}z+4=0\ ;\ \Delta'=-4=(2i)^2\ ;\ z_1=\sqrt{3}-i\ ;\ z_2=\sqrt{3}+i$$

$$\boxed{S=\left\{\sqrt{3}-i\ ;\ \sqrt{3}+i\right\}}$$

2. $z_A=\sqrt{3}-i$ ، $z_B=\sqrt{3}+i$ ، $z_C=\frac{z_B}{2}$

أ. كتابة z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسّي

$$z_A=\sqrt{3}-i=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)\Rightarrow \boxed{z_A=2e^{-i\frac{\pi}{6}}\ ;\ z_B=2e^{i\frac{\pi}{6}}\ ;\ z_C=e^{i\frac{\pi}{6}}}$$

ب. حساب OA ، OB ، AB

$$OA=|z_A|=2\ ;\ OB=|z_B|=2\ ;\ AB=|z_B-z_A|=|2i|=2$$

استنتاج طبيعة المثلث OAB

$$OA=OB=AB\Rightarrow \boxed{\text{المثلث } OAB \text{ متقايس الأضلاع}}$$

3. نسمي D صورة C بالدوران الذي مركزه O وزاويته $-\frac{\pi}{2}$ ، ونسمي E صورة D بالانسحاب الذي شعاعه $2\vec{j}$

أ. بيان أنّ لاحقة E هي $z_E = \frac{1}{2}\left[1 + \left(4 - \sqrt{3}\right)i\right]$

$$D = R(C) \Rightarrow z_D = e^{-i\frac{\pi}{2}} z_C = e^{-i\frac{\pi}{2}} \times e^{i\frac{\pi}{6}} = e^{-i\frac{\pi}{3}} \Rightarrow \boxed{z_D = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i}$$

$$E = T(D) \Rightarrow z_E = z_D + 2i = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i + 2i \Rightarrow \boxed{z_E = \frac{1}{2}\left[1 + \left(4 - \sqrt{3}\right)i\right]}$$

ب. بيان أنّ $OE = AD = \sqrt{5 - 2\sqrt{3}}$

$$OE = |z_E| = \frac{1}{2}\left|1 + \left(4 - \sqrt{3}\right)i\right| = \frac{1}{2}\sqrt{1 + 19 - 8\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\sqrt{4\left(5 - 2\sqrt{3}\right)}$$

$$\boxed{OE = \sqrt{5 - 2\sqrt{3}}}$$

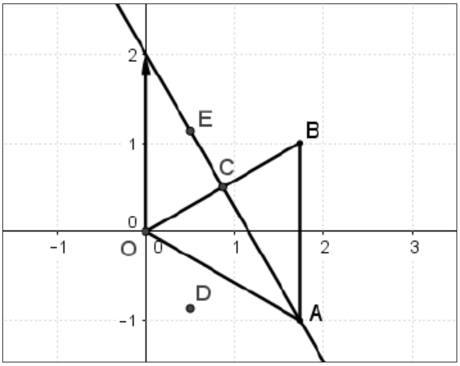
$$AD = |z_D - z_A| = \left|\frac{1 - 2\sqrt{3}}{2} + \frac{2 - \sqrt{3}}{2} i\right| = \frac{1}{2}\sqrt{\left(1 - 2\sqrt{3}\right)^2 + \left(2 - \sqrt{3}\right)^2}$$

$$AD = \frac{1}{2}\sqrt{13 - 4\sqrt{3} + 7 - 4\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\sqrt{4\left(5 - 2\sqrt{3}\right)} \Rightarrow \boxed{AD = \sqrt{5 - 2\sqrt{3}}}$$

4. بيان أنّ النقط A ، C ، E في استقامية

$$\frac{z_C - z_A}{z_E - z_A} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i - \sqrt{3} + i}{\frac{1}{2}\left[1 + \left(4 - \sqrt{3}\right)i\right] - \sqrt{3} + i} = \frac{6 + \sqrt{3}}{11}$$

$$\frac{z_C - z_A}{z_E - z_A} \in \mathbb{R} \Rightarrow \boxed{\text{النقط } E, C, A \text{ في استقامية}}$$



حل التمرين 68.

$z_1 = [r_1, \theta_1]$ ، $z_2 = [r_2, \theta_2]$ ، $z_3 = [r_3, \theta_3]$

1. ايجاد الأعداد المركبة z_1 ، z_2 ، z_3 :

طريقة أولى:

$$\begin{cases} z_1 \times z_2 \times z_3 = 4\sqrt{2}(1+i) \\ \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 3\theta_2 \\ r_1 \times r_2 \times r_3 = r_2^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (r_1 \times r_2 \times r_3)e^{(\theta_1+\theta_2+\theta_3)i} = 8e^{i\frac{\pi}{4}} \\ \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 3\theta_2 \\ r_1 \times r_2 \times r_3 = r_2^3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow r_2^3 e^{i(3\theta_2)} = 8e^{i\frac{\pi}{4}} \Rightarrow \begin{cases} r_2^3 = 8 \\ 3\theta_2 = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_2 = 2 \\ \theta_2 = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{2k\pi}{3} \end{cases}$$

$$0 < \theta_1 < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \theta_1 + \frac{\pi}{2} < \pi \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \theta_2 < \pi \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} < \pi$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{1}{12} + \frac{2k}{3} < 1 \Rightarrow k = 1 \Rightarrow \theta_2 = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \boxed{\theta_2 = \frac{3\pi}{4}}$$

$$\begin{cases} r_1 = \dfrac{r_2}{q} = \dfrac{2}{2} = 1 \\ \theta_1 = \theta_2 - r = \dfrac{3\pi}{4} - \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{4} \end{cases} ; \begin{cases} r_3 = r_2 \times q = 2 \times 2 = 4 \\ \theta_3 = \theta_2 + r = \dfrac{3\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{5\pi}{4} \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{gathered} z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \ ; \ z_2 = 2e^{i\frac{3\pi}{4}} = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i \\ z_3 = 4e^{i\frac{5\pi}{4}} = -2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i \end{gathered}}$$

طريقة ثانية:

$$\begin{cases} z_1 \times z_2 \times z_3 = 4\sqrt{2}(1+i) \\ \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \theta_1 + \theta_1 + \dfrac{\pi}{2} + \theta_1 + \pi \\ r_1 \times r_2 \times r_3 = r_1 \times 2r_1 \times 4r_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (r_1 \times r_2 \times r_3)e^{(\theta_1+\theta_2+\theta_3)i} = 8e^{i\frac{\pi}{4}} \\ \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 3\theta_1 + \dfrac{3\pi}{2} \\ r_1 \times r_2 \times r_3 = 8r_1^3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 8r_1^3 e^{i\left(3\theta_1 + \frac{3\pi}{2}\right)} = 8e^{i\frac{\pi}{4}} \Rightarrow \begin{cases} 8r_1^3 = 8 \\ 3\theta_1 + \dfrac{3\pi}{2} = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_1 = 1 \\ \theta_1 = -\dfrac{5\pi}{12} + \dfrac{2k\pi}{3} \end{cases}$$

$$0 < \theta_1 < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < -\frac{5\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < -\frac{5}{12} + \frac{2k}{3} < \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 0{,}6 < k < 1{,}4 \Rightarrow k = 1 \Rightarrow \theta_1 = -\frac{5\pi}{12} + \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \boxed{\theta_1 = \frac{\pi}{4}}$$

$$\begin{cases} r_2 = r_1 \times q = 1 \times 2 = 2 \\ \theta_2 = \theta_1 + r = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{3\pi}{4} \end{cases} ; \begin{cases} r_3 = r_1 \times q^2 = 1 \times 2^2 = 4 \\ \theta_3 = \theta_1 + 2r = \dfrac{\pi}{4} + \pi = \dfrac{5\pi}{4} \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} i \ ; \ z_2 = 2e^{i\frac{3\pi}{4}} = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i \\ z_3 = 4e^{i\frac{5\pi}{4}} = -2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i \end{array}}$$

2. انشاء النقط A ، B و C واستنتاج $\|\overrightarrow{OA}\|$، $\|\overrightarrow{OB}\|$، $\|\overrightarrow{OC}\|$

$$\|\overrightarrow{OA}\| = |z_1| = 1 \ ; \ \|\overrightarrow{OB}\| = |z_2| = 2 \ ; \ \|\overrightarrow{OC}\| = |z_3| = 4$$

3. تعيين مجموعة النقط M التي تحقق: $OA^2 + OB^2 + OC^2 + OM^2 = 22$

$$OA^2 + OB^2 + OC^2 + OM^2 = 22 \Rightarrow 1 + 4 + 16 + OM^2 = 22 \Rightarrow OM^2 = 1$$

مجموعة النقط M هي الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها 1

4. كتابة العدد المركب L على الشكل الجبري

$$L = \frac{z + z_2}{z} = \frac{x + iy - \sqrt{2} + \sqrt{2}i}{x + iy} = \frac{(x - \sqrt{2}) + (y + \sqrt{2})i}{x + iy}$$

$$L = \frac{\left[(x - \sqrt{2}) + (y + \sqrt{2})i\right](x - iy)}{x^2 + y^2}$$

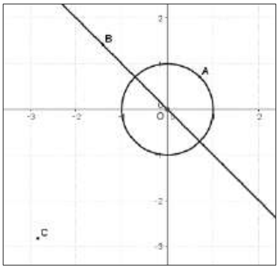
$$L = \frac{\left[x(x - \sqrt{2}) + y(y + \sqrt{2})\right] + \left[x(y + \sqrt{2}) - y(x - \sqrt{2})\right]i}{x^2 + y^2}$$

$$\boxed{L = \frac{x^2 + y^2 - \sqrt{2}x + \sqrt{2}y}{x^2 + y^2} + \frac{\sqrt{2}x + \sqrt{2}y}{x^2 + y^2} i}$$

5. تعيين مجموعة النقط حتى يكون العدد L حقيقيا

$$L \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{2}x + \sqrt{2}y = 0 \\ x^2 + y^2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -x \\ (x; y) \neq (0; 0) \end{cases}$$

مجموعة النقط حتى يكون العدد L حقيقيا هي المستقيم ذي المعادلة $y = -x$ (المنصّف الثاني) باستثناء المبدأ.



* * *

حل التمرين 69.

1. تعيين الجذرين التربيعيين للعدد $w=-32+24i$

$$w=(x+iy)^2\Rightarrow\begin{cases}x^2+y^2=40\\x^2-y^2=-32\\2xy=24\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2=4\\y=\dfrac{12}{x}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2\\y=6\end{cases}\text{ أو }\begin{cases}x=-2\\y=-6\end{cases}$$

$$\boxed{w_1=2+6i\,;w_2=-2-6i}$$

2. $P(z)=z^3+(5i-6)z^2+(9-24i)z+13i+18$

أ. بيان أنّ $-i$ هو جذر لـ $P(z)$

$$P(-i)=i-5i+6-9i-24+13i+18=\boxed{0}$$

ب. تعيين الأعداد a ، b ، c حيث : $P(z)=(z+i)(az^2+bz+c)$

	1	$-6+5i$	$9-24i$	$18+13i$
$-i$				
	1	$-6+4i$	$13-18i$	0

$$\boxed{P(z)=(z+i)(z^2+(-6+4i)z+13-18i)}$$

ج. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z)=0$

$$z+i=0\Rightarrow z_0=-i$$

$$z^2+(-6+4i)z+13-18i=0$$

$$\Delta=(-6+4i)^2-4(13-18i)=-32+24i\Rightarrow\sqrt{\Delta}=2+6i$$

$$z_1=\frac{6-4i-2-6i}{2}=2-5i\,;\;z_2=\frac{6-4i+2+6i}{2}=4+i$$

$$\boxed{S=\{-i\,;2-5i\,;4+i\}}$$

3. $z_A=-i$ ، $z_B=2-5i$ ، $z_C=4+i$

أ. كتابة العدد المركّب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ على الشكلين الجبري والمثلثي

$$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{4+2i}{2-4i}=\frac{2+i}{1-2i}=\frac{(2+i)(1+2i)}{5}=\frac{5i}{5}=\boxed{i}$$

$$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\boxed{\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}}$$

استنتاج طبيعة المثلث ABC

$$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=i\Rightarrow\begin{cases}AB=AC\\(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=\dfrac{\pi}{2}\end{cases}\Rightarrow\boxed{\text{المثلث } ABC \text{ قائم في } A \text{ ومتساوي الساقين}}$$

ب. تعيين طبيعة التحويل T الذي يحقق $T(A)=A$ و $T(C)=B$ ، وذكر عناصره المميزة

طريقة ①:

$$\begin{cases}T(A)=A\\T(C)=B\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}z_A=az_A+b\\z_B=az_C+b\end{cases}\Rightarrow z_A-z_B=a(z_A-z_C)$$

$$\Rightarrow a=\frac{z_A-z_B}{z_A-z_C}=\frac{-2+4i}{-4-2i}=\frac{1-2i}{2+i}=-i=\boxed{e^{-i\frac{\pi}{2}}}$$

منه نستنتج أنّ التحويل T دوران مركزه A وزاويته $-\frac{\pi}{2}$

طريقة ②:

$$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=i\Rightarrow\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=\frac{1}{i}=-i\Rightarrow\boxed{(z_B-z_A)=e^{-i\frac{\pi}{2}}(z_C-z_A)}$$

منه نستنتج أنّ التحويل T الذي مركزه A ويحوّل C إلى B هو دوران زاويته $-\frac{\pi}{2}$

* * *

حل التمرين 70.

$$\boldsymbol{P(z)=z^4+2z^3+5z^2+2z+4}$$

1. بيان أنّ المعادلة $P(z)=0$ تقبل حلين تخيليين صرفين

$$z=iy\,;P(z)=0\Rightarrow(iy)^4+2(iy)^3+5(iy)^2+2(iy)+4=0$$

$$\Rightarrow y^4-2iy^3-5y^2+2iy+4=0\Rightarrow\begin{cases}y^4-5y^2+4=0\\2iy(-y^2+1)=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow y=1 \text{ أو } y=-1\Rightarrow z_0=i\,;z_1=-i$$

حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z)=0$

$$P(z)=(z+i)(z-i)(az^2+bz+c)=(z^2+1)(az^2+bz+c)$$

$$\begin{array}{r|l}
z^4+2z^3+5z^2+2z+4 & z^2+1\\ \cline{2-2}
-z^4-z^2 & z^2+2z+4\\
2z^3+4z^2+2z+4 & \\
-2z^3-2z & \\
4z^2+4 & \\
-4z^2-4 & \\
0 &
\end{array}$$

$$P(z)=(z^2+1)(z^2+2z+4)$$

$$z^2+1=0\Rightarrow z_0=i\,;z_1=-i$$

$$z^2+2z+4=0\,;\ \Delta=-12=\left(2\sqrt{3}i\right)^2;z_2=-1+\sqrt{3}i\,;z_3=-1-\sqrt{3}i$$

$$\boxed{S=\left\{i\;;\;-i\;;-1+\sqrt{3}i\;;-1-\sqrt{3}i\right\}}$$

.2 $z_A=i$ ، $z_B=\overline{z_A}$ ، $z_C=-1+\sqrt{3}i$ ، $z_D=\overline{z_C}$ ، I منتصف $[CD]$

أ. كتابة العدد $L=\frac{z_A-z_I}{z_B-z_I}$ على الشكل الأسيّ

$$z_I=\frac{z_C+z_D}{2}=-1\;;\;L=\frac{z_A-z_I}{z_B-z_I}=\frac{1+i}{1-i}=i=\boxed{e^{i\frac{\pi}{2}}}$$

استنتاج طبيعة المثلث ABI

$$\frac{z_A-z_I}{z_B-z_I}=e^{i\frac{\pi}{2}}\Rightarrow\begin{cases}IA=IB\\ \left(\overrightarrow{IB};\overrightarrow{IA}\right)=\frac{\pi}{2}\end{cases}\Rightarrow\boxed{\text{المثلث } ABI \text{ قائم في } I \text{ ومتساوي الساقين}}$$

ب. تعيين المركز Ω ونصف القطر r للدائرة (γ) المحيطة بالمثلث ABI

بما أنّ الدائرة (γ) محيطة بالمثلث ABI ، فإنّ Ω هي منتصف $[AB]$ و $r=\frac{AB}{2}$

$$z_\Omega=\frac{z_A+z_B}{2}=0\Rightarrow\boxed{\Omega=O}\;;\;r=\frac{AB}{2}=\frac{|z_B-z_A|}{2}=\frac{|-2i|}{2}=\boxed{1}$$

.3 R دوران مركزه I وزاويته $\frac{\pi}{2}$، وH التحاكي الذي يحوّل A إلى C و B إلى D

أ. تعيين عبارة التحويلين R و H

$$R(M)=M'\Rightarrow z'-z_I=e^{i\frac{\pi}{2}}(z-z_I)\Rightarrow z'=i(z+1)-1$$

$$\Rightarrow\boxed{z'=iz-1+i}$$

$$\begin{cases}H(A)=C\\H(B)=D\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}z_C=az_A+b\\z_D=az_B+b\end{cases}\Rightarrow a=\frac{z_C-z_D}{z_A-z_B}=\frac{2\sqrt{3}i}{2i}=\sqrt{3}$$

$$z_C=az_A+b\Rightarrow b=z_C-az_A=-1+\sqrt{3}i-\sqrt{3}i=-1$$

$$H(M)=M'\Rightarrow\boxed{z'=\sqrt{3}z-1}$$

ب. تعيين طبيعة التحويل HoR محددا عبارته وعناصره المميزة

$$HoR(M)=H[R(M)]=H(M_1)=M'\Rightarrow\begin{cases}z_1=iz-1+i\\z'=\sqrt{3}z_1-1\end{cases}$$

$$z'=\sqrt{3}iz-1+i-1\Rightarrow\boxed{z'=\sqrt{3}iz-2+i}$$

$$z_\omega=\frac{b}{1-a}=\frac{-2+i}{1-\sqrt{3}i}=\frac{(-2+i)\left(1+\sqrt{3}i\right)}{4}=\boxed{\frac{-2-\sqrt{3}}{4}+\frac{1-2\sqrt{3}}{4}i}$$

منه نستنتج أنّ التحويل HoR تشابه مباشر مركزه ω نسبته $\sqrt{3}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$

ج. تعيين بطريقتين معادلة (γ') صورة (γ) بالتحويل HoR وإنشاء (γ')

طريقة ①: استعمال خواص التشابه المباشر

بما أنّ (γ) دائرة مركزها O ونصف قطرها 1 ، فإنّ (γ') دائرة مركزها O' ونصف قطرها $r'=\sqrt{3}$ ، حيث $O'=HoR(O)$

$$O' = HoR(O) \Rightarrow z_{O'} = \sqrt{3}iz_O - 2 + i = -2 + i \Rightarrow \boxed{O'(-2\,;1)}$$

$$M(x;y) \in (\gamma') \Rightarrow O'M^2 = r'^2 \Rightarrow (x+2)^2 + (y-1)^2 = 3$$

$$\Rightarrow \boxed{x^2 + y^2 + 4x - 2y + 2 = 0}$$

طريقة ②: استعمال العبارة المركّبة للتشابه المباشر

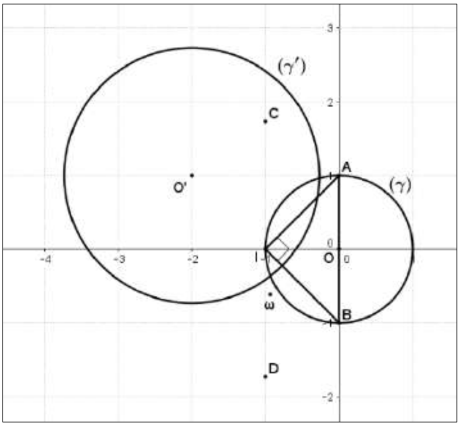
$$M(x;y) \in (\gamma) \Rightarrow OM^2 = r^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$$

$$z' = \sqrt{3}iz - 2 + i \Rightarrow x' + iy' = \sqrt{3}i(x+iy) - 2 + i$$

$$= \left(-\sqrt{3}y - 2\right) + \left(\sqrt{3}x + 1\right)i \Rightarrow \begin{cases} x' = -\sqrt{3}y - 2 \\ y' = \sqrt{3}x + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{-x' - 2}{\sqrt{3}} \\ x = \dfrac{y' - 1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow \left(\frac{y'-1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{-x'-2}{\sqrt{3}}\right)^2 = 1 \Rightarrow (x'+2)^2 + (y'-1)^2 = 3$$

$$\Rightarrow \boxed{x'^2 + y'^2 + 4x' - 2y' + 2 = 0 \ldots (\gamma')}$$



* * *

حل التمرين 71.

$$\boldsymbol{z = \frac{4+4i}{1 - i\sqrt{3}}}$$

1. كتابة z على الشكل الجبري ، ثمّ على الشكل المثلثي

$$z = \frac{4+4i}{1-i\sqrt{3}} = \frac{(4+4i)(1+i\sqrt{3})}{4} = (1+i)\left(1+i\sqrt{3}\right)$$

$$= \boxed{\left(1-\sqrt{3}\right) + \left(1+\sqrt{3}\right)i}$$

$$z=\frac{4+4i}{1-i\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)}{2\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}=\frac{4\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{2e^{-i\frac{\pi}{3}}}=2\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$$

$$=\boxed{2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right)}$$

.2 كتابة على الشكل الأسّي الأعداد : z^{2018} ، $\bar{z}$ ، $\frac{1}{z}$

$$z=2\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}\Rightarrow z^{2018}=\left(2\sqrt{2}\right)^{2018}e^{i\frac{2018\times7\pi}{12}}=2^{3027}e^{i\frac{7063\pi}{6}}$$

$$=\boxed{2^{3027}e^{i\frac{7\pi}{6}}}$$

$$z=2\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}\Rightarrow\boxed{\bar{z}=2\sqrt{2}e^{-i\frac{7\pi}{12}}}$$

$$z=2\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}\Rightarrow\frac{1}{z}=\frac{1}{2\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}}=\boxed{\frac{\sqrt{2}}{4}e^{-i\frac{7\pi}{12}}}$$

.3 استنتاج القيمة المضبوطة للعددين : $\cos\left(\frac{19\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{19\pi}{12}\right)$

$$\cos\frac{7\pi}{12}=\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\Rightarrow\cos\frac{19\pi}{12}=\boxed{-\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}}$$

$$\sin\frac{7\pi}{12}=\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\Rightarrow\sin\frac{19\pi}{12}=\boxed{-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}$$

$$\left(\frac{19\pi}{12}=\pi+\frac{7\pi}{12}\Rightarrow\cos\frac{19\pi}{12}=-\cos\frac{7\pi}{12}\ ;\ \sin\frac{19\pi}{12}=-\sin\frac{7\pi}{12}\right)$$

* * *

حل التمرين 72.

.1 حل في مجموعة الأعداد المركّبة ℂ المعادلة : $z^2-2z+2=0$

$$\Delta=-4=(2i)^2\,;z_1=1+i\,;z_2=1-i\,;\ \boxed{S=\{1+i\,;1-i\}}$$

.2 تمثيل النقط K ، L ، M حيث : $z_K=1+i$ ، $z_L=1-i$ و $z_M=-i\sqrt{3}$
(انظر الشكل في نهاية التمرين)

.3 أ. التحقق أنّ : $z_N=2+i(\sqrt{3}-2)$

$$z_N+z_M=2z_L\Rightarrow z_N=2z_L-z_M=2-2i+i\sqrt{3}=\boxed{2+i(\sqrt{3}-2)}$$

ب. تعيين اللاحقتين z_A و z_C

$$r(M) = A \Rightarrow z_A = e^{i\frac{\pi}{2}} \times z_M = i\left(-i\sqrt{3}\right) \Rightarrow \boxed{z_A = \sqrt{3}}$$

$$r(N) = C \Rightarrow z_C = e^{i\frac{\pi}{2}} \times z_N = i\left[2 + i(\sqrt{3} - 2)\right] \Rightarrow \boxed{z_C = 2 - \sqrt{3} + 2i}$$

ج. تعيين اللاحقتين z_D و z_B

$$t(M) = D \Rightarrow z_D = z_M + 2i \Rightarrow \boxed{z_D = \left(2 - \sqrt{3}\right)i}$$

$$t(N) = B \Rightarrow z_B = z_N + 2i \Rightarrow \boxed{z_B = 2 + i\sqrt{3}}$$

4. أ. بيان أنّ النقطة K منتصف القطعة $[DB]$ هي منتصف القطعة $[AC]$

$$\frac{z_A + z_C}{2} = \frac{2 + 2i}{2} = 1 + i = z_K \Rightarrow \boxed{K \text{ منتصف القطعة } [AC]}$$

ب. بيان أنّ $\frac{z_C - z_K}{z_B - z_K} = i$

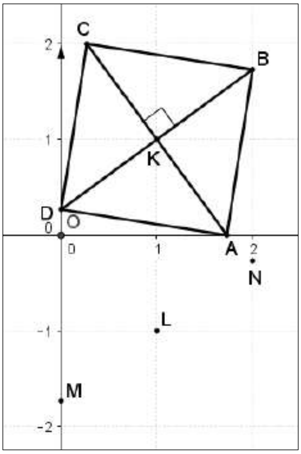
$$\frac{z_C - z_K}{z_B - z_K} = \frac{2 - \sqrt{3} + 2i - 1 - i}{2 + i\sqrt{3} - 1 - i} = \frac{1 - \sqrt{3} + i}{1 + i\left(\sqrt{3} - 1\right)}$$

$$= \frac{\left[1 - \sqrt{3} + i\right]\left[1 - i\left(\sqrt{3} - 1\right)\right]}{1 + \left(\sqrt{3} - 1\right)^2} = \frac{\left(5 - 2\sqrt{3}\right)i}{5 - 2\sqrt{3}} = \boxed{i}$$

استنتاج طبيعة الرباعي $ABCD$

$$\frac{z_C - z_K}{z_B - z_K} = i \Rightarrow \begin{cases} KC = KB \\ \left(\overrightarrow{KB}; \overrightarrow{KC}\right) = \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\text{المثلث } KBC \text{ قائم في } K \text{ ومتساوي الساقين}}$$

القطران $[AC]$ و$[BD]$ متناصفان في K (حسب 4.أ) ، متقايسان ومتعامدان (حسب 4.ب) ومنه نستنتج أنّ الرباعي $ABCD$ مربّع.



حل التمرين 73.

$$\boldsymbol{P(z) = z^3 - (5+i)z^2 + (10+6i)z - 8 - 16i}$$

1. بيان أنّ المعادلة $P(z) = 0$ تقبل حلا تخيليا صرفا z_0 يُطلب تعيينه

$$z_0 = iy\,; P(z_0) = 0 \Rightarrow (iy)^3 - (5+i)(iy)^2 + (10+6i)iy - 8 - 16i = 0$$

$$\Rightarrow -iy^3 + 5y^2 + iy^2 + 10iy - 6y - 8 - 16i = 0$$

$$\Rightarrow (5y^2 - 6y - 8) - (y^3 - y^2 - 10y + 16)i = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5y^2 - 6y - 8 \\ y^3 - y^2 - 10y + 16 = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 2 \Rightarrow \boxed{z_0 = 2i}$$

2. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z) = 0$

	1	$-5-i$	$10+6i$	$-8-16i$
$2i$				
	1	$-5+i$	$8-4i$	0

$$P(z) = 0 \Rightarrow (z - 2i)[z^2 - (5-i)z + 8 - 4i] = 0$$

$$z - 2i = 0 \Rightarrow z_0 = 2i$$

$$z^2 - (5-i)z + 8 - 4i = 0\,;\ \Delta = (5-i)^2 - 4(8-4i) = -8 + 6i$$

$$\Delta = (x+iy)^2 \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x^2 - y^2 = -8 \\ 2xy = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ y = \dfrac{3}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\Delta = (1+3i)^2}$$

$$z_1 = \frac{5 - i - 1 - 3i}{2} = 2 - 2i\,;\ z_2 = \frac{5 - i + 1 + 3i}{2} = 3 + i$$

$$\boxed{S = \{2i\,; 2 - 2i\,; 3 + i\}}$$

3. $z_0 = 2i$ ، $z_1 = 2 - 2i$ و $z_2 = 3 + i$

أ. كتابة العددين z_0 و z_1 على الشكل المثلثي والشكل الأسيّ

$$z_0 = 2i = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$z_1 = 2 - 2i = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 2\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$= 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

ب. كتابة العددين $\left(\frac{z_0}{2}\right)^{1429}$ و $\left(\frac{z_1}{2\sqrt{2}}\right)^{2008}$ على الشكل الجبري

$$\left(\frac{z_0}{2}\right)^{1429} = e^{i\frac{1429\pi}{2}} = e^{i\left(714\pi + \frac{\pi}{2}\right)} = e^{i\frac{\pi}{2}} = \boxed{i}$$

$$\left(\frac{z_1}{2\sqrt{2}}\right)^{2008} = e^{-i\frac{2008\pi}{4}} = e^{-i502\pi} = e^0 = \boxed{1}$$

4. $\alpha = \frac{z_2 - 2 + (\sqrt{3} - 1)i}{z_1}$

أ. تعيين طويلة وعمدة العدد المركّب α

$$\alpha=\frac{z_2-2+\left(\sqrt{3}-1\right)i}{z_1}=\frac{1+\sqrt{3}i}{2-2i}=\frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$$

$$\boxed{|\alpha|=\frac{\sqrt{2}}{2}\ ;\arg(\alpha)=\frac{7\pi}{12}}$$

ب. كتابة العدد α على الشكل الجبري واستنتاج كل من $\sin\frac{7\pi}{12}$ و $\cos\frac{7\pi}{12}$

$$\alpha=\frac{1+\sqrt{3}i}{2-2i}=\frac{\left(1+\sqrt{3}i\right)(2+2i)}{8}=\boxed{\frac{1-\sqrt{3}}{4}+\frac{1+\sqrt{3}}{4}i}$$

$$\sin\frac{7\pi}{12}=\frac{\frac{1+\sqrt{3}}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\boxed{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}\ \ ;\ \ \cos\frac{7\pi}{12}=\frac{\frac{1-\sqrt{3}}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\boxed{\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}}$$

* * *

حل التمرين 74.

$z_A=1+2i$ ،$z_B=1+\sqrt{3}+i$ ، $z_C=\overline{z_A}$ ،$z_D=\overline{z_B}$.

1. أ. تعليم النقطتين A و C (انظر الشكل في نهاية التمرين)

ب. حساب كل من $|z_A-z_B|$ ، $|z_A-z_C|$ و $|z_B-z_C|$

$$|z_A-z_B|=\left|-\sqrt{3}+i\right|=\boxed{2}$$

$$|z_A-z_C|=|4i|=\boxed{4}$$

$$|z_B-z_C|=\left|\sqrt{3}+3i\right|=\boxed{2\sqrt{3}}$$

ج. استنتاج طبيعة المثلث ABC

$$AB^2+BC^2=AC^2\Rightarrow\boxed{\text{المثلث } ABC \text{ قائم في } B}$$

2. أ. كتابة العدد المركّب $\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}$ على الشكل الجبري ثمّ على الشكل المثلثي

$$\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}=\frac{-\sqrt{3}+i}{-\sqrt{3}-3i}=\frac{\left(-\sqrt{3}+i\right)\left(-\sqrt{3}+3i\right)}{12}=-\frac{\sqrt{3}}{3}i=-\frac{\sqrt{3}}{3}e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

ب. استنتاج مرة أخرى طبيعة المثلث ABC

$$\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}=-\frac{\sqrt{3}}{3}e^{-i\frac{\pi}{2}}\Rightarrow\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}\right)=-\frac{\pi}{2}\Rightarrow\boxed{\text{المثلث } ABC \text{ قائم في } B}$$

3. (γ) هي الدائرة المحيطة بالمثلث ABC

أ. التحقق أنّه إذا كانت z لاحقة نقطة M من (γ) فإنّ : $z=1+2e^{i\theta}$

لتكن النقطة ω مركز الدائرة (γ) و r نصف قطرها. لدينا :

$$z_\omega = \frac{z_A + z_C}{2} = \boxed{1}\,; r = \frac{AC}{2} = \frac{|z_C - z_A|}{2} = \frac{|-4i|}{2} = \boxed{2}$$

$$M(z) \in (\gamma) \Rightarrow \omega M = r \Rightarrow |z - z_\omega| = r \Rightarrow |z - 1| = 2 \Rightarrow z - 1 = 2e^{i\theta}$$

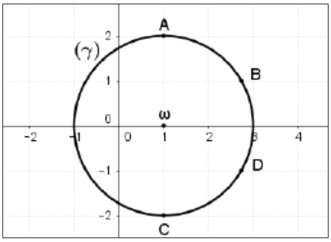
$$\Rightarrow \boxed{z = 1 + 2e^{i\theta}}\,;\ \theta \in \mathbb{R}$$

ب. التحقق أنّ D نقطة من الدائرة (γ)

$$|z_D - z_\omega| = \left|\sqrt{3} - i\right| = 2 \Rightarrow \boxed{D \in (\gamma)}$$

ج. انشاء النقطتين B و D

D هي النقطة من الدائرة (γ) التي ترتيبها $1-$ وفصيلتها موجبة ، أمّا النقطة B فهي نظيرتها بالنسبة لمحور الفواصل.



* * *

حل التمرين 75.

1. نعتبر في مجموعة الأعداد المركّبة $\mathbb{C}$ ، كثير الحدود $P(z)$ حيث :

$$P(z) = z^3 - 4z^2 + 6z - 4$$

أ. بيان أنّ المعادلة $P(z) = 0$ لا تقبل حلا تخيليا صرفا

$$P(iy) = 0 \Rightarrow (iy)^3 - 4(iy)^2 + 6(iy) - 4 = 0$$

$$\Rightarrow (4y^2 - 4) + (6 - y^2)iy = 0 \Rightarrow \begin{cases} 4y^2 - 4 = 0 \\ y(6 - y^2) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y \in \{-1\,;1\} \\ y \in \{0; -\sqrt{6}\,; \sqrt{6}\} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\text{المعادلة } P(z) = 0 \text{ لا تقبل حلا تخيليا صرفا}}$$

ب. تعيين العددين الحقيقيين a و b حيث : $P(z) = (z - 2)(z^2 + az + b)$

	1	-4	6	-4
2				
	1	-2	2	0

$$\boxed{P(z) = (z - 2)(z^2 - 2z + 2)}$$

ج. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z) = 0$

$$P(z) = 0 \Rightarrow (z - 2)(z^2 - 2z + 2) = 0$$

$$z - 2 = 0 \Rightarrow z_0 = 2$$

$$z^2 - 2z + 2 = 0\,;\ \Delta = -4 = (2i)^2\,; z_1 = 1 - i\,; z_2 = 1 + i$$

$$\boxed{S = \{2\,;\ 1 - i\,; 1 + i\}}$$

.2 $z_A = 2$ ، $z_B = 1 - i$ ، $z_C = 1 + i$

أ. كتابة العددين z_B وz_C على الشكل الأسيّ

$$z_B = 1 - i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \boxed{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}$$

$$z_C = 1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \boxed{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}$$

ب. كتابة العدد $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل الجبري

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{-1+i}{-1-i} = \frac{(-1+i)^2}{2} = -\frac{2i}{2} = \boxed{-i}2$$

استنتاج طبيعة المثلث ABC

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = -i \Rightarrow \begin{cases} AB = AC \\ \left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) = -\frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\text{المثلث } ABC \text{ قائم في } A \text{ ومتساوي الساقين}}$$

ج. حساب العدد المركّب L

$$L = \left(\frac{z_B}{\sqrt{2}}\right)^{1434} - \sqrt{2}\left(\frac{z_C}{\sqrt{2}}\right)^{2013} = \left(e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^{1434} - \sqrt{2}\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{2013}$$

$$L = e^{-i\frac{1434\pi}{4}} - \sqrt{2}e^{i\frac{2013\pi}{4}} = e^{-i\frac{\pi}{2}} - \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}} = -i - \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$$

$$L = -i + 1 + i = \boxed{1}$$

.3 ليكن R دوران مركزه A ويحوّل B إلى C

أ. كتابة العبارة المركّبة للدوران R

$$\begin{cases} R(A) = A \\ R(B) = C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_A = az_A + b \\ z_C = az_B + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = -i \\ b = z_A(1 - a) = 2 + 2i \end{cases}$$

$$R(M) = M' \Rightarrow \boxed{z' = -iz + 2 + 2i}$$

تعيين لاحقة النقطة D صورة C بالدوران R

$$R(C) = D \Rightarrow z_D = -iz_C + 2 + 2i = -i(1 + i) + 2 + 2i = \boxed{3 + i}$$

ب. انشاء الدائرتين (Γ) و(Γ') (انظر الشكل في نهاية التمرين)

.4 لتكن M نقطة من الدائرة (Γ) لاحقتها z تختلف عن النقطة C والنقطة M' لاحقتها z' حيث $R(M) = M'$

أ. بيان أنّ معادلة الدائرة (Γ) تُكتب على الشكل $z = 1 + e^{i\theta}$ من أجل $k \in \mathbb{Z}$ و $\theta \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

لتكن النقطة ω مركز الدائرة (Γ) و r نصف قطرها. لدينا :

$$z_\omega = \frac{z_B + z_C}{2} = \boxed{1}\,; r = \frac{BC}{2} = \frac{|z_C - z_B|}{2} = \frac{|2i|}{2} = \boxed{1}$$

$$M(z)\in(\Gamma)\Rightarrow \omega M=r\Rightarrow |z-z_\omega|=r\Rightarrow |z-1|=1\Rightarrow z-1=e^{i\theta}$$
$$\Rightarrow \boxed{z=1+e^{i\theta}}\,;z\neq z_C\Rightarrow 1+e^{i\theta}\neq 1+i\Rightarrow e^{i\theta}\neq i$$
$$\Rightarrow \boxed{\theta\neq\frac{\pi}{2}+2k\pi}\,;k\in\mathbb{Z}$$

ب. التعبير عن z' بدلالة θ

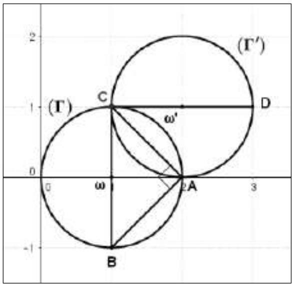
$$R(M)=M'\Rightarrow z'=-iz+2+2i=-i\left(1+e^{i\theta}\right)+2+2i$$
$$\Rightarrow \boxed{z'=2+(1-e^{i\theta})i}$$

ج. اثبات أنّ : $\frac{z'-z_C}{z-z_C}=\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}$

$$\frac{z'-z_C}{z-z_C}=\frac{1-ie^{i\theta}}{e^{i\theta}-i}=\frac{1-i(\cos\theta+i\sin\theta)}{\cos\theta+i\sin\theta-i}=\frac{1+\sin\theta-i\cos\theta}{\cos\theta+i(\sin\theta-1)}$$
$$=\frac{[1+\sin\theta-i\cos\theta][\cos\theta-i(\sin\theta-1)]}{\cos^2\theta+(\sin\theta-1)^2}=\frac{2\cos\theta}{2-2\sin\theta}$$
$$=\boxed{\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}}$$

تفسير النتيجة هندسيا

$\frac{z'-z_C}{z-z_C}\in\mathbb{R}\Rightarrow$ النقط M، M' و C في استقامية



* * *

حل التمرين 76.

$$f(z)=\frac{z-i}{z-1}$$

1. كتابة العدد $f(1+i)$ على شكله الجبري

$$f(1+i)=\frac{1}{i}=\boxed{-i}$$

2. التعبير عن $\overline{f(z)}$ بدلالة $\bar{z}$

$$\overline{f(z)}=\frac{\overline{z-i}}{\overline{z-1}}=\boxed{\frac{\bar{z}+i}{\bar{z}-1}}$$

.3 $z_A = 1$ ، $z_B = i$ ، $z = x + iy$

أ. تعيين مجموعة النقط M من المستوي بحيث يكون $f(z)$ حقيقيا سالبا تماما

طريقة ①:

$$f(z) = \frac{x + (y-1)i}{(x-1) + iy} = \frac{[x + (y-1)i][(x-1) - iy]}{(x-1)^2 + y^2}$$

$$= \frac{[x(x-1) + y(y-1)] + [(x-1)(y-1) - xy]i}{(x-1)^2 + y^2}$$

$$= \frac{x^2 + y^2 - x - y}{(x-1)^2 + y^2} - \frac{x + y - 1}{(x-1)^2 + y^2} i$$

$$f(z) < 0 \Rightarrow \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ (x-1)^2 + y^2 \neq 0 \\ x^2 + y^2 - x - y < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -x + 1 \\ (x; y) \neq (1; 0) \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 < \frac{1}{2} \end{cases}$$

منه نستنتج أنّ مجموعة النقط M من المستوي بحيث يكون $f(z)$ حقيقيا سالبا تماما هي الجزء من المستقيم ذي المعادلة $y = -x + 1$ المرسوم داخل الدائرة ذات المركز $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ ونصف القطر $r = \frac{1}{2}$ باستثناء النقطتين A و B ، أي القطعة $]AB[$

طريقة ②:

$$f(z) < 0 \Rightarrow \arg\left(\frac{z - z_B}{z - z_A}\right) = (2k+1)\pi \Rightarrow \left(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{BM}\right) = (2k+1)\pi$$

$$\Rightarrow \boxed{M \in \,]AB[}$$

ب. تعيين مجموعة النقط M حتى يكون $|f(z)| = 1$

$$|f(z)| = 1 \Rightarrow \left|\frac{z - i}{z - 1}\right| = 1 \Rightarrow |z - i| = |z - 1| \Rightarrow |z - z_B| = |z - z_A|$$

$$\Rightarrow \boxed{BM = AM}$$

منه نستنتج أنّ مجموعة النقط M حتى يكون $|f(z)| = 1$ هي محور القطعة $[AB]$

.4 $z_C = 1 + i$

أ. تعيين طبيعة المثلث ABC

$$\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} = \frac{-i}{-1} = i \Rightarrow \begin{cases} CA = CB \\ \left(\overrightarrow{CB}; \overrightarrow{CA}\right) = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

المثلث ABC قائم في C ومتساوي الساقين

ب. تعيين لاحقة النقطة D نظيرة C بالنسبة إلى المستقيم (AB)

لتكن النقطة I منتصف القطعة $[AB]$. لدينا : $z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} i$

بما أنّ $CA = CB$ ، فإنّ النقطة C تنتمي إلى محور القطعة $[AB]$ ،

وبالتالي تكون النقطة I منتصف القطعة $[CD]$ ، ومنه :

$$z_I = \frac{z_C + z_D}{2} \Rightarrow z_D = 2z_I - z_C = 1 + i - 1 - i = 0 \Rightarrow \boxed{D = O}$$

استنتاج طبيعة الرباعي $ACBD$

القطران $[AB]$ و$[CD]$ متناصفان والمثلث ABC قائم في C ومتساوي الساقين ، منه نستنتج أنّ الرباعي $ACBD$ مربّع (متوازي أضلاع له زاوية قائمة وضلعان متتاليان متقايسان)

5. تعيين العبارة المركّبة للتحويل S

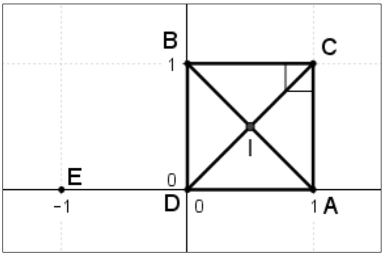
$$\begin{cases} S(C) = B \\ S(B) = E \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_B = az_C + b \\ z_E = az_B + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{z_B - z_E}{z_C - z_B} = \dfrac{i+1}{1} = 1 + i \\ b = z_B - az_C = i - (1+i)^2 = -i \end{cases}$$

$$S(M) = M' \Rightarrow \boxed{z' = (1+i)z - i}$$

استنتاج طبيعة التحويل S وعناصره المميزة

$$a = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\ ;\ z_\omega = \frac{b}{1-a} = \frac{-i}{-i} = 1 = z_A$$

منه نستنتج أنّ التحويل S تشابه مباشر مركزه A ، نسبته $\sqrt{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{4}$



* * *

حل التمرين 77.

1. z عدد مركّب عمدته $\frac{\pi}{6}$. عمدة العدد المركّب $\frac{i}{\bar{z}^2}$ هي : ج) $\frac{5\pi}{6}$

$$\arg\left(\frac{i}{\bar{z}^2}\right) = \arg(i) - 2\arg(\bar{z}) = \frac{\pi}{2} - 2\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \boxed{\frac{5\pi}{6}}$$

2. z عدد مركّب حيث $z = -\sqrt{3} + e^{i\frac{\pi}{6}}$. الشكل الأسّي للعدد z هو : ب) $e^{i\frac{7\pi}{6}}$

$$z = -\sqrt{3} + e^{i\frac{\pi}{6}} = -\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = e^{i\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)} = \boxed{e^{i\frac{7\pi}{6}}}$$

3. z و z' عددان مركّبان حيث $|z| = 2$ و$z' = z - \frac{1}{\bar{z}}$. لدينا : ج) $|z'| = \frac{3}{2}$

$$|z'| = \left|z - \frac{1}{\bar{z}}\right| = \left|\frac{z\bar{z} - 1}{\bar{z}}\right| = \frac{|z\bar{z} - 1|}{|\bar{z}|} = \frac{\left||z|^2 - 1\right|}{|\bar{z}|} = \frac{4 - 1}{2} = \boxed{\frac{3}{2}}$$

4. في المستوي المركّب ، مجموعة النقط M ذات اللاحقة $z = x + iy$ التي تحقق :
$|z-1| = |z+i|$ هي المستقيم الذي معادلته : ب) $y = -x$

$$|z-1| = |z+i| \Rightarrow |x - 1 + iy|^2 = |x + (y+1)i|^2$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 + y^2 = x^2 + (y+1)^2 \Rightarrow -2x + 1 = 2y + 1 \Rightarrow \boxed{y = -x}$$

5. z عدد مركّب حيث $z = \left(1 + i\sqrt{3}\right)^n$. العدد z حقيقي معناه: ج) $n = 3k$

$$\arg\left(1 + i\sqrt{3}\right)^n = n \arg\left(1 + i\sqrt{3}\right) = \frac{n\pi}{3}$$

$$z \in \mathbb{R} \Rightarrow \arg(z) = k\pi \Rightarrow \frac{n\pi}{3} = k\pi \Rightarrow \boxed{n = 3k}$$

* * *

حل التمرين 78.

1. $z_1 = \lambda(1 + i)$

أ. كتابة z_1 على الشكل الأسّي

$$z_1 = \lambda(1+i) = \boxed{\lambda\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}$$

ب. تعيين قيم n حتى يكون $(z_1)^{7n+1}$ تخيليا صرفا

$$(z_1)^{7n+1} \text{ تخيلي صرف} \Rightarrow \arg[(z_1)^{7n+1}] = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow \frac{(7n+1)\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\Rightarrow \frac{7n+1}{4} = \frac{1}{2} + k \Rightarrow 7n + 1 = 4k + 2 \Rightarrow 7n = 4k + 1$$

$$\Rightarrow 7n \equiv 1[4] \Rightarrow n \equiv 3[4] \Rightarrow \boxed{n = 4k' + 3\, ; k' \in \mathbb{N}}$$

2. $P(z) = z^3 - (2+i)z^2 + 2(1+i)z - 2i$

أ. تعيين قيمة λ حيث $P(z_1) = 0$

$$P(z_1) = 0 \Rightarrow \lambda^3(1+i)^3 - \lambda^2(2+i)(1+i)^2 + 2\lambda(1+i)^2 - 2i = 0$$

$$\Rightarrow \left(-2\lambda^3 + 2\lambda^2\right) + \left(2\lambda^3 - 4\lambda^2 + 4\lambda - 2\right)i = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2\lambda^3 + 2\lambda^2 = 0 \\ 2\lambda^3 - 4\lambda^2 + 4\lambda - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\lambda = 1}$$

ب. تعيين a و b حيث : $P(z) = (z - z_1)(z - a)(z - b)$

	1	$-2-i$	$2+2i$	$-2i$
$1+i$				
	1	-1	$1+i$	0

$$P(z) = (z - 1 - i)(z^2 - z + 1 + i) = (z - 1 - i)(z - i)(z - 1 + i)$$

$$\Rightarrow \boxed{a = i\, ;\, b = 1 - i}$$

ج. استنتاج حلول المعادلة $P(z) = 0$

$P(z) = 0 \Rightarrow z = 1 + i$ أو $z = i$ أو $z = 1 - i \Rightarrow \boxed{S = \{1 + i\,; i\,; 1 - i\}}$

3. تعيين حسب قيم α طبيعة والعناصر المميزة للتحويل f_α

$$M'\{(A; -1), (C; \alpha - 2), (B; \alpha - 1), (M, 1)\}$$

$$z' = \frac{-z_A + (\alpha - 2)z_C + (\alpha - 1)z_B + z}{2\alpha - 3}$$

$$z' = \frac{-1 - i + (\alpha - 2)i + (\alpha - 1)(1 - i) + z}{2\alpha - 3} = \frac{\alpha - 2 - 2i + z}{2\alpha - 3}$$

$$z' = \frac{1}{2\alpha - 3}z + \frac{\alpha - 2 - 2i}{2\alpha - 3}$$

$$f_\alpha(M) = M' \Rightarrow z' = \frac{1}{2\alpha - 3}z + \frac{\alpha - 2 - 2i}{2\alpha - 3}$$

$$2\alpha - 3 = 1 \Rightarrow \alpha = 2 : z' = z - 2i \Rightarrow \boxed{f_\alpha \text{ انسحاب شعاعه } \vec{u}(0; -2)}$$

$$\alpha \in \mathbb{R} - \left\{1; \frac{3}{2}\right\} : z_\omega = \frac{\dfrac{\alpha - 2 - 2i}{2\alpha - 3}}{1 - \dfrac{1}{2\alpha - 3}} = \frac{\alpha - 2}{2\alpha - 4} - \frac{1}{\alpha - 2}i$$

$$\boxed{f_\alpha \text{ تحاكي نسبته } \frac{1}{2\alpha - 3} \text{ ومركزه } \omega\left(\frac{\alpha - 2}{2\alpha - 4}; \frac{1}{\alpha - 2}\right)}$$

حل التمرين 79.

I- حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - 2(1 + \sqrt{2})z + 2(2 + \sqrt{2}) = 0$

$$\Delta = 4\left(1 + \sqrt{2}\right)^2 - 8\left(2 + \sqrt{2}\right) = -4 = (2i)^2$$

$$z_1 = 1 + \sqrt{2} - i\,; z_2 = 1 + \sqrt{2} + i$$

$$\boxed{S = \left\{1 + \sqrt{2} - i\,; 1 + \sqrt{2} + i\right\}}$$

II- $z_A = 1 + \sqrt{2} - i$ ، $z_B = 1 - i$ ، $z_C = 1 + \sqrt{2} + i$.

1. بيان أنّ : $z_B \times z_C = \sqrt{2}z_A$

$$z_B \times z_C = (1 - i)\left(1 + \sqrt{2} + i\right) = 2 + \sqrt{2} - i\sqrt{2} = \boxed{\sqrt{2}z_A}$$

2. حساب $\arg(z_B)$ واستنتاج $\arg(z_C)$

$$z_B = 1 - i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) \Rightarrow \boxed{\arg(z_B) = -\frac{\pi}{4}}$$

$$\begin{cases} z_B \times z_C = \sqrt{2} z_A \\ z_A = \overline{z_C} \end{cases} \Rightarrow \arg(z_B) + \arg(z_C) = -\arg(z_C)$$

$$\Rightarrow 2\arg(z_C) = -\arg(z_B) \Rightarrow \boxed{\arg(z_C) = \frac{\pi}{8}}$$

.3 كتابة العددين z_A وz_B على الشكل الأسّي

$$|z_A| = \left|1+\sqrt{2}-i\right| = \sqrt{\left(1+\sqrt{2}\right)^2 + (-1)^2} = \sqrt{4+2\sqrt{2}}$$

$$z_A = \overline{z_C} \Rightarrow \arg(z_A) = -\frac{\pi}{8} \Rightarrow \boxed{z_A = \sqrt{4+2\sqrt{2}}\, e^{-i\frac{\pi}{8}}}$$

$$|z_B| = |1-i| = \sqrt{2}\,;\arg(z_B) = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow \boxed{z_B = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}$$

كتابة $\left(\frac{z_B}{\sqrt{2}}\right)^{2012}$ على الشكل الجبري

$$\left(\frac{z_B}{\sqrt{2}}\right)^{2012} = \left(\frac{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}\right)^{2012} = e^{-i\frac{2012\pi}{4}} = e^{-i503\pi} = e^{i\pi} = \boxed{-1}$$

.4 تعيين طبيعة المثلث ABC

$$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{\sqrt{2}}{2i} = -\frac{\sqrt{2}}{2}i \Rightarrow \left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right) = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{\text{المثلث } ABC \text{ قائم في } A}$$

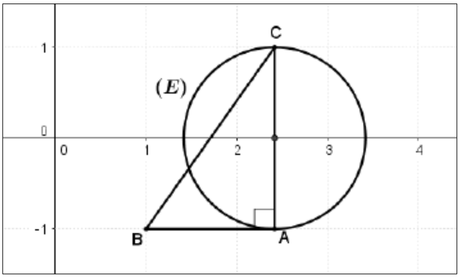
.5 بيان أنّ (E) هي دائرة باستثناء نقطة ، يُطلب تعيين نصف قطرها r

$$Re\left(\frac{z-z_C}{z-z_A}\right) = 0 \Rightarrow \text{تخيلي صرف}\ \frac{z-z_C}{z-z_A} \Rightarrow arg\left(\frac{z-z_C}{z-z_A}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\Rightarrow \left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{CM}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CM} = 0}$$

منه نستنتج أنّ المجموعة (E) هي الدائرة التي قطرها $[AC]$ باستثناء النقطة A

$$r = \frac{AC}{2} = \frac{|z_C - z_A|}{2} = \frac{|2i|}{2} = \boxed{1}$$



* * *

حل التمرين 80.

1. حل في مجموعة الأعداد المركّبة ℂ المعادلة : $z^2+2\sqrt{3}z+4=0$

$\Delta = -4 = (2i)^2 \; ; z_1 = -\sqrt{3}+i \; ; z_2 = -\sqrt{3}-i$

$$\boxed{S = \left\{-\sqrt{3}+i \; ; -\sqrt{3}-i\right\}}$$

2. $a = 2i$ ، $b = -\sqrt{3}+i$ ، $c = -\sqrt{3}-i$

كتابة الأعداد a ، b و c على الشكل الأسّي

$$a = 2i = \boxed{2e^{i\frac{\pi}{2}}}$$

$$b = -\sqrt{3}+i = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right) = \boxed{2e^{i\frac{5\pi}{6}}}$$

$$c = -\sqrt{3}-i = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right) = \boxed{2e^{i\frac{7\pi}{6}}}$$

3. بيان أنّ العدد b^{1431} تخيلي صرف

$$b^{1431} = \left(2e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)^{1431} = 2^{1431}e^{i\frac{1431\times 5\pi}{6}} = 2^{1431}e^{i\frac{2385\pi}{2}} = 2^{1431}e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\boxed{b = 2^{1431}i}$$

4. نعتبر في المستوي المركّب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ النقط C,B,A لواحقها على الترتيب الأعداد المركّبة a ، b و c

أ. حساب قيس للزاوية $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})$ واستنتاج طبيعة المثلث OAB

$$\frac{b}{a} = \frac{2e^{i\frac{5\pi}{6}}}{2e^{i\frac{\pi}{2}}} = e^{i\frac{\pi}{3}} \Rightarrow \boxed{\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right) = \frac{\pi}{3}}$$

$$\frac{b}{a} = e^{i\frac{\pi}{3}} \Rightarrow \begin{cases} OA = OB \\ \left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right) = \dfrac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\text{المثلث } OAB \text{ متقايس الأضلاع}}$$

ب. اثبات أنّ الرباعي $OABC$ معين يُطلب حساب مساحته

$b - a = c \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC} \Rightarrow$ $OABC$ متوازي أضلاع

بما أنّ المثلث OAB متقايس الأضلاع ، نستنتج أنّ الرباعي $OABC$ (متوازي أضلاه له ضلعان متتاليان متقايسان)

$$\mathcal{A}_{OABC} = \frac{OB \times AC}{2} = \frac{|b| \times |c-a|}{2} = \frac{\left|-\sqrt{3}+i\right| \times \left|-\sqrt{3}-3i\right|}{2}$$

$$\boxed{\mathcal{A}_{OABC} = 2\sqrt{3}\,ua}$$

ج. تحديد زاوية الدوران R الذي مركزه النقطة B ويحوّل O إلى A

$$R(O)=A \Rightarrow a-b=e^{i\theta}(-b) \Rightarrow e^{i\theta}=\frac{b-a}{b}=\frac{-\sqrt{3}-i}{-\sqrt{3}+i}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\Rightarrow e^{i\theta}=e^{i\frac{\pi}{3}} \Rightarrow \boxed{\theta=\frac{\pi}{3}}$$

د. كتابة الصيغة المركّبة للتحاكي H الذي مركزه B ونسبته -3

$$H(M)=M' \Rightarrow z'-b=-3(z-b) \Rightarrow z'=-3z+4b$$

$$\Rightarrow \boxed{z'=-3z-4\sqrt{3}+4i}$$

ه. اعطاء الصيغة المركّبة للتحويل $S=RoH$

$$\boxed{M \xrightarrow{H} M_1 \xrightarrow{R} M' \Rightarrow M \xrightarrow{RoH} M'}$$

$$S(M)=RoH(M)=R[H(M)]=R(M_1)=M' \Rightarrow \begin{cases} z_1=-3z-4\sqrt{3}+4i \\ z'-z_B=e^{i\frac{\pi}{3}}(z_1-z_B) \end{cases}$$

$$\Rightarrow z'=e^{i\frac{\pi}{3}}z_1+\left(1-e^{i\frac{\pi}{3}}\right)z_B$$

$$\Rightarrow z'=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(-3z-4\sqrt{3}+4i\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(-\sqrt{3}+i\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{z'=\left(-\frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}i\right)z-4\sqrt{3}-2i}$$

تحديد طبيعة التحويل S وعناصره المميزة

الطريقة ① : استنتاجا

$$R_{\left(B;\frac{\pi}{3}\right)}oH_{(B;-3)}=S_{\left(B;|-3|;\pi+\frac{\pi}{3}\right)}=\boxed{S_{\left(B;3;\frac{4\pi}{3}\right)}}$$

الطريقة ② : حسابيا

$$a=-\frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}i=3\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=3e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

$$z_\omega=\frac{b}{1-a}=\frac{-4\sqrt{3}-2i}{\frac{5}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i}=\frac{-8\sqrt{3}-4i}{5+3\sqrt{3}i}=-\sqrt{3}+i=z_B$$

منه نستنتج أنّ التحويل S تشابه مباشر مركزه B ، نسبته $\sqrt{3}$ وزاويته $\frac{4\pi}{3}$

و. تعيين صورة المعين $OABC$ بالتحويل S مع تحديد طبيعته وحساب مساحته.

$$S(O)=O' \Rightarrow z_{O'}=\left(-\frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}i\right)z_0-4\sqrt{3}-2i=\boxed{-4\sqrt{3}-2i}$$

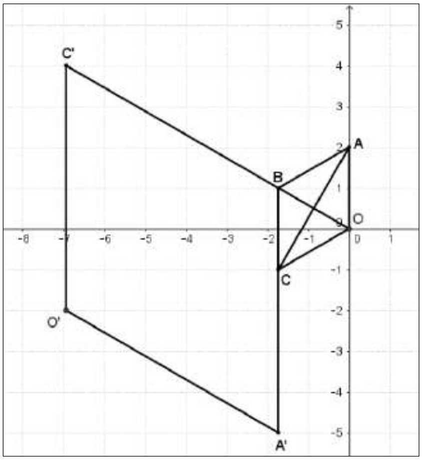
$$S(A) = A' \Rightarrow z_{A'} = \left(-\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i\right)z_A - 4\sqrt{3} - 2i = \boxed{-\sqrt{3} - 5i}$$

$S(B) = B$ (نقطة صامدة)

$$S(C) = C' \Rightarrow z_{C'} = \left(-\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i\right)z_C - 4\sqrt{3} - 2i = \boxed{-4\sqrt{3} + 4i}$$

منه نستنتج أنّ صورة المعيّن $OABC$ بالتحويل S هو المعيّن $O'A'BC'$ ذو المساحة :

$$\mathcal{A}_{O'A'BC'} = (3)^2\mathcal{A}_{OABC} = 9 \times 2\sqrt{3} = \boxed{18\sqrt{3}\ ua}$$



* * *

حل التمرين 81.

I) $a = \frac{\sqrt{3}+1}{4} + \frac{\sqrt{3}-1}{4}i$ ، $z_0 = 6 + 6i$ ، $z_n = a^n z_0$

1. كتابة كل من z_1 و a^2 على الشكل الجبري ثمّ الأسّي

$$z_1 = az_0 = \left(\frac{\sqrt{3}+1}{4} + \frac{\sqrt{3}-1}{4}i\right)(6 + 6i) = \boxed{3 + 3\sqrt{3}i}$$

$$z_1 = 3 + 3\sqrt{3}i = 6\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \boxed{6e^{i\frac{\pi}{3}}}$$

$$a^2 = \left(\frac{\sqrt{3}+1}{4} + \frac{\sqrt{3}-1}{4}i\right)^2$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}+1}{4}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}-1}{4}\right)^2 + 2\left(\frac{\sqrt{3}+1}{4}\right)\left(\frac{\sqrt{3}-1}{4}i\right)$$

$$= \frac{4+2\sqrt{3}}{16} - \frac{4-2\sqrt{3}}{16} + \frac{4i}{16} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i}$$

$$a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \boxed{\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}}$$

2. التعبير عن z_3 و z_7 بدلالة a^2 واستنتاج شكل أسّي لكل من z_3 و z_7

$$z_3 = a^3 z_0 = \boxed{a^2 z_1}\ ;\ z_7 = a^7 z_0 = \boxed{(a^2)^3 z_1}$$

$$z_3 = a^2 z_1 = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{6}} \times 6e^{i\frac{\pi}{3}} = \boxed{3e^{i\frac{\pi}{2}}}$$

$$z_7 = (a^2)^3 z_1 = \left(\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^3 \times 6e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{8}e^{i\frac{\pi}{2}} \times 6e^{i\frac{\pi}{3}} = \boxed{\frac{3}{4}e^{i\frac{5\pi}{6}}}$$

3. تعليم النقط A_0 ، A_1 ، A_3 و A_7 (انظر الشكل في نهاية التمرين)

II) $|z_n| = u_n$

1. بيان أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، فإنّ $u_n = 12\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}$

$$u_n = |z_n| = |a^n z_0| = |a^2|^{\frac{n}{2}}|z_0| = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \times 6\sqrt{2} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \times 12\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= \left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^n \times 6\sqrt{2} \Rightarrow \boxed{u_n = 12\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}}$$

2. استنتاج أنّ (u_n) متتالية هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدّها الأول

$$u_{n+1} = 12\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+2} = 12\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}u_n}$$

منه نستنتج أنّ (u_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{\sqrt{2}}{2}$ وحدّها الأول : $u_0 = 12\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^1 = 6\sqrt{2}$

3. حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ وتفسير النتيجة هندسيا

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} 12\underbrace{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}}_{\to 0} = \boxed{0} \Rightarrow \boxed{\text{النقط } A_n \text{ تقترب من المبدأ } O}$$

4. تعيين أصغر عدد طبيعي p بحيث يكون $OA_p \leq 10^{-3}$

$$OA_p \leq 10^{-3} \Rightarrow |z_p| \leq 10^{-3} \Rightarrow u_p \leq 10^{-3} \Rightarrow 12\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{p+1} \leq 10^{-3}$$

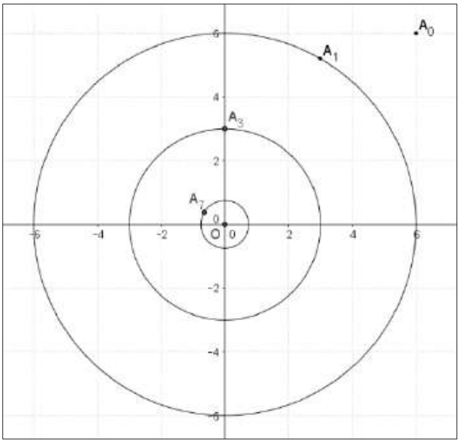
$$\Rightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{p+1} \leq \frac{1}{12\times 10^3} \Rightarrow (p+1)\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \leq -\ln(12\times 10^3)$$

$$\Rightarrow p+1 \geq -\frac{\ln(12\times 10^3)}{\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} \Rightarrow p+1 \geq 27{,}1 \Rightarrow \boxed{p=27}$$

تعيين قيس للزاوية الموجهة $(\vec{u};\overrightarrow{OA_p})$

$$\arg(z_{27}) = \arg(a^{26}\times z_1) = \arg(a^2)^{13} + \arg(z_1) = 13\left(\frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{\left(\vec{u};\overrightarrow{OA_{27}}\right) = \frac{\pi}{2}}$$



* * *

حل التمرين 82.

1. **تعيين طبيعة التحويل T وذكر عناصره المميزة**

$$z' = -\left(\sqrt{3}+i\right)z - 1 + \left(1+\sqrt{3}\right)i$$

$$\left|-\sqrt{3}-i\right| = 2\,;\arg\left(-\sqrt{3}-i\right) \equiv \frac{7\pi}{6}\,[2\pi]\,;z_\Omega = \frac{-1+\left(1+\sqrt{3}\right)i}{1+\sqrt{3}+i} = i$$

نستنتج أنّ التحويل T تشابه مباشر نسبته 2 ، زاويته $\frac{7\pi}{6}$ ومركزه $\Omega(0;1)$

2. **حساب ΩM_0 و $\left(\vec{u};\overrightarrow{\Omega M_0}\right)$**

$$z_0 - z_\Omega = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}i = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = \frac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

$$\boxed{\Omega M_0 = |z_0 - z_\Omega| = \frac{1}{2}\ ;\ \left(\vec{u};\overrightarrow{\Omega M_0}\right) = \arg(z_0 - z_\Omega) = -\frac{\pi}{6}}$$

3. $M_{n+1} = S(M_n)$

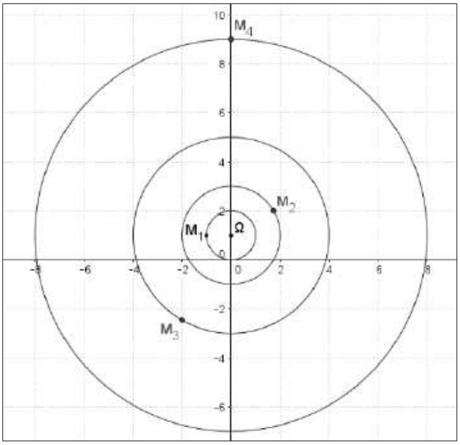
أ. إنشاء النقط Ω ، M_1 ، M_2 ، M_3 و M_4

$$M_1 = T(M_0) \Rightarrow \boxed{\Omega M_1 = 2\Omega M_0 = 1\ ;\ \left(\vec{u};\overrightarrow{\Omega M_1}\right) = \left(\vec{u};\overrightarrow{\Omega M_0}\right) + \frac{7\pi}{6} = \pi}$$

$$M_2 = T(M_1) \Rightarrow \boxed{\Omega M_2 = 2\Omega M_1 = 2\ ;\ \left(\vec{u};\overrightarrow{\Omega M_2}\right) = \left(\vec{u};\overrightarrow{\Omega M_1}\right) + \frac{7\pi}{6} = \frac{\pi}{6}}$$

$$M_3 = T(M_2) \Rightarrow \boxed{\Omega M_3 = 2\Omega M_2 = 4\ ;\ \left(\vec{u};\overrightarrow{\Omega M_3}\right) = \left(\vec{u};\overrightarrow{\Omega M_2}\right) + \frac{7\pi}{6} = \frac{4\pi}{3}}$$

$$M_4 = T(M_3) \Rightarrow \boxed{\Omega M_4 = 2\Omega M_3 = 8\ ;\ \left(\vec{u};\overrightarrow{\Omega M_4}\right) = \left(\vec{u};\overrightarrow{\Omega M_3}\right) + \frac{7\pi}{6} = \frac{\pi}{2}}$$



ب. البرهان بالتراجع أنّ : $z_n - i = 2^n e^{i\frac{7n\pi}{6}}(z_0 - i)$

- **تحقيق التراجع** : نتحقق أنّ $z_0 - i = 2^0 e^0 (z_0 - i)$ (محققة)
- **فرض التراجع** : نفرض أنّ $z_n - i = 2^n e^{i\frac{7n\pi}{6}}(z_0 - i)$
- **برهان التراجع** : نبرهن أنّ $z_{n+1} - i = 2^{n+1} e^{i\frac{7(n+1)\pi}{6}}(z_0 - i)$

$$M_{n+1} = S(M_n) \Rightarrow z_{n+1} - i = 2e^{i\frac{7\pi}{6}}(z_n - i) = 2e^{i\frac{7\pi}{6}}.2^n e^{i\frac{7n\pi}{6}}(z_0 - i)$$

$$\Rightarrow \boxed{z_{n+1} - i = 2^{n+1} e^{i\frac{7(n+1)\pi}{6}}(z_0 - i)}$$

ج. حساب ΩM_n وتعيين أصغر قيمة لـ n حيث : $\Omega M_n \geq 10^2$

$$\Omega M_n = |z_n - i| = \left|2^n e^{i\frac{7n\pi}{6}}(z_0 - i)\right| = 2^n |z_0 - i| = 2^n\left(\frac{1}{2}\right) = \boxed{2^{n-1}}$$

$$\Omega M_n \geq 10^2 \Rightarrow 2^{n-1} \geq 10^2 \Rightarrow (n-1)\ln 2 \geq 2\ln 10 \Rightarrow n-1 \geq \frac{2\ln 10}{\ln 2}$$

$$\Rightarrow n \geq 7{,}64 \Rightarrow \boxed{n=8}$$

د. حساب S_n بدلالة n وتعيين نهاية S_n

$$S_n = \Omega M_0 + \Omega M_1 + \cdots + \Omega M_n = |z_0 - i| + |z_1 - i| + \cdots + |z_n - i|$$

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2) + \frac{1}{2}(2^2) + \cdots + \frac{1}{2}(2^n) = \frac{1}{2}(2^{n+1} - 1)$$

$$\boxed{S_n = 2^n - \frac{1}{2}} \;;\; \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} 2^n - \frac{1}{2} = \boxed{+\infty}$$

4. نعتبر في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة : $7x - 12y = 1 \dots (*)$

أ. التحقق أنّ الثنائية $(-5;-3)$ حل خاص للمعادلة $(*)$

$$7(-5) - 12(-3) = -35 + 36 = 1 \Rightarrow \boxed{(-5;-3) \in S_{(*)}}$$

حل المعادلة $(*)$

$$\begin{cases} 7x - 12y = 1 \\ 7(-5) - 12(-3) = 1 \end{cases} \Rightarrow 7(x+5) = 12(y+3)$$

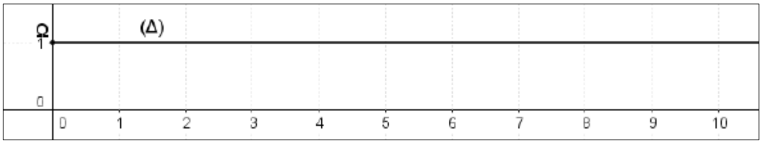
$$\begin{cases} 12 \mid 7(x+5) \\ PGCD(7;12) = 1 \end{cases} \Rightarrow 12 \mid x+5 \Rightarrow x = 12\alpha - 5 \,;\, y = 7\alpha - 3$$

$$\boxed{S_{(*)} = \{(12\alpha - 5\,;7\alpha - 3)\}\,;\alpha \in \mathbb{Z}}$$

ب. تعيين وانشاء (Δ) مجموعة النقط $M(z)$ حيث $Im(z) = 1$ و $Re(z) \geq 0$

$$z = x + iy\,;\begin{cases} Im(z) = 1 \\ Re(z) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

منه نستنتج أنّ المجموعة (Δ) هي نصف المستقيم الذي مبدؤه Ω ويوازي محور الفواصل وفواصل نقاطه موجبة.



ج. تعيين مجموعة الأعداد الطبيعية n بحيث M_n تنتمي إلى (Δ)

$$M_n \in (\Delta) \Rightarrow \left(\vec{u};\overrightarrow{\Omega M_n}\right) = 2k\pi \Rightarrow \arg(z_n - i) = 2k\pi$$

$$\Rightarrow \frac{7n\pi}{6} + \arg(z_0 - i) = 2k\pi \Rightarrow \frac{7n\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = 2k\pi \Rightarrow \frac{7n}{6} = \frac{12k+1}{6}$$

$$\Rightarrow 7n - 12k = 1 \Rightarrow \boxed{n = 12\alpha - 5 \;;\; \alpha \in \mathbb{Z}^*}$$ (حسب السؤال أ)

* * *

حل التمرين 83.

$z_A = 1$ ، $z_B = 4+i$ ، $z_C = 3i$ ، $z_D = -1+i$ ، $z_E = -2i$

1. بيان أنّ $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A} = \frac{z_E-z_A}{z_D-z_A}$

$$\begin{cases} \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \dfrac{-1+3i}{3+i} = i \\ \dfrac{z_E - z_A}{z_D - z_A} = \dfrac{-1-2i}{-2+i} = i \end{cases} \Rightarrow \boxed{\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \dfrac{z_E - z_A}{z_D - z_A}}$$

نستنتج أنّ كلا من المثلثين ABC وADE قائم في A ومتساوي الساقين.

2. تعيين لاحقة صورة النقطة C بالتشابه المباشر S

$$S(C) = C' \Rightarrow z_{C'} - z_A = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}} (z_C - z_A)$$

$$\Rightarrow z_{C'} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i\right) z_C + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} i\right) z_A = 3i \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} i\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{z_{C'} = -1 + i = z_D}$$

3. I_1 ، I_2 ، I_3 وI_4 منتصفات القطع المستقيمة $[BC]$ ، $[CD]$ ، $[DE]$ و $[EB]$

أ. بيان أنّه يوجد تحويل نقطي r مركزه I_1 ويحوّل النقطة I_4 إلى I_2

$$\frac{z_{I_2} - z_{I_1}}{z_{I_4} - z_{I_1}} = \frac{\dfrac{z_C + z_D}{2} - \dfrac{z_B + z_C}{2}}{\dfrac{z_B + z_E}{2} - \dfrac{z_B + z_C}{2}} = \frac{z_D - z_B}{z_E - z_C} = \frac{-5}{-5i} = \frac{1}{i} = -i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{z_{I_2} - z_{I_1} = e^{-i\frac{\pi}{2}} \left(z_{I_4} - z_{I_1}\right)}$$

منه نستنتج أنّ التحويل النقطي r الذي يحوّل النقطة I_4 إلى I_2 هو دوران مركزه I_1 وزاويته $-\frac{\pi}{2}$

ب. حساب $z_{I_1} + z_{I_3}$ و $z_{I_2} + z_{I_4}$

$$z_{I_1} + z_{I_3} = \frac{z_B + z_C}{2} + \frac{z_D + z_E}{2} = \frac{3+3i}{2} = \boxed{\frac{3}{2} + \frac{3}{2} i}$$

$$z_{I_2} + z_{I_4} = \frac{z_C + z_D}{2} + \frac{z_E + z_B}{2} = \frac{3+3i}{2} = \boxed{\frac{3}{2} + \frac{3}{2} i}$$

استنتاج طبيعة الرباعي $I_1I_2I_3I_4$

بما أنّ القطرين $[I_1I_3]$ و$[I_2I_4]$ متناصفان $\left(\frac{z_{I_1}+z_{I_3}}{2} = \frac{z_{I_2}+z_{I_4}}{2}\right)$

والمثلث $I_1I_2I_4$ قائم في I_1 ومتساوي الساقين $\left(\frac{z_{I_2}-z_{I_1}}{z_{I_4}-z_{I_1}} = e^{-i\frac{\pi}{2}}\right)$،

نستنتج أنّ الرباعي $I_1I_2I_3I_4$ مربّع.

4. $\boldsymbol{M' = S(M)}$

أ. بيان أنّ $\boldsymbol{z' = \frac{1}{2}[(1+i)z + 1 - i]}$

$$M' = S(M) \Rightarrow z' - z_A = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}(z - z_A)$$

$$\Rightarrow z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)z + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right)z_A = \boxed{\frac{1}{2}[(1+i)z + 1 - i]}$$

البرهان أنّ : $\boldsymbol{\begin{cases} x' = \frac{1}{2}(x - y + 1) \\ y' = \frac{1}{2}(x + y - 1) \end{cases}}$

$$z' = \frac{1}{2}[(1+i)z + 1 - i] \Rightarrow x' + iy' = \frac{1}{2}[(1+i)(x+iy) + 1 - i]$$

$$\Rightarrow x' + iy' = \frac{1}{2}(x - y + 1) + \frac{1}{2}(x + y - 1)i \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x' = \frac{1}{2}(x - y + 1) \\ y' = \frac{1}{2}(x + y - 1) \end{cases}}$$

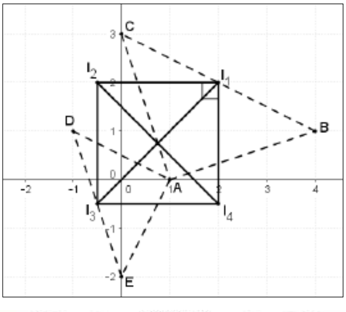
ب. تعيين مجموعة النقط $\boldsymbol{M}$ من المستوي التي إحداثياتها أعداد صحيحة وتحقق $\boldsymbol{\overrightarrow{HM'}.\overrightarrow{HK} = 0}$ ، حيث $\boldsymbol{H\left(-\frac{1}{2};0\right)}$ و $\boldsymbol{K(1;3)}$

$$\overrightarrow{HM'}\begin{bmatrix} \frac{1}{2}(x - y + 2) \\ \frac{1}{2}(x + y - 1) \end{bmatrix} \; ; \; \overrightarrow{HK}\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{HM'}.\overrightarrow{HK} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}(x - y + 2) - \frac{3}{4}(x + y - 1) = 0 \Rightarrow x + 5y = 7 \ldots (*)$$

نلاحظ أنّ الثنائية $(2;1)$ حل خاص للمعادلة $(*)$ فهي تقبل إذن حلولا في $\mathbb{Z}$ من الشكل $(5\alpha + 2; -\alpha + 1)$ حيث $\alpha \in \mathbb{Z}$ ، ومنه نستنتج أنّ مجموعة النقط M من المستوي التي إحداثياتها أعداد صحيحة وتحقق $\overrightarrow{HM'}.\overrightarrow{HK} = 0$ هي : $\boxed{M(5\alpha + 2; -\alpha + 1)}$

$$M \in \{\ldots, (-8;3), (-3;2), (2;1), (7;0), (12;-1), \ldots\}$$



* * *

حل التمرين 84.

1. **حل في مجموعة الأعداد المركّبة $\mathbb{C}$ المعادلة :**

$$\boldsymbol{(z-1+i)[z^2-2(2+\sqrt{3})z+8+4\sqrt{3}]=0}$$

$z-1+i=0 \Rightarrow z_0=1-i$

$z^2-2\left(2+\sqrt{3}\right)z+8+4\sqrt{3}=0\ ;$

$\Delta=4\left(2+\sqrt{3}\right)^2-4\left(8+4\sqrt{3}\right)=4\left(7+4\sqrt{3}-8-4\sqrt{3}\right)=-4=(2i)^2$

$z_1=2+\sqrt{3}+i\ ;z_2=2+\sqrt{3}-i$

$$\boxed{S=\left\{1-i\ ;2+\sqrt{3}+i\ ;\ 2+\sqrt{3}-i\right\}}$$

2. $\boldsymbol{z_A=1-i}$ ، $\boldsymbol{z_B=2+\sqrt{3}+i}$ ، $\boldsymbol{z_C=\overline{z_B}}$

أ. بيان أنّ $\boldsymbol{z_B-2=2e^{i\frac{\pi}{6}}}$

$$z_B-2=\sqrt{3}+i=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=\boxed{2e^{i\frac{\pi}{6}}}$$

استنتاج إنشاء النقطة $\boldsymbol{B}$ ورسم النقط $\boldsymbol{C,B,A}$

ننشئ النقطة B_1 ذات اللاحقة z_B-2 ، وهي نقطة من الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها 2 ، حيث ترتيبها 1 وفاصلتها موجبة ، ثمّ ننشئ النقطة B صورة النقطة B_1 بالانسحاب الذي شعاعه $2\vec{u}$ لأنّ $z_B=z_{B_1}+2$ ، أمّا النقطة C فهي نظيرة B بالنسبة إلى محور الفواصل (انظر الشكل في نهاية التمرين)

ب. تعيين لاحقة النقطة $\boldsymbol{B'}$ صورة النقطة $\boldsymbol{B}$ بالدوران $\boldsymbol{r}$

$$B'=r(B)\Rightarrow z_{B'}=e^{-i\frac{\pi}{6}}z_B=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)\left(2+\sqrt{3}+i\right)=2+\sqrt{3}-i$$

$$\Rightarrow\boxed{z_{B'}=z_C}$$

ج. كتابة العدد $\boldsymbol{\frac{z_B}{z_{B'}}}$ على الشكل الجبري ثمّ على الشكل الأسّي واستنتاج عمدة $\boldsymbol{z_B}$

$$\frac{z_B}{z_{B'}}=\frac{z_B}{z_C}=\frac{2+\sqrt{3}+i}{2+\sqrt{3}-i}=\frac{\left(2+\sqrt{3}+i\right)^2}{\left(2+\sqrt{3}\right)^2+1}=\boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i=e^{i\frac{\pi}{6}}}$$

$$\arg\left(\frac{z_B}{z_C}\right)=\underbrace{\arg(z_B)-\arg(z_C)}_{=\arg(z_B)-[-\arg(z_B)]}=2\arg(z_B)=\frac{\pi}{6}\Rightarrow\boxed{\arg(z_B)=\frac{\pi}{12}}$$

3. $\boldsymbol{z=ae^{i\theta}}$

أ. بيان أنّ لاحقة $\boldsymbol{M'}$ هي $\boldsymbol{z'=ae^{i\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)}}$

$$M_1=r(M)\Rightarrow z_1=e^{-i\frac{\pi}{6}}z=e^{-i\frac{\pi}{6}}\times ae^{i\theta}=ae^{i\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)}$$

$$z' = \overline{z_1} = \overline{ae^{i\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)}} = ae^{-i\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)} = \boxed{ae^{i\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)}} \; ; (\arg(\bar{z}) = -\arg(z))$$

ب. تعيين مجموعة قيّم θ التي تحقق $z' = z$

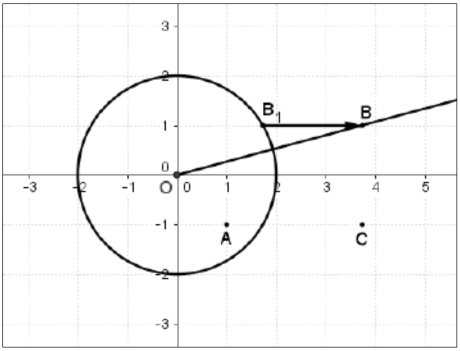
$$z' = z \Rightarrow ae^{i\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)} = ae^{i\theta} \Rightarrow \frac{\pi}{6} - \theta = \theta + 2k\pi \Rightarrow 2\theta = \frac{\pi}{6} - 2k\pi$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta = \frac{\pi}{12} - k\pi \; ; k \in \mathbb{Z}}$$

استنتاج مجموعة النقط M من المستوي التي تكون من أجلها $M = M'$

$$M = M' \Rightarrow z = z' \Rightarrow \arg(z) = \frac{\pi}{12} - k\pi \Rightarrow \boxed{(\vec{u}; \overrightarrow{OM}) = \frac{\pi}{12} - k\pi}$$

منه نستنتج أنّ مجموعة النقط M التي من أجلها $M = M'$ هي نصف المستقيم الذي مبدؤه O وميله $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$ باستثناء المبدأ O ، أي نصف المستقيم $]OB)$.



* * *

<u>حل التمرين 85.</u>

$$S\left(A_0 \; ; \frac{1}{2} \; ; \frac{3\pi}{4}\right) \text{ ، } B_{n+1} = S(B_n) \text{ ، } A_0B_0 = 8\; cm$$

1. انشاء النقط B_1 ، B_2 ، B_3 و B_4 (انظر الشكل في نهاية التمرين)

$$B_1 = S(B_0) \Rightarrow \boxed{\left(\overrightarrow{A_0B_0}; \overrightarrow{A_0B_1}\right) = \frac{3\pi}{4} \text{ و } A_0B_1 = 8\left(\frac{1}{2}\right) = 4\; cm}$$

$$B_2 = S(B_1) \Rightarrow \boxed{\left(\overrightarrow{A_0B_1}; \overrightarrow{A_0B_2}\right) = \frac{3\pi}{4} \text{ و } A_0B_2 = 4\left(\frac{1}{2}\right) = 2\; cm}$$

$$B_3 = S(B_2) \Rightarrow \boxed{\left(\overrightarrow{A_0B_2}; \overrightarrow{A_0B_3}\right) = \frac{3\pi}{4} \text{ و } A_0B_3 = 2\left(\frac{1}{2}\right) = 1\; cm}$$

$$B_4 = S(B_3) \Rightarrow \boxed{\left(\overrightarrow{A_0B_3}; \overrightarrow{A_0B_4}\right) = \frac{3\pi}{4} \text{ و } A_0B_4 = 1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\; cm}$$

2. اثبات أنّ المثلثين $A_0B_nB_{n+1}$ و $A_0B_{n+1}B_{n+2}$ متشابهان

$$\begin{cases} B_{n+1} = S(B_n) \\ B_{n+2} = S(B_{n+1}) \end{cases} \Rightarrow A_0B_{n+1}B_{n+2} = S(A_0B_nB_{n+1})$$

بما أنّ المثلث $A_0B_{n+1}B_{n+2}$ صورة المثلث $A_0B_nB_{n+1}$ بالتشابه S ، فهما إذن متشابهان

3. $u_n = B_nB_{n+1}$

أ. اثبات أنّ (u_n) متتالية هندسية يُطلب تحديد أساسها q

$$u_{n+1} = B_{n+1}B_{n+2} = \frac{1}{2}B_nB_{n+1} = \boxed{\frac{1}{2}u_n}$$

منه نستنتج أنّ المتتالية (u_n) هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$

ب. كتابة عبارة u_n بدلالة n و u_0

$$u_n = u_0q^n = \boxed{u_0\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

ج. حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_n$

$$\sum\nolimits_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0\left[\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}\right] = 2u_0\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$$

$$\lim_{n\to+\infty}\sum\nolimits_n = 2u_0 = \boxed{2B_0B_1}$$

4. حل في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة : $3x - 4y = 2$

نلاحظ أنّ الثنائية $(2;1)$ حل خاص للمعادلة $3x - 4y = 2$

$$\begin{cases} 3x - 4y = 2 \\ 3(2) - 4(1) = 2 \end{cases} \Rightarrow 3(x-2) = 4(y-1)$$

$$\begin{cases} 4 \mid 3(x-2) \\ PGCD(3;4) = 1 \end{cases} \Rightarrow 4 \mid x-2 \Rightarrow x = 4\alpha + 2\,;\, y = 3\alpha + 1\ \ ;\alpha \in \mathbb{Z}$$

$$\boxed{S = \{4\alpha + 2\,;3\alpha + 1\}\,;\alpha \in \mathbb{Z}}$$

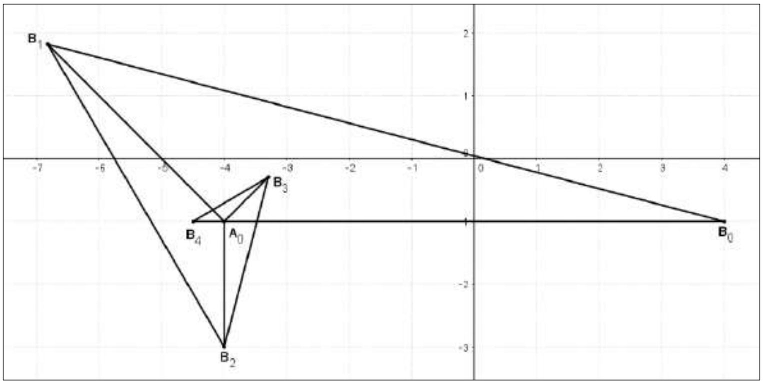
5. تعيين قيّم العدد الطبيعي n التي من أجلها تنتمي النقطة B_n إلى المستقيم (Δ)

$$B_n \in (\Delta) \Rightarrow \left(\overrightarrow{A_0B_0};\overrightarrow{A_0B_n}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\Rightarrow \left(\overrightarrow{A_0B_0};\overrightarrow{A_0B_1}\right) + \left(\overrightarrow{A_0B_1};\overrightarrow{A_0B_2}\right) + \cdots + \left(\overrightarrow{A_0B_{n-1}};\overrightarrow{A_0B_n}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\Rightarrow \frac{3\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} + \cdots + \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow n\frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow \frac{3n}{4} = \frac{1}{2} + k$$

$$\Rightarrow 3n - 4k = 2 \Rightarrow \boxed{n = 4\alpha + 2\,;\alpha \in \mathbb{N}}$$



* * *

حل التمرين 86.

.1 $L = 2(-1 + i\sqrt{3})$

أ. كتابة العدد المركّب L على شكله الأسّي

$$L = 2(-1 + i\sqrt{3}) = 4\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \boxed{4e^{i\frac{2\pi}{3}}}$$

ب. حل في مجموعة الأعداد المركّبة ℂ المعادلة : $z^2 - L = 0$

$$z = re^{i\theta}\,; z^2 - L = 0 \Rightarrow z^2 = L \Rightarrow r^2e^{i2\theta} = 4e^{i\frac{2\pi}{3}} \Rightarrow \begin{cases} r^2 = 4 \\ 2\theta = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r = 2 \\ \theta = \dfrac{\pi}{3} + k\pi \end{cases} \Rightarrow z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 1 + i\sqrt{3}\,;\ z_2 = 2e^{i\frac{4\pi}{3}} = -1 - i\sqrt{3}$$

$$\boxed{S = \{1 + i\sqrt{3}\,; -1 - i\sqrt{3}\}}$$

.2 $\overline{z_1} = 1 - i\sqrt{3} = 1 + i\sqrt{3}$ ، $z_2 = -z_1 = -1 - i\sqrt{3}$

أ. بيان أنّ $(z_1)^{2013}$ عدد حقيقي

$$\overline{z_1} = 1 - i\sqrt{3} \Rightarrow z_1 = 1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \Rightarrow (z_1)^{2013} = 2e^{i\frac{2013\pi}{3}}$$

$$(z_1)^{2013} = 2e^{i671\pi} = 2e^{i\pi} = -2 \Rightarrow \boxed{(z_1)^{2013} \in \mathbb{R}}$$

ب. تعيين قيم n التي يكون من أجلها العدد $\left(\frac{z_2\times e^{i\frac{\pi}{2}}}{2}\right)^n$ تخيليا صرفا

$$\left(\frac{z_2 \times e^{i\frac{\pi}{2}}}{2}\right)^n = \left(\frac{-z_1 \times e^{i\frac{\pi}{2}}}{2}\right)^n = \left(\frac{2e^{i\frac{4\pi}{3}} \times e^{i\frac{\pi}{2}}}{2}\right)^n = e^{i\frac{11n\pi}{6}}$$

$$\arg\left(\frac{z_2\times e^{i\frac{\pi}{2}}}{2}\right)^n=\frac{\pi}{2}+k\pi\Rightarrow\frac{11n\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi\Rightarrow 11n=6k+3$$

$$=3(2k+1)\Rightarrow n=3k';k'=2k+1$$

منه نستنتج أنّ قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد المركّب $\left(\frac{z_2\times e^{i\frac{\pi}{2}}}{2}\right)^n$ تخيليا صرفا هي المضاعفات الطبيعية الفردية للعدد 3 أي 3 ، 9 ، 15 ، 21 ، ...

3. **تعيين مجموعة النقط M لمّا يتغيّر θ على المجال $\left[\frac{4\pi}{3};\frac{10\pi}{3}\right]$**

$$z=\frac{2}{z_2}e^{i\theta}+1=\frac{2}{2e^{i\frac{4\pi}{3}}}e^{i\theta}+1=e^{i\left(\theta-\frac{4\pi}{3}\right)}+1\Rightarrow z-1=e^{i\left(\theta-\frac{4\pi}{3}\right)}$$

بما أنّ $\theta\in\left[\frac{4\pi}{3};\frac{10\pi}{3}\right]$ ، فإنّ $\left(\theta-\frac{4\pi}{3}\right)\in[0;2\pi]$. نضع : $z_A=1$

$$z-1=e^{i\left(\theta-\frac{4\pi}{3}\right)}\Rightarrow\boxed{\begin{cases}|z-z_A|=1\\ \arg(z-z_A)\in[0;2\pi]\end{cases}}$$

منه نستنتج أنّ مجموعة النقط M لمّا يتغيّر θ على المجال $\left[\frac{4\pi}{3};\frac{10\pi}{3}\right]$ هي الدائرة التي مركزها النقطة $A(1;0)$ ونصف قطرها $r=1$.

* * *

حل التمرين 87.

$z_B=\sqrt{3}-i$ ، $z_A=\sqrt{3}+i$

1. **كتابة العددين z_A و z_B على الشكل الأسّي**

$$z_A=\sqrt{3}+i=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=\boxed{2e^{i\frac{\pi}{6}}};\ z_B=\overline{z_A}=\boxed{2e^{-i\frac{\pi}{6}}}$$

انشاء النقطتين A و B (انظر الشكل في نهاية التمرين)

2. **R دوران مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{3}$**

أ. **تعيين $z_{A'}$ لاحقة النقطة A' صورة A بالدوران R**

$$R(A)=A'\Rightarrow z_{A'}=e^{i\frac{\pi}{3}}z_A=e^{i\frac{\pi}{3}}\left(2e^{i\frac{\pi}{6}}\right)=\boxed{2e^{i\frac{\pi}{2}}}$$

ب. **كتابة $z_{A'}$ على الشكل الجبري وانشاء النقطة A'**

$$z_{A'}=2e^{i\frac{\pi}{2}}=\boxed{2i}$$

3. **كتابة على الشكل المثلثي $z_{B'}$ لاحقة B' صورة B بالتحاكي h وانشاء النقطة B'**

$$z_{B'}=-\frac{3}{2}z_B=-3e^{-i\frac{\pi}{6}}=3e^{i\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)}=3e^{i\frac{5\pi}{6}}=\boxed{3\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)}$$

4. $\boldsymbol{r}$ نصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث $\boldsymbol{OA'B'}$ التي مركزها $\boldsymbol{\omega}$ ذات اللاحقة $\boldsymbol{z_\omega}$

أ. التحقق من صحة العبارات:

$$① \ z_\omega\overline{z_\omega} = r^2 \ ; \ ② \ (z_\omega - 2i)(\overline{z_\omega} + 2i) = r^2$$

$$③ \ \left(z_\omega + \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i\right)\left(\overline{z_\omega} + \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i\right) = r^2$$

$$z_{B'} = 3\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = 3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$$

$$O\omega = A'\omega = B'\omega = r \Rightarrow O\omega^2 = A'\omega^2 = B'\omega^2 = r^2$$

$$z_\omega\overline{z_\omega} = |z_\omega|^2 = O\omega^2 = r^2$$

$$(z_\omega - 2i)(\overline{z_\omega} + 2i) = (z_\omega - z_{A'})(\overline{z_\omega - z_{A'}}) = |z_\omega - z_{A'}|^2 = A'\omega^2 = r^2$$

$$\left(z_\omega + \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i\right)\left(\overline{z_\omega} + \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i\right) = (z_\omega - z_{B'})(\overline{z_\omega - z_{B'}})$$

$$= |z_\omega - z_{B'}|^2 = B'\omega^2 = r^2$$

ب. استنتاج أنّ : $\boldsymbol{z_\omega - \overline{z_\omega} = 2i}$ و $\boldsymbol{z_\omega + \overline{z_\omega} = \frac{-4\sqrt{3}}{3}}$

$$(z_\omega - 2i)(\overline{z_\omega} + 2i) = r^2 \Rightarrow \underbrace{z_\omega\overline{z_\omega}}_{r^2} + (z_\omega - \overline{z_\omega})2i + 4 = r^2$$

$$\Rightarrow (z_\omega - \overline{z_\omega})2i = -4 \Rightarrow z_\omega - \overline{z_\omega} = -\frac{4}{2i} = \boxed{2i}$$

$$\left(z_\omega + \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i\right)\left(\overline{z_\omega} + \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i\right) = r^2$$

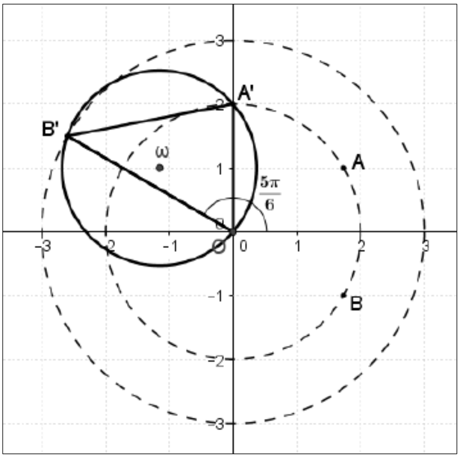
$$\Rightarrow \underbrace{z_\omega\overline{z_\omega}}_{r^2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}(z_\omega + \overline{z_\omega}) + \frac{3}{2}i\,\underbrace{(z_\omega - \overline{z_\omega})}_{2i} + 9 = r^2$$

$$\Rightarrow \frac{3\sqrt{3}}{2}(z_\omega + \overline{z_\omega}) = -6 \Rightarrow z_\omega + \overline{z_\omega} = \frac{-6}{\frac{3\sqrt{3}}{2}} = \frac{-4}{\sqrt{3}} = \boxed{\frac{-4\sqrt{3}}{3}}$$

ج. استنتاج $\boldsymbol{z_\omega}$ لاحقة النقطة $\boldsymbol{\omega}$ وقيمة $\boldsymbol{r}$

$$\begin{cases} z_\omega - \overline{z_\omega} = 2i \\ z_\omega + \overline{z_\omega} = \dfrac{-4\sqrt{3}}{3} \end{cases} \Rightarrow 2z_\omega = \frac{-4\sqrt{3}}{3} + 2i \Rightarrow \boxed{z_\omega = \frac{-2\sqrt{3}}{3} + i}$$

$$r = O\omega = |z_\omega| = \left|\frac{-2\sqrt{3}}{3} + i\right| = \boxed{\frac{\sqrt{21}}{3}}$$



* * *

حل التمرين 88.

$z_A=-2$، $z_B=-1+i$ ، $z_I=i$ ، $z'=\frac{iz+i+1}{z+2}$

1. أ. التحقق من أنّ : $z'=\frac{i(z+1-i)}{z+2}$

$$z'=\frac{iz+i+1}{z+2}=\boxed{\frac{i(z+1-i)}{z+2}}$$

ب. بيان أنّه إذا كانت النقطة M تنتمي إلى (Δ) محور القطعة $[AB]$ فإنّ النقطة M' تنتمي إلى دائرة (C) يُطلب تعيين عناصرها

$$z'=\frac{i(z+1-i)}{z+2}=i\frac{z-z_B}{z-z_A}\Rightarrow|z'|=|i|\frac{|z-z_B|}{|z-z_A|}\Rightarrow OM'=\frac{BM}{AM}$$

$$M\in(\Delta)\Rightarrow AM=BM\Rightarrow\boxed{OM'=1}$$

منه نستنتج أنّه إذا كانت النقطة M تنتمي إلى (Δ) محور القطعة $[AB]$ فإنّ النقطة M' تنتمي إلى الدائرة (C) التي مركزها O ونصف قطرها 1

ج. تعيين طبيعة (E) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي بحيث يكون z' تخيليا صرفا

$$M\in(E)\Rightarrow\arg(z')=\frac{\pi}{2}+k\pi\Rightarrow\arg\left(i\frac{z-z_B}{z-z_A}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi$$

$$\Rightarrow\arg(i)+\arg\left(\frac{z-z_B}{z-z_A}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi\Rightarrow\frac{\pi}{2}+(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BM})=\frac{\pi}{2}+k\pi$$

$$\Rightarrow(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BM})=k\pi\Rightarrow\boxed{M\in(AB)-\{A;B\}}$$

منه نستنتج أنّ المجموعة (E) هي المستقيم (AB) باستثناء النقطتين A و B

.2 أ. التحقق من أنّ : $z' - i = \frac{1-i}{z+2}$

$$z' - i = \frac{iz + i + 1}{z+2} - i = \frac{iz + i + 1 - iz - 2i}{z+2} = \boxed{\frac{1-i}{z+2}}$$

ب. استنتاج أنّ $IM' \times AM = \sqrt{2}$ و $\left(\vec{u};\overrightarrow{IM'}\right) + \left(\vec{u};\overrightarrow{AM}\right) = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$

$$z' - i = \frac{1-i}{z+2} \Rightarrow (z' - i)(z+2) = 1 - i \Rightarrow (z' - z_I)(z - z_A) = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |z' - z_I||z - z_A| = \sqrt{2} \\ \arg[(z' - z_I)(z - z_A)] = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} IM' \times AM = \sqrt{2} \\ \left(\vec{u};\overrightarrow{IM'}\right) + \left(\vec{u};\overrightarrow{AM}\right) = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}}$$

ج. بيان أنّه إذا كانت النقطة M تنتمي إلى الدائرة (Γ) ذات المركز A ونصف القطر 1 فإنّ النقطة M' تنتمي إلى مجموعة يُطلب تعيينها

$$M \in (\Gamma) \Rightarrow AM = 1 \Rightarrow \boxed{IM' = \sqrt{2}}$$

منه نستنتج أنّه إذا كانت النقطة M تنتمي إلى الدائرة (Γ) ذات المركز A ونصف القطر 1 فإنّ النقطة M' تنتمي إلى الدائرة (Γ') ذات المركز I ونصف القطر $\sqrt{2}$

.3 $z_E = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

أ. بيّن أنّ النقطة E تنتمي إلى الدائرة (Γ) وأنّ $\left(\vec{u};\overrightarrow{AE}\right) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

$$IE = |z_E - z_A| = \left|-\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\right| = \left|\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = 1 \Rightarrow \boxed{E \in (\Gamma)}$$

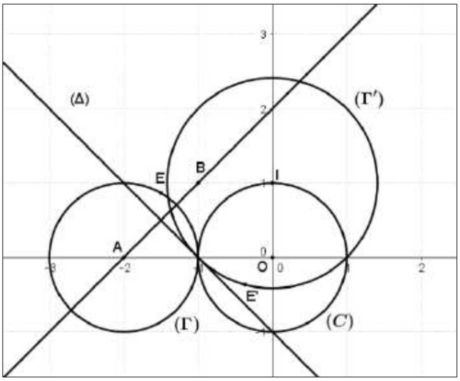
$$\left(\vec{u};\overrightarrow{AE}\right) = \arg(z_E - z_A) = \arg\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \boxed{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}$$

ب. إنشاء النقطة E' المرفقة بالنقطة E

$$\begin{cases} IE' \times AE = \sqrt{2} \\ \left(\vec{u};\overrightarrow{IE'}\right) + \left(\vec{u};\overrightarrow{AE}\right) = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} IE' = \sqrt{2} \\ \left(\vec{u};\overrightarrow{IE'}\right) = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} IE' = \sqrt{2} \\ \left(\vec{u};\overrightarrow{IE'}\right) = -\frac{7\pi}{12} + 2k\pi \end{cases}$$

منه نستنتج أنّ E' نقطة من الدائرة (Γ') حيث قيس الزاوية $\left(\vec{u};\overrightarrow{IE'}\right) = -\frac{7\pi}{12}$



حل التمرين 89.

$\boldsymbol{z_2=\sqrt{3}(1+i)}$ ، $\boldsymbol{z_1=r^2(\sin\theta+i\cos\theta)}$ ، $\boldsymbol{z_0=r(-\cos\theta+i\sin\theta)}$

1. **كتابة الأعداد z_0 ، z_1 و z_2 على الشكل المثلثي**

$$z_0=r(-\cos\theta+i\sin\theta)=\boxed{r\left[\cos(\pi-\theta)+i\sin(\pi-\theta)\right]}$$

$$z_1=r^2(\sin\theta+i\cos\theta)=\boxed{r^2\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right]}$$

$$z_2=\sqrt{3}(1+i)=\sqrt{6}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\boxed{\sqrt{6}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}$$

2. أ. **تعيين العددين الحقيقيين r و θ بحيث يكون : $z_1=\overline{z_0}$**

$$z_1=\overline{z_0}\Rightarrow\begin{cases}r^2=r\\ \frac{\pi}{2}-\theta=-\pi+\theta+2k\pi\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}r(r-1)=0\\ 2\theta=\frac{3\pi}{2}-2k\pi\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}r=1\\ \theta=\frac{3\pi}{4}-k\pi\end{cases}\Rightarrow\boxed{r=1\ ;\ \theta=\frac{3\pi}{4}}$$

لاحظ أنّه من أجل $k=1$: $\theta=-\frac{\pi}{4}$ وهي حالة مرفوضة لأنّ $\theta\in[0;\pi]$

ب. **تعيين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون العدد $\left(\frac{z_0}{z_1}\right)^n$ حقيقيا**

$$r=1\ ;\ \theta=\frac{3\pi}{4}\Rightarrow z_0=e^{i\frac{\pi}{4}}\ ;z_1=e^{-i\frac{\pi}{4}}\Rightarrow\frac{z_0}{z_1}=e^{i\frac{\pi}{2}}\Rightarrow\left(\frac{z_0}{z_1}\right)^n=e^{i\frac{n\pi}{2}}$$

$$\left(\frac{z_0}{z_1}\right)^n\in\mathbb{R}\Rightarrow\arg\left[\left(\frac{z_0}{z_1}\right)^n\right]=k\pi\Rightarrow\frac{n\pi}{2}=k\pi\Rightarrow\boxed{n=2k\ ;k\in\mathbb{N}}$$

3. **نفرض $r=1$ و $\theta=\frac{\pi}{3}$**

أ. **تعيين z_G لاحقة النقطة G مرجح الجملة $\{(A;2),(B;2),(C;-1)\}$**

$$r = 1\ ;\ \theta = \frac{\pi}{3} \Rightarrow z_0 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = \boxed{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}\ ; z_1 = e^{i\frac{\pi}{6}} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i}$$

$$G\{(A;2),(B;2),(C;-1)\} \Rightarrow z_G = \frac{2z_A + 2z_B - z_C}{3}$$

$$z_G = \frac{-1+\sqrt{3}i+\sqrt{3}+i-\sqrt{3}-\sqrt{3}i}{3} = \boxed{-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}i}$$

ب. تعيين طبيعة المجموعة (Γ)

$$M \in (\Gamma) \Rightarrow \left\|2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}\right\| = 3 \Rightarrow 3\left\|\overrightarrow{MG}\right\| = 3 \Rightarrow \boxed{\left\|\overrightarrow{MG}\right\| = 1}$$

منه نستنتج أنّ (Γ) هي الدائرة التي مركزها G ونصف قطرها 1.

* * *

حل التمرين 90.

1. **تعيين العددين الحقيقيين a و b**

$$(a-i)^2 = (a^2-1)-2ai = 2+2i\sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} a^2-1=2 \\ -2a = 2\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \boxed{a = -\sqrt{3}}$$

$$(b-i)^2 = (b^2-1)-2bi = 2-2i\sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} b^2-1=2 \\ -2b = -2\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \boxed{b = \sqrt{3}}$$

2. **أ. حل في مجموعة الأعداد المركبّة المعادلة : $z^2-4z+16=0$**

$$\Delta = -48 = \left(4\sqrt{3}i\right)^2\ ;\ \boxed{S = \left\{2+2\sqrt{3}i\ ;\ 2-2\sqrt{3}i\right\}}$$

ب. استنتج في المجموعة C حلول المعادلة : $z^4-4z^2+16=0$

$$z^4-4z^2+16=0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha^2-4\alpha+16=0 \\ \alpha = z^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z^2 = 2+2\sqrt{3}i = \left(-\sqrt{3}-i\right)^2 \Rightarrow z_1 = \sqrt{3}+i\ ; z_2 = -\sqrt{3}-i \\ \text{أو} \\ z^2 = 2-2\sqrt{3}i = \left(\sqrt{3}-i\right)^2 \Rightarrow z_3 = \sqrt{3}-i\ ; z_4 = -\sqrt{3}+i \end{cases}$$

$$\boxed{S = \left\{\sqrt{3}+i\ ; -\sqrt{3}-i\ ;\ \sqrt{3}-i\ ;\ -\sqrt{3}+i\right\}}$$

3. $\boldsymbol{y_k = \left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i\right)^k - \left(\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}i\right)^k}$

أ. بيان أنّ $y_k = \frac{1}{2^{k-1}}\sin\frac{k\pi}{3}$

$$y_k = \left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i\right)^k - \left(\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}i\right)^k = \left(\frac{1}{2}\right)^k\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^k - \left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^k\right]$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^k \left[\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^k - \left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right)^k\right]$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^k \left[\cos\frac{k\pi}{3} + i\sin\frac{k\pi}{3} - \cos\frac{k\pi}{3} + i\sin\frac{k\pi}{3}\right] = \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(2i\sin\frac{k\pi}{3}\right)$$

$$= \boxed{\frac{1}{2^{k-1}} i \sin\frac{k\pi}{3}}$$

استنتاج أنّ $y_{2013} = 0$

$$y_{2013} = \frac{1}{2^{2012}} i \sin\frac{2013\pi}{3} = \frac{1}{2^{2012}} i \sin(671\pi) = \boxed{0}$$

ب. كتابة العدد $2^{2017}y_{2017}$ على الشكل $\sqrt{\alpha i}$

$$2^{2017}y_{2017} = 2^{2017}\left(\frac{1}{2^{2016}} i \sin\frac{2017\pi}{3}\right) = 2i\sin\frac{\pi}{3} = \boxed{\sqrt{3}i}$$

4. $z_A = 2 + 2i\sqrt{3}$ ، $z_B = 2 - 2i\sqrt{3}$ ، $z_C = 5 + \sqrt{3}i$

أ. التحقق أنّ $z_C = \frac{3}{2}z_A + z_B$

$$\frac{3}{2}z_A + z_B = 3 + 3\sqrt{3}i + 2 - 2i\sqrt{3} = 5 + \sqrt{3}i = \boxed{z_C}$$

ب. بيان أنّ : $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = 2^{2017}y_{2017}$

$$\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \frac{-3 - 3\sqrt{3}i}{-3 + \sqrt{3}i} = \frac{(-3 - 3\sqrt{3}i)(-3 - \sqrt{3}i)}{12} = \frac{12\sqrt{3}i}{12} = \boxed{\sqrt{3}i}$$

تعيين طبيعة التحويل النقطي f وذكر عناصره المميزة وعبارته المركّبة

$$\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \sqrt{3}i \Rightarrow \boxed{z_B - z_C = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}(z_A - z_C)}$$

منه نستنتج أنّ التحويل f تشابه مباشر مركزه C ، نسبته $\sqrt{3}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$

5. $z_0 = \sqrt{3} - i$ ، $A_{n+1} = f(A_n)$ ، $u_0 = A_0A_1$ ، $u_n = A_nA_{n+1}$

أ. بيان أنّ (u_n) متتالية هندسية يُطلب تحديد حدّها الأول u_0 وأساسها q

$$u_{n+1} = A_{n+1}A_{n+2} = \sqrt{3}A_nA_{n+1} = \sqrt{3}u_n \Rightarrow \boxed{q = \sqrt{3}}$$

$$A_1 = f(A_0) \Rightarrow z_1 - z_C = \sqrt{3}i(z_0 - z_C) \Rightarrow z_1 = \sqrt{3}iz_0 + \left(1 - \sqrt{3}i\right)z_C$$

$$z_1 = \sqrt{3}i\left(\sqrt{3} - i\right) + \left(1 - \sqrt{3}i\right)\left(5 + \sqrt{3}i\right) = \left(8 + \sqrt{3}\right) + \left(3 - 4\sqrt{3}\right)i$$

$$u_0 = A_0A_1 = |z_1 - z_0| = \left|8 + \left(4 - 4\sqrt{3}\right)i\right| \Rightarrow \boxed{u_0 = \sqrt{128 - 32\sqrt{3}}}$$

منه نستنتج أنّ (u_n) متتالية هندسية حدّها الأول $u_0 = \sqrt{128 - 32\sqrt{3}}$ وأساسها $q = \sqrt{3}$

ب. استنتاج عبارة u_n بدلالة n وحساب المجموع S_n

$$u_n = u_0 \times q^n = \boxed{\sqrt{128-32\sqrt{3}} \times \sqrt{3}^{n}}$$

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0\left(\frac{q^{n+1}-1}{q-1}\right)$$

$$\boxed{S_n = \frac{\sqrt{128-32\sqrt{3}}}{\sqrt{3}-1}\left(\sqrt{3}^{n+1}-1\right)}$$

ج. البرهان بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$\boldsymbol{u_0 \times u_1 \times \ldots \times u_n = \left[\left(128-32\sqrt{3}\right)^2 \times 3^n\right]^{\frac{n+1}{4}}}$$

تحقيق التراجع: $u_0 = \left[\left(128-32\sqrt{3}\right)^2\right]^{\frac{1}{4}} = \sqrt{128-32\sqrt{3}}$ (محققة)

فرض التراجع: نفرض أنّ $u_0 \times u_1 \times \ldots \times u_n = \left[\left(128-32\sqrt{3}\right)^2 \times 3^n\right]^{\frac{n+1}{4}}$

برهان التراجع: نبرهن أنّ $u_0 \times u_1 \times \ldots \times u_{n+1} = \left[\left(128-32\sqrt{3}\right)^2 \times 3^{n+1}\right]^{\frac{n+2}{4}}$

$$u_0 \times u_1 \times \ldots \times u_{n+1} = \left[\left(128-32\sqrt{3}\right)^2 \times 3^n\right]^{\frac{n+1}{4}} \times u_{n+1}$$

$$= \left[\left(128-32\sqrt{3}\right)^2 \times 3^n\right]^{\frac{n+1}{4}} \times u_0 \times q^{n+1}$$

$$= \left[\left(128-32\sqrt{3}\right)^2 \times 3^n\right]^{\frac{n+1}{4}} \times \left[\left(128-32\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{n+1}{2}}\right]$$

$$= \left(128-32\sqrt{3}\right)^{\frac{2n+2}{4}} \times 3^{\frac{n(n+1)}{4}} \times \left(128-32\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{n+1}{2}}$$

$$= \left(128-32\sqrt{3}\right)^{\frac{2(n+2)}{4}} \times 3^{\frac{(n+1)(n+2)}{4}} = \boxed{\left[\left(128-32\sqrt{3}\right)^2 \times 3^{n+1}\right]^{\frac{n+2}{4}}}$$

* * *

حل التمرين 91.

I- $z^3 - (4+\alpha i)z^2 + (13+4\alpha i)z - 13\alpha i = 0 \ldots (E)$

1. بيان أنّ المعادلة (E) تقبل حلا تخيليا صرفا يُطلب تعيينه

$$z_0 = iy \,;\, z_0 \in S_{(E)} \Rightarrow (iy)^3 - (4+\alpha i)(iy)^2 + (13+4\alpha i)(iy) - 13\alpha i = 0$$

$$\Rightarrow -iy^3 + y^2(4+\alpha i) + (13+4\alpha i)(iy) - 13\alpha i = 0$$

$$\Rightarrow (4y^2 - 4\alpha y) + (-y^3 + \alpha y^2 + 13y - 13\alpha)i = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4y(y-\alpha)=0 \\ -y^3+\alpha y^2+13y-13\alpha=0 \end{cases} \Rightarrow y=\alpha \Rightarrow \boxed{z_0=\alpha i}$$

.2 تعيين العددين الحقيقيين a و b

	1	$-4-\alpha i$	$13+4\alpha i$	$-13\alpha i$
αi				
	1	-4	13	0

$$\boxed{a=-4\,;b=13}$$

.3 حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E)

$(z-\alpha i)(z^2-4z+13)=0 \Rightarrow z-\alpha i=0$ أو $z^2-4z+13=0$

$z-\alpha i=0 \Rightarrow z_0=\alpha i$

$z^2-4z+13=0\,;\ \Delta=-36=(6i)^2\,;z_1=2+3i\,;z_2=2-3i$

$\boxed{S=\{\alpha i\,;2+3i\,;2-3i\}}$

II- $z_A=\alpha i$ ، $z_B=2+3i$ ، $z_C=\overline{z_B}$ و $z_G=5$

.1 بيان أنّ لاحقة النقطة E هي : $z_E=\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)+i\left(\frac{5+\alpha}{2}\right)$

$$E=S(B)\Rightarrow z_E-z_A=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}(z_B-z_A)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)(z_B-z_A)$$

$$z_E=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)z_B+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)z_A=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)(2+3i)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)\alpha i$$

$$\boxed{z_E=\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)+i\left(\frac{5+\alpha}{2}\right)}$$

.2 تعيين z_F

$$z_I=\frac{z_A+z_B}{2}=1+\frac{3+\alpha}{2}i$$

$$F=r(G)\Rightarrow z_F-z_I=e^{-i\frac{\pi}{2}}(z_G-z_I)=-i(z_G-z_I)$$

$$z_F=-iz_G+(1+i)z_I=-5i+(1+i)\left(1+\frac{3+\alpha}{2}i\right)$$

$$\boxed{z_F=\left(\frac{-1-\alpha}{2}\right)+i\left(\frac{\alpha-5}{2}\right)}$$

.3 حساب z_G-z_A و z_F-z_E وكتابة العدد $\frac{z_G-z_A}{z_F-z_E}$ على شكله الأسّي

$z_G-z_A=\boxed{5-\alpha i}$

$$z_F - z_E = \left(\frac{-1-\alpha}{2}\right) + i\left(\frac{\alpha-5}{2}\right) - \left(\frac{\alpha-1}{2}\right) - i\left(\frac{5+\alpha}{2}\right) = \boxed{-\alpha-5i}$$

$$\frac{z_G - z_A}{z_F - z_E} = \frac{5-\alpha i}{-\alpha-5i} = \frac{i(-\alpha-5i)}{-\alpha-5i} = i = \boxed{e^{i\frac{\pi}{2}}}$$

$$\frac{z_G - z_A}{z_F - z_E} = e^{i\frac{\pi}{2}} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} AG = EF \\ \left(\overrightarrow{EF};\overrightarrow{AG}\right) = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}}$$

منه نستنتج أنّ القطعتين المستقيمتين $[AG]$ و $[EF]$ متقايستان ومتعامدتان

4. أ. بيان أنّ : $\boldsymbol{\frac{z_F-z_E}{z_A-z_E} = \frac{\left(2\alpha^2-12\alpha+50\right)+i\left(2\alpha^2-10\right)}{(1-\alpha)^2+(\alpha-5)^2}}$

$$\frac{z_F - z_E}{z_A - z_E} = \frac{-\alpha-5i}{-\left(\frac{\alpha-1}{2}\right) - i\left(\frac{5-\alpha}{2}\right)} = \frac{2\alpha+10i}{(\alpha-1)+i(5-\alpha)}$$

$$= \frac{(2\alpha+10i)\left[(\alpha-1)-i(5-\alpha)\right]}{(\alpha-1)^2+(5-\alpha)^2}$$

$$= \boxed{\frac{\left(2\alpha^2-12\alpha+50\right)+i\left(2\alpha^2-10\right)}{(1-\alpha)^2+(\alpha-5)^2}}$$

ب. تعيين قيمتي $\boldsymbol{\alpha}$ التي تكون من أجلها النقط $\boldsymbol{A}$ ، $\boldsymbol{E}$ و $\boldsymbol{F}$ في استقامية

A ، E و F في استقامية $\Rightarrow \dfrac{z_F-z_E}{z_A-z_E} \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha^2 - 10 = 0 \\ (1-\alpha)^2 + (\alpha-5)^2 \neq 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha \in \left\{-\sqrt{5};\sqrt{5}\right\}}$$

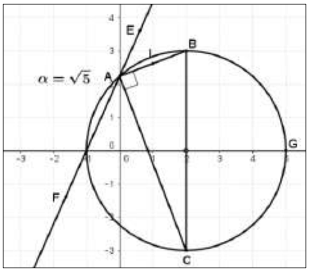
ج. بيان أنّ $\boldsymbol{A}$ تنتمي إلى الدائرة $\boldsymbol{(\Gamma)}$ التي قطرها $\boldsymbol{[BC]}$

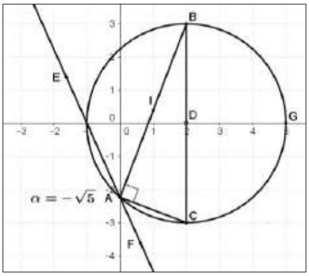
$$\alpha = -\sqrt{5} :\ \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\3+\sqrt{5}\end{pmatrix} ;\ \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\-3+\sqrt{5}\end{pmatrix} ;\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \Rightarrow \boxed{A \in (\Gamma)}$$

$$\alpha = \sqrt{5} :\ \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\3-\sqrt{5}\end{pmatrix} ;\ \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\-3-\sqrt{5}\end{pmatrix} ;\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \Rightarrow \boxed{A \in (\Gamma)}$$

د. استنتاج طبيعة المثلث $\boldsymbol{ABC}$

$$A \in (\Gamma) \Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC} \Rightarrow \boxed{\text{المثلث } ABC \text{ قائم في } A}$$





* * *

حل التمرين 92.

$\boldsymbol{z_1 = \frac{1}{\tan\alpha} + i}$ و $\boldsymbol{z_2 = \frac{1}{z_1 \sin\alpha}}$ و $\boldsymbol{(0 < \alpha < \pi)}$

1. حساب طويلة وعمدة كلا من $\boldsymbol{z_1}$ و $\boldsymbol{z_2}$

$$|z_1| = \left|\frac{1}{\tan\alpha} + i\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{\tan\alpha}\right)^2 + 1} = \sqrt{\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} + 1} = \sqrt{\frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{\sin^2\alpha}} = \frac{1}{|\sin\alpha|} = \boxed{\frac{1}{\sin\alpha}}\ ;\ \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\arg(z_1) = \theta_1 \Rightarrow \cos\theta_1 = \frac{\frac{1}{\tan\alpha}}{\frac{1}{\sin\alpha}} = \frac{\sin\alpha}{\tan\alpha} = \cos\alpha\ ; \sin\theta_1 = \frac{1}{\frac{1}{\sin\alpha}} = \sin\alpha$$

$$\Rightarrow \boxed{\arg(z_1) = \alpha}$$

$$|z_2| = \left|\frac{1}{z_1 \sin\alpha}\right| = \frac{1}{|z_1||\sin\alpha|} = \frac{1}{\frac{1}{\sin\alpha} \times \sin\alpha} = \boxed{1}$$

$$\arg(z_2) = \arg\left(\frac{1}{z_1 \sin\alpha}\right) = \arg(1) - \arg(z_1 \sin\alpha) = -\arg(z_1) = \boxed{-\alpha}$$

2. بيان أنّ $\boldsymbol{z_2 = \overline{z_1} \sin\alpha}$

$$z_1 = \frac{1}{\sin\alpha} e^{i\alpha} \Rightarrow \overline{z_1} = \frac{1}{\sin\alpha} e^{-i\alpha} \Rightarrow \boxed{\overline{z_1} \sin\alpha = e^{-i\alpha} = z_2}$$

استنتاج العددين $\boldsymbol{z_1}$ و $\boldsymbol{z_2}$

$$z_2 \times z_1 = 2 \Rightarrow |z_2 \times z_1| = 2 \Rightarrow \frac{1}{\sin\alpha} = 2 \Rightarrow \sin\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \boxed{z_1 = \sqrt{3} + i}\ ; z_2 = \overline{z_1} \sin\alpha = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3} - i\right) \Rightarrow \boxed{z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} i}$$

3. تعيين العدد الطبيعي $\boldsymbol{n}$ حتى يكون $\left(\frac{z_1}{\sqrt{2}}\right)^n - 2(z_2)^n$ حقيقي سالب

$$\alpha = \frac{\pi}{4} : z_1 = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \,; z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i) = e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$\left(\frac{z_1}{\sqrt{2}}\right)^n - 2(z_2)^n = \left(\frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}\right)^n - 2\left(e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^n = e^{i\frac{n\pi}{4}} - 2e^{-i\frac{n\pi}{4}}$$

$$= \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) - 2\cos\left(-\frac{n\pi}{4}\right) - 2i\sin\left(-\frac{n\pi}{4}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) - 2\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + 2i\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)$$

$$= -\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + 3i\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)$$

$$\left(\frac{z_1}{\sqrt{2}}\right)^n - 2(z_2)^n < 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) = 0 \\ \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) > 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{n\pi}{4} = 2k\pi \Rightarrow \boxed{n = 8k \,; k \in \mathbb{N}}$$

4. $\boldsymbol{f(x) = \frac{\sin x}{\cos^3 x}}$ ، $\boldsymbol{D_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}}$ و $(\boldsymbol{C_f})$ تمثيلها البياني

أ. بيان أنّ الدالة f فردية ودورية دورها π واستنتاج مجال دراستها

D_f متناظر بالنسبة إلى الصفر، ومن أجل كل $x \in D_f$ لدينا :

$$f(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos^3(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos^3 x} = -f(x) \Rightarrow \boxed{\text{الدالة } f \text{ فردية}}$$

$$f(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos^3(x+\pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos^3 x} = f(x) \Rightarrow \boxed{\text{الدالة } f \text{ دورية دورها } \pi}$$

بما أنّ الدالة f فردية ودورية دورها π ، فإنّ مجال دراستها هو $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$

ب. دراسة تغيّرات الدالة f

$$f(x) = \frac{\sin x}{\cos^3 x} \,; D_f = \left[0;\frac{\pi}{2}\right[$$

$$f'(x) = \frac{\cos^4 x + 3\cos^2 x \sin^2 x}{\cos^6 x} = \boxed{\frac{\cos^2 x + 3\sin^2 x}{\cos^4 x}}$$

بما أنّ $f'(x) \geq 0$ ، فإنّ الدالة f متزايدة على المجال $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} \frac{\pi}{2}} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos^3 x} \begin{matrix} \to 1 \\ \to 0^+ \end{matrix} = +\infty \,; f(0) = 0$$

إنشاء المنحنى $(\boldsymbol{C_f})$ على المجال $[-\boldsymbol{\pi};\boldsymbol{\pi}]$

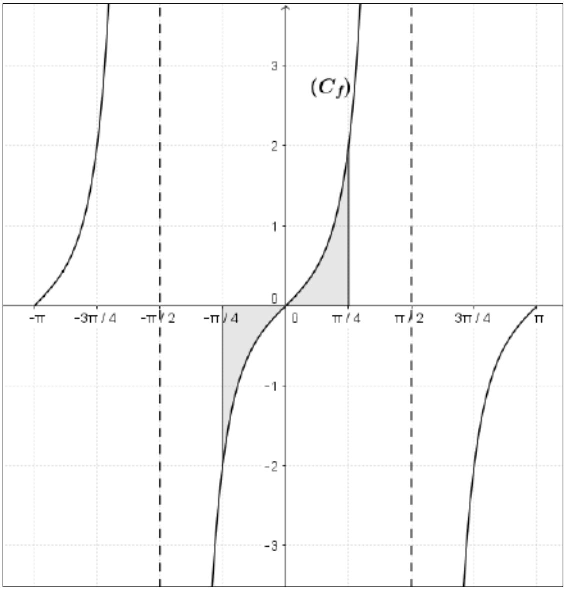
نرسم المنحنى (C_f) على المجال $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ ، ثمّ نستنتج رسمه على المجال $\left]-\frac{\pi}{2};0\right]$ بالتناظر المركزي بالنسبة إلى المبدأ O (لأنّ f دالة فردية) ، ثمّ نكمل الرسم على المجالين $\left]-\pi;-\frac{\pi}{2}\right[$ و $\left]\frac{\pi}{2};\pi\right]$.

ج. حساب المساحة

$$f(x)=\frac{\sin x}{\cos^3 x}=-(-\sin x)\cos^{-3}x\Rightarrow F(x)=\frac{\cos^{-2}x}{2}=\boxed{\frac{1}{2\cos^2 x}}$$

$$\mathcal{A}=-\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}f(x)\,dx+\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}f(x)\,dx=-[F(x)]_{-\frac{\pi}{4}}^{0}+[F(x)]_{0}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$\mathcal{A}=-F(0)+F\left(-\frac{\pi}{4}\right)+F\left(\frac{\pi}{4}\right)-F(0)=-\frac{1}{2}+1+1-\frac{1}{2}=\boxed{1\,ua}$$



* * *

حل التمرين 93.

1. $\boldsymbol{P(z)=z^3-(3+2\sqrt{3})z^2+\left(7+4\sqrt{3}\right)z-(5+2\sqrt{3})}$

أ. تعيين العددين الحقيقيين a و b حيث : $\boldsymbol{P(z)=(z-1)(z^2+az+b)}$

	1	$-3-2\sqrt{3}$	$7+4\sqrt{3}$	$-5-2\sqrt{3}$
1				
	1	$-2-2\sqrt{3}$	$5+2\sqrt{3}$	0

$$\boxed{a=-2-2\sqrt{3}\,;b=5+2\sqrt{3}}$$

ب. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z) = 0$

$$P(z) = 0 \Rightarrow (z-1)\left(z^2 + \left(-2-2\sqrt{3}\right)z + 5 + 2\sqrt{3}\right) = 0$$

$$z - 1 = 0 \Rightarrow z_0 = 1$$

$$z^2 + \left(-2-2\sqrt{3}\right)z + 5 + 2\sqrt{3} = 0$$

$$\Delta = \left(-2-2\sqrt{3}\right)^2 - 4\left(5+2\sqrt{3}\right) = -4 = (2i)^2$$

$$z_1 = 1 + \sqrt{3} - i \,;\, z_2 = 1 + \sqrt{3} + i$$

$$\boxed{S = \left\{1\,;\; 1+\sqrt{3}-i\,;1+\sqrt{3}+i\right\}}$$

2. $z_A = 1$ ، $z_B = 1 + \sqrt{3} - i$ ، $z_C = 1 + \sqrt{3} + i$

أ. كتابة العدد $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل المثلثي واستنتاج طبيعة المثلث ABC

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i} = \frac{\left(\sqrt{3}+i\right)^2}{4} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \boxed{\cos\left(\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)}$$

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}} \Rightarrow \begin{cases} AB = AC \\ \left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\text{المثلث } ABC \text{ متقايس الأضلاع}}$$

ب. بيان أنّ لاحقة ω هي $z_\omega = 1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}$

بما أنّ المثلث ABC متقايس الأضلاع فإنّ مركز الدائرة المحيطة به هو مركز ثقله.

$$\omega\{(A,1);(B,1);(C,1)\} \Rightarrow z_\omega = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} = \frac{3 + 2\sqrt{3}}{3} = \boxed{1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}}$$

ج. تعيين (E) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي حيث : $\left|\frac{z_C - z}{z_B - z}\right| = 1$

$$M \in (E) \Rightarrow \left|\frac{z_C - z}{z_B - z}\right| = 1 \Rightarrow |z_C - z| = |z_B - z| \Rightarrow \boxed{CM = BM}$$

منه نستنتج أنّ المجموعة (E) هي محور القطعة $[BC]$ أي محور الفواصل

3. أ. حساب $\cos\theta$ حيث : $\theta = \left(\overrightarrow{\omega A};\overrightarrow{\omega B}\right)$

طريقة ①:

$$\frac{z_B - z_\omega}{z_A - z_\omega} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} - i}{-\frac{2\sqrt{3}}{3}} = \frac{-\sqrt{3} + 3i}{2\sqrt{3}} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{i\frac{2\pi}{3}} \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos\theta = -\frac{1}{2}}$$

طريقة ②:

بما أنّ ω مركز الدائرة (γ) المحيطة بالمثلث ABC متقايس الأضلاع ، فإنّ :

(الزوايا المركزية في مضلع منتظم) $\theta = \left(\overrightarrow{\omega A};\overrightarrow{\omega B}\right) = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow \boxed{\cos\theta = -\frac{1}{2}}$

ب. كتابة العبارة المركّبة للدوران R

$$\begin{cases} R(A) = B \\ R(\omega) = \omega \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_B = az_A + b \\ z_\omega = az_\omega + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{z_B - z_\omega}{z_A - z_\omega} \\ b = (1-a)z_\omega \end{cases}$$

$$a = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\ ;\ b = \left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{3+2\sqrt{3}}{2} - \frac{2+\sqrt{3}}{2}i$$

$$R(M) = M' \Rightarrow \boxed{z' = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z + \frac{3+2\sqrt{3}}{2} - \frac{2+\sqrt{3}}{2}i}$$

.4 $\boldsymbol{T(M) = M' \Rightarrow z' = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)\bar{z} + \left(\frac{3}{2} + \sqrt{3}\right) + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)i}$

بيان أنّ $T = Rot$ حيث t تحويل نقطي يُطلب تعيينه

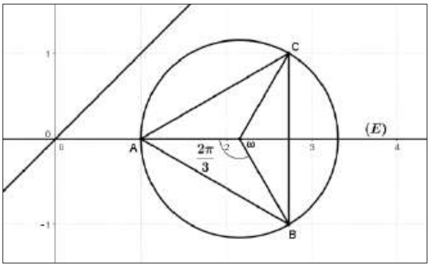
$$T(M) = Rot(M) = R[t(M)] = R(M_1) = M' \Rightarrow \begin{cases} M' = R(M_1) \\ M_1 = t(M) \end{cases}$$

$$\begin{cases} z' = \left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)z_1 + \left(\dfrac{3}{2} + \sqrt{3}\right) + \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)i \\ z' = \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i\right)\bar{z} + \left(\dfrac{3}{2} + \sqrt{3}\right) + \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)i \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z_1 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)\bar{z} \Rightarrow z_1 = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i}{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i}\bar{z} = i\bar{z}$$

$$\Rightarrow x_1 + iy_1 = i(x - iy) = y + ix \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x_1 = y \\ y_1 = x \end{cases}}$$

منه نستنتج أنّ $T = Rot$ حيث t هو التناظر بالنسبة للمنصف الأول $(y = x)$



* * *

حل التمرين 94.

1. تعيين الجذرين التربيعيين للعدد المركّب $\boldsymbol{3-4i}$

$$z=x+iy\,;z^2=3-4i\Rightarrow\begin{cases}x^2+y^2=5\\x^2-y^2=3\\2xy=-4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2=4\\y=-\dfrac{2}{x}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}z_1=2-i\\z_2=-2+i\end{cases}$$

.2

أ. تعيين الأعداد المركّبة $\boldsymbol{a}$ ، $\boldsymbol{b}$ و $\boldsymbol{c}$

$$a+b+c=6+6i\Rightarrow 3b=6+6i\Rightarrow b=2+2i$$

$$a.b.c=-30+18i\Rightarrow ac=\frac{-30+18i}{2+2i}\Rightarrow(b-r)(b+r)=-3+12i$$

$$\Rightarrow b^2-r^2=-3+12i\Rightarrow r^2=(2+2i)^2+3-12i$$

$\Rightarrow r^2=3-4i\Rightarrow r=2-i$ أو $r=-2+i$

- $r=2-i\Rightarrow\begin{cases}a=b-r=2+2i-2+i=3i\\c=b+r=2+2i+2-i=4+i\end{cases}$

  $\boxed{a=3i\,;b=2+2i\,;c=4+i}$

- $r=-2+i\Rightarrow\begin{cases}a=b-r=2+2i+2-i=4+i\\c=b+r=2+2i-2+i=3i\end{cases}$

  $\boxed{a=4+i\,;b=2+2i\,;c=3i}$

ب. تعيين رتبة الحدّ الذي قيمته $\boldsymbol{38-16i}$

$$u_n=u_0+nr=3i+n(2-i)$$

$$u_n=38-16i\Rightarrow 3i+n(2-i)=38-16i\Rightarrow n(2-i)=38-19i$$

$$\Rightarrow n=\frac{38-19i}{2-i}=\frac{19(2-i)}{2-i}=19$$

منه نستنتج أنّ الحدّ $38-16i$ هو الحدّ العشرون

.3 $\boldsymbol{z_A=3i}$ ، $\boldsymbol{z_B=2+2i}$ ، $\boldsymbol{z_C=4+i}$

أ. بيان أنّ النقط $\boldsymbol{A}$ ، $\boldsymbol{B}$ و $\boldsymbol{C}$ في استقامية

$$\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=\frac{2-i}{4-2i}=\frac{2-i}{2(2-i)}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\in\mathbb{R}\Rightarrow\boxed{\text{النقط } A \text{ ، } B \text{ و } C \text{ في استقامية}}$$

ب. تعيين لاحقة النقطة $\boldsymbol{D}$

$$\overrightarrow{OD}=-\overrightarrow{OB}\Rightarrow z_D=-z_B\Rightarrow\boxed{z_D=-2-2i}$$

ج. تعيين لاحقة النقطة $\boldsymbol{F}$

$$F=T(D)\Rightarrow z_F=z_D+z_{\overrightarrow{AC}}=z_D+z_C-z_A\Rightarrow\boxed{z_F=2-4i}$$

د.   تعيين المجموعة (Δ)

$$M\in(\Delta)\Rightarrow|iz+3|=|z-2+4i|\Rightarrow|i(z-3i)|=|z-2+4i|$$

$$\Rightarrow|i||z-3i|=|z-(2-4i)|\Rightarrow|z-z_A|=|z-z_F|\Rightarrow\boxed{AM=FM}$$

منه نستنتج أنّ (Δ) هو محور القطعة $[AF]$

ه.   تعيين معادلة (Δ')

$$h(F)=F'\Rightarrow z_{F'}-z_A=\frac{1}{2}(z_F-z_A)\Rightarrow z_{F'}=\frac{1}{2}(z_F+z_A)=\frac{1}{2}(2-i)$$

$$\Rightarrow\boxed{z_{F'}=1-\frac{1}{2}i}$$

بما أنّ $h(A)=A$ ، فإنّ (Δ') هو محور القطعة $[AF']$.

لدينا طريقتين لكتابة معادلة محور قطعة مستقيمة.

الطريقة ①:

لتكن النقطة I منتصف القطعة $[AF']$. لدينا :

$$z_I=\frac{z_A+z_{F'}}{2}=\frac{1+\frac{5}{2}i}{2}=\boxed{\frac{1}{2}+\frac{5}{4}i}\ ;\ \overrightarrow{IM}\begin{pmatrix}x-\frac{1}{2}\\ y-\frac{5}{4}\end{pmatrix};\overrightarrow{AF'}\begin{pmatrix}1\\ -\frac{7}{2}\end{pmatrix}$$

$$M\in(\Delta')\Rightarrow\overrightarrow{IM}\perp\overrightarrow{AF'}\Rightarrow\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AF'}=0\Rightarrow x-\frac{1}{2}-\frac{7}{2}\left(y-\frac{5}{4}\right)=0$$

$$\Rightarrow x-\frac{7}{2}y+\frac{31}{8}=0\Rightarrow\boxed{8x-28y+31=0}$$

الطريقة ①:

$$M\in(\Delta')\Rightarrow AM=F'M\Rightarrow AM^2=F'M^2$$

$$\Rightarrow x^2+(y-3)^2=(x-1)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2\Rightarrow-6y+9=-2x+y+\frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow 2x-7y+\frac{31}{4}=0\Rightarrow\boxed{8x-28y+31=0}$$

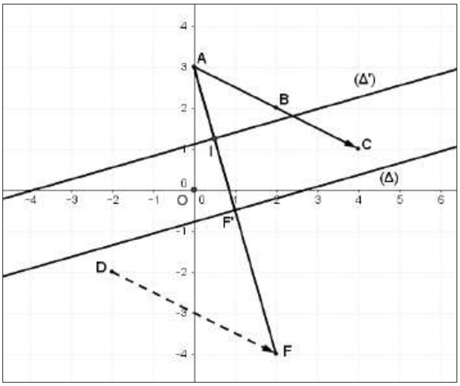
و.   كتابة العبارة المركّبة للدوران r الذي مركزه D وزاويته $-\frac{\pi}{3}$

$$M'=r(M)\Rightarrow z'-z_D=e^{-i\frac{\pi}{3}}(z-z_D)$$

$$\Rightarrow z'=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z+\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z_D$$

$$\Rightarrow z'=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z+\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(-2-2i)$$

$$\Rightarrow\boxed{z'=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z-1+\sqrt{3}-\left(1+\sqrt{3}\right)i}$$



* * *

حل التمرين 95.

$$(E): z^2 + (1-2i)z + 3 - 3i = 0$$

1. التحقّق أنّ $z_1 = -1 - i$ حل للمعادلة (E) واستنتاج الحل الثاني z_2

$$(-1-i)^2 + (1-2i)(-1-i) + 3 - 3i = 2i - 3 + i + 3 - 3i = \boxed{0}$$

$$z_1 \times z_2 = \frac{c}{a} = 3 - 3i \Rightarrow z_2 = \frac{3-3i}{-1-i} = \frac{3i(-i-1)}{-1-i} = \boxed{3i}$$

2. $P(z) = z^3 - 2(1+i)z^2 + 3iz + 9i - 9$

أ. بيان أنّ $P(z)$ يقبل حلا حقيقيا يُطلب تعيينه

$$z_0 \in \mathbb{R} \Rightarrow z_0 = x\,; P(z_0) = 0 \Rightarrow x^3 - 2(1+i)x^2 + 3ix + 9i - 9 = 0$$

$$\Rightarrow (x^3 - 2x^2 - 9) + i(-2x^2 + 3x + 9) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^3 - 2x^2 - 9 = 0 \\ -2x^2 + 3x + 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x = 3}$$

تحليل $P(z)$

	1	$-2-2i$	$3i$	$9i-9$
3				
	1	$1-2i$	$3-3i$	0

$$\boxed{P(z) = (z-3)(z^2 + (1-2i)z + 3 - 3i)}$$

ب. استنتج حلول المعادلة $P(z) = 0$

$$P(z) = 0 \Rightarrow (z-3)(z^2 + (1-2i)z + 3 - 3i) = 0$$

$$z - 3 = 0 \Rightarrow z_0 = 3$$

$$z^2 + (1-2i)z + 3 - 3i = 0 \Rightarrow z_1 = -1 - i\,; z_2 = 3i$$

$$\boxed{S = \{3; -1-i; 3i\}}$$

3. $z_A = -1 - i$ ، $z_B = 3$ ، $z_C = 3i$

أ. حساب $|z_B - z_A|$، $|z_C - z_A|$ و$|z_C - z_B|$

$$|z_B - z_A| = |4 + i| = \sqrt{17}\ ;\ |z_C - z_A| = |1 + 4i| = \sqrt{17}$$

$$|z_C - z_B| = |-3 + 3i| = 3\sqrt{2}$$

تعيين طبيعة المثلث ABC

$$|z_B - z_A| = |z_C - z_A| \Rightarrow AB = AC \Rightarrow \boxed{\text{المثلث } ABC \text{ متساوي الساقين}}$$

ب. تعيين z_I

$$\begin{cases} |z_I - z_B| = |z_I - z_A| \\ |z_I - z_C| = |z_I - z_A| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x - 3 + iy|^2 = |x + 1 + (y + 1)i|^2 \\ |x + (y - 3)i|^2 = |x + 1 + (y + 1)i|^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x - 3)^2 + y^2 = (x + 1)^2 + (y + 1)^2 \\ x^2 + (y - 3)^2 = (x + 1)^2 + (y + 1)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x + 2y - 7 = 0 \\ 2x + 8y - 7 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{7}{10} \\ y = \dfrac{7}{10} \end{cases} \Rightarrow \boxed{z_I = \left(\frac{7}{10}; \frac{7}{10}\right)}$$

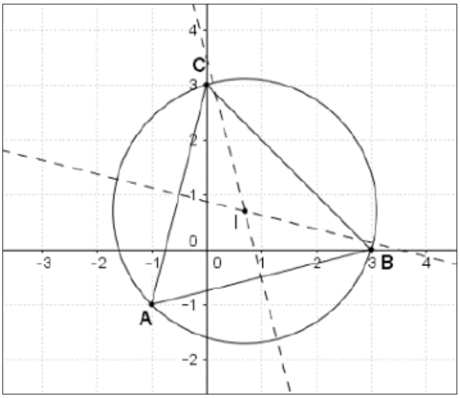
ج. حساب مساحة الدائرة المحيطة بالمثلث ABC

$$\begin{cases} |z_I - z_B| = |z_I - z_A| \\ |z_I - z_C| = |z_I - z_A| \end{cases} \Rightarrow IA = IB = IC$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{الدائرة } (\mathcal{C}) \text{ المحيطة بالمثلث } ABC \text{ مركزها } I}$$

$$S_{(\mathcal{C})} = \pi r^2 = \pi \times IA^2 = \pi \times |z_I - z_A|^2 = \pi \times \left|\frac{17}{10} + \frac{17}{10}i\right|^2$$

$$= \pi \times \frac{17^2 + 17^2}{100} \Rightarrow \boxed{S_{(\mathcal{C})} \approx 18{,}16\ cm^2}$$



* * *

حل التمرين 96.

1. $\boldsymbol{\alpha = 1 + i\sqrt{3}}$

أ. بيان أنّ $\boldsymbol{\alpha^2 - 4\alpha = 2\bar{\alpha} - 8}$

$$(1+i\sqrt{3})^2 - 4\left(1+i\sqrt{3}\right) = -2 + 2i\sqrt{3} - 4 - 4i\sqrt{3} = -6 - 2i\sqrt{3}$$

$$= 2\left(1 - i\sqrt{3}\right) - 8 = \boxed{2\bar{\alpha} - 8}$$

ب. بيان أنّ النقطتين $\boldsymbol{B}$ **و**$\boldsymbol{C}$ **تنتميان إلى الدائرة** $\boldsymbol{(\Gamma)}$

$$|\alpha| = \left|1 + i\sqrt{3}\right| = 2 \Rightarrow OB = 2 \Rightarrow \boxed{B \in (\Gamma)}$$

$$|\bar{\alpha}| = \left|1 - i\sqrt{3}\right| = 2 \Rightarrow OC = 2 \Rightarrow \boxed{C \in (\Gamma)}$$

ج. إنشاء النقط $\boldsymbol{A}$ **،** $\boldsymbol{B}$ **و**$\boldsymbol{C}$ **والدائرة** $\boldsymbol{(\Gamma)}$

2. تبرير أنّ لاحقة $\boldsymbol{E}$ **هي** $\boldsymbol{z_E = \alpha e^{i\theta}}$

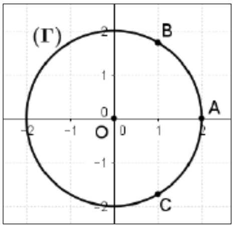
$$R(D) = E \Rightarrow z_E = e^{i\frac{\pi}{3}} z_D = 2e^{i\frac{\pi}{3}}\, e^{i\theta} = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) e^{i\theta} = \boxed{\alpha e^{i\theta}}$$

3. لتكن النقطتان $\boldsymbol{F}$ **و**$\boldsymbol{G}$ **منتصفا القطعتين** $\boldsymbol{[BD]}$ **و**$\boldsymbol{[CE]}$ **على الترتيب**

أ. تبرير أنّ لاحقة $\boldsymbol{F}$ **و**$\boldsymbol{G}$ **هما** $\boldsymbol{z_F = \frac{\alpha}{2} + e^{i\theta}}$ **و** $\boldsymbol{z_G = \frac{\alpha e^{i\theta} + \bar{\alpha}}{2}}$

$$z_F = \frac{z_B + z_D}{2} = \frac{\alpha + 2e^{i\theta}}{2} = \boxed{\frac{\alpha}{2} + e^{i\theta}}$$

$$z_G = \frac{z_C + z_E}{2} = \frac{\bar{\alpha} + \alpha e^{i\theta}}{2} = \boxed{\frac{\alpha e^{i\theta} + \bar{\alpha}}{2}}$$



ب. بيان أنّ $\boldsymbol{\frac{z_G - 2}{z_F - 2} = \frac{\alpha}{2}}$ **واستنتاج طبيعة المثلث** $\boldsymbol{AFG}$

$$\frac{z_G - 2}{z_F - 2} = \frac{\dfrac{\alpha e^{i\theta} + \bar{\alpha}}{2} - 2}{\dfrac{\alpha + 2e^{i\theta}}{2} - 2} = \frac{\alpha e^{i\theta} + \bar{\alpha} - 4}{\alpha + 2e^{i\theta} - 4} = \frac{\alpha}{2}\left(\frac{2\alpha e^{i\theta} + 2\bar{\alpha} - 8}{\alpha^2 + 2\alpha e^{i\theta} - 4\alpha}\right)$$

$$= \frac{\alpha}{2}\left(\frac{2\alpha e^{i\theta} + 2\bar{\alpha} - 8}{2\alpha e^{i\theta} + \alpha^2 - 4\alpha}\right) = \frac{\alpha}{2}\left(\frac{2\alpha e^{i\theta} + 2\bar{\alpha} - 8}{2\alpha e^{i\theta} + 2\bar{\alpha} - 8}\right) = \boxed{\frac{\alpha}{2}}$$

$$\frac{z_G - 2}{z_F - 2} = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \frac{z_G - z_A}{z_F - z_A} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}} \Rightarrow \begin{cases} AG = AF \\ \left(\overrightarrow{AF}; \overrightarrow{AG}\right) = \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{المثلث } AFG \text{ متقايس الأضلاع}}$$

* * *

حل التمرين 97.

I- $\boldsymbol{u^2 = 21 - 20i}$

1. إثبات أنّ $\boldsymbol{u}$ حل للمعادلة $\boldsymbol{(E)}$

$$u^4 - 42u^2 + 841 = (21 - 20i\,)^2 - 42(21 - 20i\,) + 841$$
$$= 41 - 840i - 882 + 840i + 841 = \boxed{0}$$

2. بيان أنّ $\boldsymbol{(E)}$ تكافئ $\boldsymbol{(z^2 + 29)^2 - 100z^2 = 0}$

$$(z^2 + 29)^2 - 100z^2 = 0 \Leftrightarrow z^4 + 58z^2 + 841 - 100z^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow \boxed{z^4 - 42z^2 + 841 = 0}$$

حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $\boldsymbol{(E)}$

$$(z^2 + 29)^2 - 100z^2 = 0 \Rightarrow (z^2 + 29 - 10z)(z^2 + 29 + 10z) = 0$$
$$z^2 - 10z + 29 = 0\,;\ \Delta = -16 = (4i)^2\,; z_1 = 5 - 2i\,; z_2 = 5 + 2i$$
$$z^2 + 10z + 29 = 0\,;\ \Delta = -16 = (4i)^2\,; z_3 = -5 - 2i\,; z_4 = -5 + 2i$$
$$\boxed{S = \{5 - 2i\,; 5 + 2i\,;\ -5 - 2i\,; -5 + 2i\}}$$

3. استنتاج قيم $\boldsymbol{u}$

$$\begin{cases} u^2 = 21 - 20i \\ \quad u \in S_{(E)} \end{cases} \Rightarrow \boxed{u \in \{5 - 2i\,; -5 + 2i\}}$$

لاحظ أنّه بتربيع العددين $5 - 2i$ و $-5 + 2i$ نحصل على $21 + 20i$

II- $\boldsymbol{z_A = 2 - i}$ ،$\boldsymbol{z_B = 5 - 2i}$ ، $\boldsymbol{z_C = -3 + i}$ و $\boldsymbol{z_D = -5 + 2i}$

1. كتابة $\boldsymbol{z'}$ بدلالة $\boldsymbol{z}$

$$\begin{cases} f(A) = B \\ f(C) = D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_B = az_A + b \\ z_D = az_C + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{z_B - z_D}{z_A - z_C} \\ b = z_B - az_A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{10 - 4i}{5 - 2i} = 2 \\ \quad b = 1 \end{cases}$$

$$M' = f(M) \Rightarrow \boxed{z' = 2z + 1}$$

2. تعيين طبيعة التحويل $\boldsymbol{f}$ وذكر عناصره

$$a = 2\,; b = 1\,;\ z_\omega = \frac{b}{1 - a} = -1$$

منه نستنتج أنّ التحويل f تحاكي مركزه $\omega(-1;0)$ ونسبته 2

III- $\boldsymbol{u_0 = 0}$ ،$\boldsymbol{u_{n+1} = 2u_n + 1}$

1. بيان أنّ العددين $\boldsymbol{u_{n+1}}$ و $\boldsymbol{u_n}$ أوليان فيما بينهما

$$u_{n+1} = 2u_n + 1 \Rightarrow u_{n+1} - 2u_n = 1 \underset{\text{بيزو}}{\Rightarrow} \boxed{PGCD(u_{n+1}; u_n) = 1}$$

2. تفسير حدود المتتالية $\boldsymbol{(u_n)}$

$$u_{n+1} = 2u_n + 1 \Rightarrow u_{n+1} = f(u_n) \Rightarrow u_n = |z_n|$$

منه نستنتج أنّ حدود المتتالية (u_n) هي أطوال القطع المستقيمة $[OM_n]$ ، حيث :

$M_0 = O$ و $M_{n+1} = f(M_n)$

3. **بيان أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 2^n - 1$**

تحقيق التراجع: $u_0 = 0$ (محققة)

فرض التراجع: نفرض أنّ $u_n = 2^n - 1$

برهان التراجع: نبرهن أنّ $u_{n+1} = 2^{n+1} - 1$

$$u_{n+1} = 2u_n + 1 = 2(2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 2 + 1 = \boxed{2^{n+1} - 1}$$

منه نستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 2^n - 1$

4. **أ. بيان أنّ : $u_n = u_p + 2^p u_{n-p}$**

$$u_p + 2^p u_{n-p} = 2^p - 1 + 2^p(2^{n-p} - 1) = 2^p - 1 + 2n - 2^p = 2^n - 1$$

$$\Rightarrow \boxed{u_n = u_p + 2^p u_{n-p}}$$

ب. بيان أنّ : $PGCD(u_n; u_p) = PGCD(u_p; u_{n-p})$

$$d = PGCD(u_n; u_p)\ ; d' = PGCD(u_p; u_{n-p})$$

$$d = PGCD(u_n; u_p) \Rightarrow \begin{cases} d \mid u_n \\ d \mid u_p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d \mid u_n - u_p \\ d \mid u_p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d \mid 2^p u_{n-p} \\ d \mid u_p \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d \mid u_{n-p} \\ d \mid u_p \end{cases} \Rightarrow d \mid PGCD(u_p; u_{n-p}) \Rightarrow \boxed{d \mid d'}$$

$$d' = PGCD(u_p; u_{n-p}) \Rightarrow \begin{cases} d' \mid u_{n-p} \\ d' \mid u_p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d' \mid 2^p u_{n-p} \\ d' \mid u_p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d' \mid u_n - u_p \\ d' \mid u_p \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d' \mid u_n \\ d' \mid u_p \end{cases} \Rightarrow d' \mid PGCD(u_n; u_p) \Rightarrow \boxed{d' \mid d}$$

$$\begin{cases} d \mid d' \\ d' \mid d \end{cases} \Rightarrow d = d' \Rightarrow \boxed{PGCD(u_n; u_p) = PGCD(u_p; u_{n-p})}$$

* * *

حل التمرين 98.

1. $\boldsymbol{\beta = 4\sqrt{2}(1 + i)}$

أ. كتابة العدد β على الشكل المثلثي

$$\beta = 4\sqrt{2}(1 + i) = 8\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \boxed{8\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)}$$

ب. حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^3 = \beta \ldots (1)$

$$z = re^{i\theta};\ z^3 = \beta \Rightarrow r^3 e^{i3\theta} = 8e^{i\frac{\pi}{4}} \Rightarrow \begin{cases} r^3 = 8 \\ 3\theta = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r = 2 \\ \theta = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{2k\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_1 = 2; \theta_1 = \dfrac{\pi}{12} \Rightarrow z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{12}} \\ r_2 = 2; \theta_2 = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{3\pi}{4} \Rightarrow z_2 = 2e^{i\frac{3\pi}{4}} \\ r_3 = 2; \theta_3 = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{4\pi}{3} = \dfrac{17\pi}{12} \Rightarrow z_3 = 2e^{i\frac{17\pi}{12}} \end{cases}$$

$$\boxed{S = \left\{2e^{i\frac{\pi}{12}}\ ;\ 2e^{i\frac{3\pi}{4}}\ ;\ 2e^{i\frac{17\pi}{12}}\right\}}$$

ج. برهان أنّ : $\boldsymbol{\frac{z_1\times z_2}{z_3^2} = \frac{z_2\times z_3}{z_1^2} = \frac{z_1\times z_3}{z_2^2}}$

$$\frac{z_1 \times z_2}{z_3^2} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{12}} \times 2e^{i\frac{3\pi}{4}}}{\left(2e^{i\frac{17\pi}{12}}\right)^2} = \frac{e^{i\frac{5\pi}{6}}}{e^{i\frac{17\pi}{6}}} = e^{-i2\pi} = e^0 = \boxed{1}$$

$$\frac{z_2 \times z_3}{z_1^2} = \frac{2e^{i\frac{3\pi}{4}} \times 2e^{i\frac{17\pi}{12}}}{\left(2e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^2} = \frac{e^{i\frac{13\pi}{6}}}{e^{i\frac{\pi}{6}}} = e^{i2\pi} = e^0 = \boxed{1}$$

$$\frac{z_1 \times z_3}{z_2^2} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{12}} \times 2e^{i\frac{17\pi}{12}}}{\left(2e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)^2} = \frac{e^{i\frac{3\pi}{2}}}{e^{i\frac{3\pi}{2}}} = \boxed{1}$$

$$\boxed{\frac{z_1 \times z_2}{z_3^2} = \frac{z_2 \times z_3}{z_1^2} = \frac{z_1 \times z_3}{z_2^2}}$$

.2 $\boldsymbol{z_A = \alpha}$ ، $\boldsymbol{z_B = 1 + \frac{\alpha-1}{\alpha} i}$ ، $\boldsymbol{z_C = i\alpha}$ ، $\boldsymbol{z_D = -\frac{1}{\alpha} i}$ **و** $\boldsymbol{z_H = 1 + z_D}$

أ. التحقق أنّ $\boldsymbol{z_B - z_D = \overline{z_D}(z_A - z_C)}$

$$\begin{cases} z_B - z_D = 1 + i - \dfrac{1}{\alpha} i + \dfrac{1}{\alpha} i = 1 + i \\ \overline{z_D}(z_A - z_C) = \dfrac{1}{\alpha} i(\alpha - i\alpha) = i(1 - i) = 1 + i \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{z_B - z_D = \overline{z_D}(z_A - z_C)}$$

بيان أنّ : $\boldsymbol{\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(z_B - z_D)\right]^{2016} = iz_A \times z_D}$

$$\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(z_B - z_D)\right]^{2016} = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)\right]^{2016} = \left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{2016} = e^{i504\pi} = e^0 = \boxed{1}$$

$$iz_A \times z_D = \alpha i\left(-\frac{1}{\alpha} i\right) = -i^2 = \boxed{1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(z_B - z_D)\right]^{2016} = iz_A \times z_D}$$

ب. استنتاج أنّ المستقيمين (AC) و(BD) متعامدان

$$z_B - z_D = \overline{z_D}(z_A - z_C) \Rightarrow \frac{z_B - z_D}{z_A - z_C} = \overline{z_D} = \frac{1}{\alpha}i = \frac{1}{\alpha}e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\arg\left(\frac{z_B - z_D}{z_A - z_C}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow (\overrightarrow{CA};\overrightarrow{DB}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow \boxed{(AC) \perp (BD)}$$

ج. تعيين العبارة المركّبة للتشابه المباشر S وتحديد عناصره المميّزة

$$\begin{cases} S(A) = B \\ S(C) = D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_B = az_A + b \\ z_D = az_C + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{z_B - z_D}{z_A - z_C} \\ b = z_B - az_A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{\alpha}i \\ b = 1 - \dfrac{1}{\alpha}i \end{cases}$$

$$M' = S(M) \Rightarrow \boxed{z' = \frac{1}{\alpha}iz + 1 - \frac{1}{\alpha}i}$$

$$a = \frac{1}{\alpha}i = \frac{1}{\alpha}e^{i\frac{\pi}{2}}\ ;\ z_\omega = \frac{b}{1-a} = \frac{1 - \frac{1}{\alpha}i}{1 - \frac{1}{\alpha}i} = 1$$

منه نستنتج أنّ S تشابه مباشر مركزه $\omega(1; 0)$ ، نسبته $\frac{1}{\alpha}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$

د. بيان أنّ المثلثين OAC وBHD متشابهان

$$S(O) = O' \Rightarrow z_{O'} = \frac{1}{\alpha}iz_O + 1 - \frac{1}{\alpha}i = 1 - \frac{1}{\alpha}i = z_H$$

$$\begin{cases} S(A) = B \\ S(C) = D \Rightarrow S(OAC) = BHD \\ S(O) = H \end{cases}$$

بما أنّ المثلث BHD صورة المثلث OAC بالتشابه S ، نستنتج أنّ المثلثين متشابهان

إيجاد علاقة بين مساحتي المثلثين OAC وBHD

$$\boxed{\mathcal{A}_{BHD} = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 \mathcal{A}_{OAC}}$$

3. تعيين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي تحقق :

$\arg(\bar{z} + i\alpha) = -\arg(z_A - z_C) + 2k\pi$ ، حيث $k \in \mathbb{Z}$

$$\arg(\bar{z} + i\alpha) = -\arg(z_A - z_C) + 2k\pi$$
$$\Rightarrow -\arg(\overline{\bar{z} + \imath\alpha}) = -\arg(z_A - z_C) + 2k\pi$$
$$\Rightarrow \arg(z - i\alpha) = \arg(z_A - z_C) + 2k\pi$$

$$\Rightarrow \arg(z - z_C) - \arg(z_A - z_C) = 2k\pi$$

$$\Rightarrow \arg\left(\frac{z - z_C}{z_A - z_C}\right) = 2k\pi \Rightarrow (\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CM}) = 2k\pi \Rightarrow \boxed{M \in [CA)}$$

منه نستنتج أنّ مجموعة النقط M هي نصف المستقيم الذي مبدؤه C ويشمل A.

* * *

حل التمرين 99.

I- $z_A = 3 + 2i$ ، $z_B = -3$ و $z_I = 1 - 2i$

1. كتابة العدد $\frac{z_I - z_A}{z_I - z_B}$ على الشكل الأسّي

$$\frac{z_I - z_A}{z_I - z_B} = \frac{-2 - 4i}{4 - 2i} = \frac{-1 - 2i}{2 - i} = \frac{-i(-i + 2)}{2 - i} = -i = \boxed{e^{-i\frac{\pi}{2}}}$$

استنتاج طبيعة المثلث IAB

$$\frac{z_I - z_A}{z_I - z_B} = e^{-i\frac{\pi}{2}} \Rightarrow \begin{cases} AI = BI \\ (\overrightarrow{BI}; \overrightarrow{AI}) = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$$

⇒ المثلث IAB قائم في I ومتساوي الساقين

2. حساب z_C

$$h(I) = C \Rightarrow z_C - z_A = 2(z_I - z_A) \Rightarrow z_C = 2z_I - z_A = \boxed{-1 - 6i}$$

3. تعيين z_D

$$D\{(A, 1); (B, -1); (C, 1)\} \Rightarrow z_D = z_A - z_B + z_C = \boxed{5 - 4i}$$

4. بيان أنّ الرباعي $ABCD$ مربّع

$$\frac{z_A + z_C}{2} = \frac{2 - 4i}{2} = 1 - 2i = z_I \ ; \ \frac{z_B + z_D}{2} = \frac{2 - 4i}{2} = 1 - 2i = z_I$$

القطران $[AC]$ و$[BD]$ متناصفان في النقطة I وهما متعامدان ومتقايسان

(المثلث IAB قائم في I ومتساوي الساقين) منه نستنتج أنّ الرباعي $ABCD$ مربّع

5. تعيين المجموعة (Γ)

$$M \in (\Gamma) \Rightarrow \|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\| \Rightarrow \|\overrightarrow{MD}\| = \frac{1}{2}\|2\overrightarrow{MI}\|$$

$$\Rightarrow \boxed{\|\overrightarrow{MD}\| = \|\overrightarrow{MI}\|}$$

منه نستنتج أنّ المجموعة (Γ) هي محور القطعة $[DI]$

II- $z_E = 3i$ ، $f(M) = M' \Rightarrow z' = \frac{3iz - 7}{z - 3i}$

1. نشر $(z - 7i)(z + i)$ وبيان أنّ للتحويل f نقطتان صامدتان F وK

$$(z - 7i)(z + i) = z^2 + iz - 7iz + 7 = \boxed{z^2 - 6iz + 7}$$

$$f(M)=M \Rightarrow z=\frac{3iz-7}{z-3i} \Rightarrow z^2-3iz=3iz-7 \Rightarrow z^2-6iz+7=0$$

$$\Rightarrow (z-7i)(z+i)=0 \Rightarrow \boxed{z=7i \text{ أو } z=-i}$$

منه نستنتج أنّ للتحويل f نقطتان صامدتان F و K حيث : $z_F=7i$ و $z_K=-i$

2. لتكن (γ) الدائرة التي قطرها $[FK]$ ، M نقطة من (γ) تختلف عن F و K ، و M' صورة M بالتحويل f

أ. تبرير أنّ لاحقة النقطة M هي $z=3i+4e^{i\theta}$ حيث $\theta\in\mathbb{R}$

بما أنّ $z_E=\frac{z_F+z_K}{2}$ ، فإنّ النقطة E هي مركز الدائرة (γ).

$$r=EF=|z_F-z_E|=|4i|=4$$

$$M\in(\gamma) \Rightarrow EM=4 \Rightarrow \begin{cases} |z-z_E|=4 \\ \arg(z-z_E)=\theta+2k\pi \end{cases} \Rightarrow z-z_E=4e^{i\theta}$$

$$\Rightarrow \boxed{z=3i+4e^{i\theta}}$$

ب. كتابة z' بدلالة θ ، ثمّ استنتاج أنّ $M'\in(\gamma)$

$$z'=\frac{3iz-7}{z-3i}=\frac{3i\left(3i+4e^{i\theta}\right)-7}{3i+4e^{i\theta}-3i}=\frac{12ie^{i\theta}-16}{4e^{i\theta}}=\boxed{3i-4e^{-i\theta}}$$

$$z'=3i-4e^{-i\theta} \Rightarrow z'-z_\omega=-4e^{-i\theta} \Rightarrow |z'-z_\omega|=4 \Rightarrow \boxed{M'\in(\gamma)}$$

ج. برهان أنّ $z'=-\bar{z}$ واستنتاج الإنشاء الهندسي للنقطة M'

$$-\bar z=-\left(\overline{3i+4e^{i\theta}}\right)=-\left(-3i+4e^{-i\theta}\right)=3i-4e^{-i\theta}=z' \Rightarrow \boxed{z'=-\bar z}$$

$$z'=-\bar z \Rightarrow x'+iy'=-(x-iy)=-x+iy \Rightarrow \begin{cases} x'=-x \\ y'=y \end{cases}$$

منه نستنتج أنّ M' هي نظيرة M بالنسبة إلى محور التراتيب

3. تعيين (σ') صورة (σ) بالتحويل f

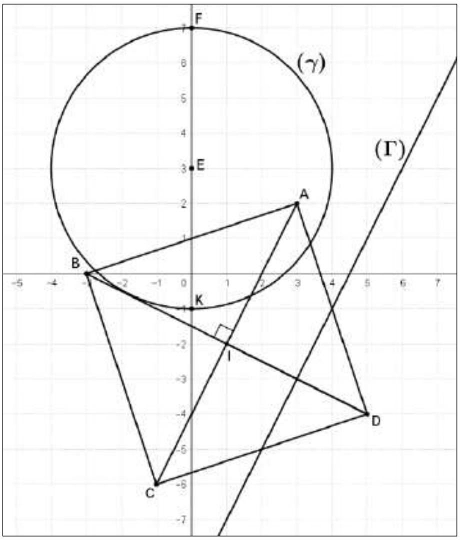
$$M\in(\sigma) \Rightarrow EM=r \Rightarrow \begin{cases} |z-z_E|=r \\ \arg(z-z_E)=\theta+2k\pi \end{cases} \Rightarrow z-z_E=re^{i\theta}$$

$$\Rightarrow \boxed{z=3i+re^{i\theta}}$$

$$z'=\frac{3iz-7}{z-3i}=\frac{3i\left(3i+re^{i\theta}\right)-7}{3i+re^{i\theta}-3i}=\frac{3rie^{i\theta}-16}{re^{i\theta}}=3i-\frac{16}{r}e^{-i\theta}$$

$$\Rightarrow z'-3i=-\frac{16}{r}e^{-i\theta} \Rightarrow |z'-z_E|=\frac{16}{r} \Rightarrow \boxed{EM'=\frac{16}{r}}$$

منه نستنتج أنّ (σ') هي الدائرة التي مركزها E ونصف قطرها $\frac{16}{r}$.



* * *

<u>حل التمرين 100.</u>

1. حل في مجموعة الأعداد المركّبة ℂ المعادلة : $\boldsymbol{z^3-4z^2+8z-8=0}$

$z^3-4z^2+8z-8=0 \Rightarrow (z-2)(z^2-2z+4)=0$

$z-2=0 \Rightarrow z_0=2$

$z^2-2z+4=0\ ;\ \Delta=-12=\left(2\sqrt{3}i\right)\ ; z_1=1+i\sqrt{3}\ ; z_2=1-i\sqrt{3}$

$\boxed{S=\left\{2\ ; 1+i\sqrt{3}\ ; 1-i\sqrt{3}\right\}}$

2. $\boldsymbol{z_A=2}$ ، $\boldsymbol{z_B=1+i\sqrt{3}}$ ، $\boldsymbol{z_C=1-i\sqrt{3}}$

أ. كتابة الأعداد $\boldsymbol{z_B}$ ، $\boldsymbol{z_C}$ و $\boldsymbol{\frac{z_B}{z_C}}$ على الشكل الأسّي

$$z_B=1+i\sqrt{3}=2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\boxed{2e^{i\frac{\pi}{3}}}\ ;\ z_C=\overline{z_B}=\boxed{2e^{-i\frac{\pi}{3}}}$$

$$\frac{z_B}{z_C}=\frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2e^{-i\frac{\pi}{3}}}=\boxed{e^{i\frac{2\pi}{3}}}$$

ب. تعيين قيم العدد الطبيعي $\boldsymbol{n}$ التي يكون من أجلها العدد $\boldsymbol{\left(\frac{z_B}{z_C}\right)^n}$ حقيقيا

$$\left(\frac{z_B}{z_C}\right)^n\in\mathbb{R}\Rightarrow \arg\left[\left(\frac{z_B}{z_C}\right)^n\right]=k\pi\Rightarrow\frac{2n\pi}{3}=k\pi\Rightarrow n=3\left(\frac{k}{2}\right)$$

$$\Rightarrow\boxed{n=3k';k'\in\mathbb{N}}$$

ج. بيان أنّ : $z_B^{3n} + z_C^{3n} + 2^{3n+1} = 0$

$$z_B^{3n} + z_C^{3n} + 2^{3n+1} = \left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{3n} + \left(2e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^{3n} + 2^{3n+1}$$

$$= 2^{3n}e^{in\pi} + 2^{3n}e^{-in\pi} + 2^{3n+1} = -2^{3n} - 2^{3n} + 2^{3n+1}$$

$$= 2(-2^{3n}) + 2^{3n+1} = -2^{3n+1} + 2^{3n+1} = \boxed{0}$$

د. إنشاء النقط A ، B وC وتعيين طبيعة الرباعي $OBAC$

$z_A - z_B = 1 - i\sqrt{3} = z_C \Rightarrow \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OC} \dots$ ①

$|z_B| = |z_C| = 2 \Rightarrow OB = OC = 2 \dots$ ②

$\arg\left(\frac{z_B}{z_C}\right) = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \left(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OB}\right) = \frac{2\pi}{3} \dots$ ③

من النتائج السابقة نستنتج أنّ الرباعي $OBAC$ معيّن (متوازي أضلاع له ضلعان متتاليان متقايسان غير متعامدين) انظر الشكل في نهاية التمرين.

.3 $z' = \frac{z_A\bar{z} - z_C}{\bar{z} - z_C}$

أ. تعيين وإنشاء المجموعة (D)

$$M \in (D) \Rightarrow (z - z_B)(\bar{z} - z_C) = 1 \Rightarrow (z - z_B)\overline{(z - z_B)} = 1$$

$$\Rightarrow |z - z_B|^2 = 1 \Rightarrow \boxed{BM^2 = 1}$$

منه نستنتج أنّ المجموعة (D) هي الدائرة التي مركزها B ونصف قطرها 1

ب. التحقق أنّ : $z' = z_A + \frac{z_C}{\bar{z} - z_C}$

$$z_A + \frac{z_C}{\bar{z} - z_C} = \frac{z_A\bar{z} - z_Az_C + z_C}{\bar{z} - z_C} = \frac{z_A\bar{z} - z_C(z_A - 1)}{\bar{z} - z_C} = \frac{z_A\bar{z} - z_C}{\bar{z} - z_C} = z'$$

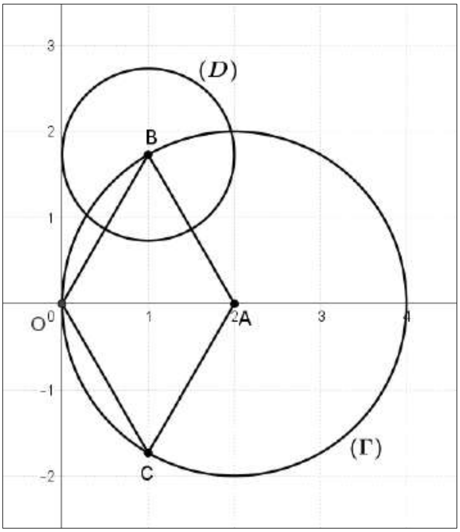
ج. بيان أنّه إذا كانت النقطة M تنتمي إلى (D) فإنّ النقطة M' تنتمي إلى دائرة (Γ) يُطلب تعيين مركزها ونصف قطرها

$$M \in (D) \Rightarrow BM = 1 \Rightarrow |z - z_B| = 1 \Rightarrow |\bar{z} - z_C| = 1$$

$$z' = z_A + \frac{z_C}{\bar{z} - z_C} \Rightarrow z' - z_A = \frac{z_C}{\bar{z} - z_C} \Rightarrow |z' - z_A| = \left|\frac{z_C}{\bar{z} - z_C}\right| = \frac{|z_C|}{|\bar{z} - z_C|}$$

$$\Rightarrow |z' - z_A| = |z_C| \Rightarrow \boxed{AM' = 2}$$

منه نستنتج أنّه إذا كانت النقطة M تنتمي إلى (D) فإنّ النقطة M' تنتمي إلى الدائرة (Γ) التي مركزها A ونصف قطرها 2.


(D)
B
(Γ)
O
A
C
0
1
2
3
4
3
2
1
-1
-2

* * *

حلول مواضيع
الأعداد المركبة
في البكالوريا

التمرين 01 : (بكالوريا 2008 ع ت)

1. **حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-(1+2i)z-1+i=0$**

$\Delta=[-(1+2i)]^2-4(-1+i)=1$

$$z_1=\frac{1+2i-1}{2}=i\,;z_2=\frac{1+2i+1}{2}=1+i\,;\boxed{S=\{i;1+i\}}$$

بيان أن : $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2008}$ عدد حقيقي

$$\begin{cases} z_1=i=e^{i\frac{\pi}{2}} \\ z_2=1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \end{cases}\Rightarrow\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2008}=\left(\frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}\right)^{2008}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{2008}$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2008}e^{i\frac{2008\pi}{4}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{1004}\underbrace{e^{i502\pi}}_{=e^0=1}=\boxed{\frac{1}{2^{1004}}}$$

2. **$Z=\frac{z_2-1}{z_1-1}$ ، $C(z_2)$ ، $B(z_1)$ ، $A(1)$**

أ. **برهان أن: $e^{-i\theta}=\frac{1}{e^{i\theta}}$ و $\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}}=e^{i(\theta_1-\theta_2)}$**

$$\frac{1}{e^{i\theta}}=\frac{1}{\cos\theta+i\sin\theta}=\frac{\cos\theta-i\sin\theta}{(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\theta-i\sin\theta)}$$

$$=\frac{\cos\theta-i\sin\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}=\cos\theta-i\sin\theta=\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)=\boxed{e^{-i\theta}}$$

$$\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}}=e^{i\theta_1}\times\frac{1}{e^{i\theta_2}}=e^{i\theta_1}\times e^{-i\theta_2}=\boxed{e^{i(\theta_1-\theta_2)}}$$

ب. **كتابة العدد Z على الشكل الأسي**

$$Z=\frac{z_2-1}{z_1-1}=\frac{i}{-1+i}=\frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{4}\right)}=\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}$$

ج. **كتابة Z على الشكل المثلثي**

$$\boxed{z=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]}$$

استنتاج أن C هي صورة B بتشابه مباشر مركزه A ، يُطلب تعيين عناصره

$$\frac{z_2-1}{z_1-1}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\Rightarrow\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\Rightarrow z_C-z_A=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}(z_B-z_A)$$

منه نستنتج أنّ النقطة C هي صورة B بالتشابه المباشر الذي مركزه A ، نسبته $\frac{\sqrt{2}}{2}$ وزاويته $\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

* * *

التمرين 02 : (بكالوريا 2008 ع ت)

1. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 + iz - 2 - 6i = 0$

$$\Delta = i^2 - 4(-2-6i) = 7 + 24i$$

نحسب الجذرين التربيعيين للعدد $7 + 24i$

$$|7+24i| = 25\ ;\ (x+iy)^2 = 7+24i \Rightarrow x^2 - y^2 + 2ixy = 7 + 24i$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 - y^2 = 7 \\ 2xy = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 = 32 \\ xy = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 16 \\ y = \dfrac{12}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} x = -4 \\ y = -3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 7 + 24i = (4+3i)^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 4 + 3i$$

$$z_1 = \frac{-i + 4 + 3i}{2} = 2 + i\ ;\ z_2 = \frac{-i - 4 - 3i}{2} = -2 - 2i$$

$$\boxed{S = \{2 + i\ ;\ -2 - 2i\}}$$

2. تعيين z_ω لاحقة النقطة ω مركز الدائرة (Γ) التي قطرها $[AB]$

$$z_\omega = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{2 + i - 2 - 2i}{2} = \boxed{-\frac{1}{2}i}$$

3. كتابة z_C على الشكل الجبري واثبات أن C تنتمي إلى (Γ)

$$z_C = \frac{4-i}{1+i} = \frac{(4-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{3-5i}{2} = \boxed{\frac{3}{2} - \frac{5}{2}i}$$

$$\begin{cases} \omega C = |z_C - z_\omega| = \left|\dfrac{3}{2} - 2i\right| = \sqrt{\dfrac{9}{4} + 4} = \dfrac{5}{2} \\ \omega A = |z_A - z_\omega| = \left|2 + \dfrac{3}{2}i\right| = \sqrt{4 + \dfrac{9}{4}} = \dfrac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow \omega C = \omega A \Rightarrow \boxed{C \in (\Gamma)}$$

4. برهان أن عبارة التشابه المباشر S هي : $z' - z_0 = ke^{i\theta}(z - z_0)$

$$M' = S(M) \Rightarrow \begin{cases} M_0M' = k.M_0M \\ \left(\overrightarrow{M_0M}; \overrightarrow{M_0M'}\right) = \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |z' - z_0| = k|z - z_0| \\ \arg\left(\dfrac{z' - z_0}{z - z_0}\right) = \theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left|\dfrac{z' - z_0}{z - z_0}\right| = k \\ \arg\left(\dfrac{z' - z_0}{z - z_0}\right) = \theta \end{cases} \Rightarrow \frac{z' - z_0}{z - z_0} = ke^{i\theta}$$

$$\Rightarrow \boxed{z' - z_0 = ke^{i\theta}(z - z_0)}$$

5. تعيين طبيعة وعناصر التحويل S المعرّف بالعبارة : $\boldsymbol{z' + \frac{1}{2}i = 2e^{i\frac{\pi}{3}}(z + \frac{1}{2}i)}$

$$z' + \frac{1}{2}i = 2e^{i\frac{\pi}{3}}\left(z + \frac{1}{2}i\right) \Rightarrow z' - z_\omega = 2e^{i\frac{\pi}{3}}(z - z_\omega)$$

بما أنّ $k = 2$ ، $\theta = \frac{\pi}{3}$ و $z_0 = z_\omega$ ، نستنتج أنّ التحويل S هو تشابه مباشر مركزه ω ، نسبته 2 وزاويته $\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

* * *

التمرين 03 : (بكالوريا 2008 ت ر)

$$\boldsymbol{z^3 + (2 - 4i)z^2 - (6 + 9i)z + 9(-1 + i) = 0}$$

1. بيان أن $z_0 = 3i$ هو حل للمعادلة (*)

$$(3i)^3 + (2 - 4i)(3i)^2 - (6 + 9i)(3i) + 9(-1 + i)$$

$$= -27i - 9(2 - 4i) - (6 + 9i)(3i) + 9(-1 + i)$$

$$= 45i - 45i + 27 - 27 = 0 \Rightarrow \boxed{z_0 \text{ حل للمعادلة } (*)}$$

2. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (*)

لحل المعادلة (*) ، نحلل كثير الحدود إلى جداء عاملين باستعمال خوارزمية هورنر (يمكننا أيضا استعمال المطابقة)

توضيح طريقة استعمال خوارزمية هورنر:

	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{c}$	$\boldsymbol{d}$
$\boldsymbol{z_0}$				
	$\boldsymbol{a' = a}$	$\boldsymbol{b' = a'z_0 + b}$	$\boldsymbol{c' = b'z_0 + c}$	$\boldsymbol{d' = c'z_0 + d = 0}$

$$\boxed{\boldsymbol{az^3 + bz^2 + cz + d = (z - z_0)(a'z^2 + b'z + c')}}$$

	1	$2 - 4i$	$-6 - 9i$	$-9 + 9i$
$3i$				
	1	$\underbrace{2 - i}_{=3i(1)+2-4i}$	$\underbrace{-3 - 3i}_{=3i(2-i)-6-9i}$	$\underbrace{0}_{=3i(-3-3i)-9+9i}$

$$(*) \Rightarrow (z - 3i)[z^2 + (2 - i)z - 3 - 3i] = 0$$

$$\Delta = (2 - i)^2 - 4(-3 - 3i) = 15 + 8i\ ;\ |\Delta| = \sqrt{225 + 64} = 17$$

$$\Delta = (x + iy)^2 \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 17 \\ x^2 - y^2 = 15 \\ 2xy = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 = 32 \\ xy = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 16 \\ y = \frac{4}{x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} x = -4 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow \Delta = (4 + i)^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 4 + i$$

$$z_0 = 3i\ ;\ z_1 = \frac{-2+i+4+i}{2} = 1+i\ ;\ z_2 = \frac{-2+i-4-i}{2} = -3$$

$$\boxed{S = \{3i\ ; 1+i\ ;\ -3\}}$$

كتابة الحلول z_0 ، z_1 وz_2على الشكل الأسي

$$z_0 = 3i = \boxed{3e^{i\frac{\pi}{2}}}\ ; z_1 = 1+i = \boxed{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}\ ; z_2 = -3 = \boxed{3e^{i\pi}}$$

3. تعيين النقطة G مرجح الجملة $\{(A;1),(B;1),(C;-1)\}$

$$z_G = z_0 + z_1 - z_2 = 3i + 1 + i + 3 = \boxed{4+4i}$$

4. تعيين المجموعة (E)

$$M \in (E) \Rightarrow AM^2 + BM^2 - CM^2 = -13 \Rightarrow \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 - \overrightarrow{MC}^2 = -13$$

$$\Rightarrow \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}\right)^2 - \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}\right)^2 = -13$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MG}^2 + \overrightarrow{GA}^2 + \overrightarrow{GB}^2 - \overrightarrow{GC}^2 + \overrightarrow{MG}\underbrace{\left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC}\right)}_{\vec{0}} = -13$$

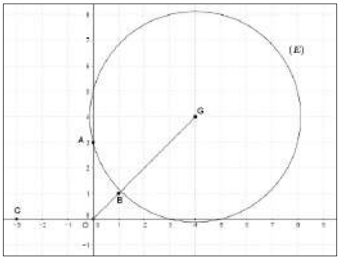
$$\Rightarrow MG^2 = -13 - GA^2 - GB^2 + GC^2$$

$$\begin{cases} GA^2 = |z_0 - z_G|^2 = |-4-i|^2 = 17 \\ GB^2 = |z_1 - z_G|^2 = |-3-3i|^2 = 18 \Rightarrow MG^2 = 17 \Rightarrow \boxed{MG = \sqrt{17}} \\ GC^2 = |z_2 - z_G|^2 = |-7-4i|^2 = 65 \end{cases}$$

منه نستنتج أنّ (E) هي الدائرة التي مركزها G ونصف قطرها $\sqrt{17}$

بيان أن النقطة A تنتمي إلى (E) وإنشاء (E)

$$GA^2 = 17 \Rightarrow GA = \sqrt{17} \Rightarrow \boxed{A \in (E)}$$



5. التحقق أن النقط O ، B و G على استقامة واحدة

$$z_G = 4z_1 \Rightarrow \overrightarrow{OG} = 4\overrightarrow{OB} \Rightarrow \boxed{\text{النقط } O \text{ ، } B \text{ و } G \text{ على استقامة واحدة}}$$

تعيين صورة المجموعة (E) بالتحاكي الذي مركزه O و يحوّل B إلى G

$$h(B) = G \Rightarrow \overrightarrow{OG} = k\overrightarrow{OB} \Rightarrow \boxed{k = 4}$$

صورة الدائرة (E) هي الدائرة (E') التي مركزها G' ونصف قطرها r' حيث :

$$G' = h(G) \Rightarrow z_{G'} = 4z_G = 4(4+4i) = \boxed{16+16i}\ ; r' = 4r = \boxed{4\sqrt{17}}$$

* * *

التمرين 04 : (بكالوريا 2008 ت ر)

1. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-2i\left(r\cos\frac{\theta}{2}\right)z-r^2=0$

$$\Delta=\left[-2i\left(r\cos\frac{\theta}{2}\right)\right]^2-4(-r^2)=-4r^2\cos^2\frac{\theta}{2}+4r^2$$

$$=4r^2\left(1-\cos^2\frac{\theta}{2}\right)=4r^2\sin^2\frac{\theta}{2}\Rightarrow\sqrt{\Delta}=2r\sin\frac{\theta}{2}$$

$$z_1=\frac{2i\left(r\cos\frac{\theta}{2}\right)-2r\sin\frac{\theta}{2}}{2}=r\left(-\sin\frac{\theta}{2}+i\ \cos\frac{\theta}{2}\right)$$

$$z_2=\frac{2i\left(r\cos\frac{\theta}{2}\right)+2r\sin\frac{\theta}{2}}{2}=r\left(\sin\frac{\theta}{2}+i\ \cos\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\boxed{S=\left\{r\left(-\sin\frac{\theta}{2}+i\ \cos\frac{\theta}{2}\right)\ ;\ r\left(\sin\frac{\theta}{2}+i\ \cos\frac{\theta}{2}\right)\right\}}$$

كتابة الحلين على الشكل الأسي

تذكّر : $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x$ و $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$ و $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$

$$z_1=r\left(-\sin\frac{\theta}{2}+i\ \cos\frac{\theta}{2}\right)=r\left(\cos\frac{\pi+\theta}{2}+i\ \sin\frac{\pi+\theta}{2}\right)=\boxed{re^{i\frac{\pi+\theta}{2}}}$$

$$z_2=r\left(\sin\frac{\theta}{2}+i\ \cos\frac{\theta}{2}\right)=r\left(\cos\frac{\pi-\theta}{2}+i\ \sin\frac{\pi-\theta}{2}\right)=\boxed{re^{i\frac{\pi-\theta}{2}}}$$

2. تعيين θ حتى يكون المثلث OAB متقايس الأضلاع

OAB متقايس الأضلاع $\Rightarrow\frac{z_1}{z_2}=e^{i\left(\frac{\pi}{3}+k\pi\right)}\Rightarrow\frac{re^{i\frac{\pi+\theta}{2}}}{re^{i\frac{\pi-\theta}{2}}}=e^{i\left(\frac{\pi}{3}+k\pi\right)}$

$$\Rightarrow e^{i\theta}=e^{i\left(\frac{\pi}{3}+k\pi\right)}\Rightarrow\boxed{\theta=\frac{\pi}{3}+k\pi}$$

* * *

التمرين 05 : (بكالوريا 2008 ر)

$z_A=\sqrt{3}-i$ ، $z_B=\sqrt{3}+3i$

1. كتابة العبارة المركبة للتشابه المباشر S

$$S(A)=B\Rightarrow z_B=az_A\Rightarrow a=\frac{z_B}{z_A}=\frac{\sqrt{3}+3i}{\sqrt{3}-i}=\sqrt{3}i\Rightarrow\boxed{z'=\sqrt{3}iz}$$

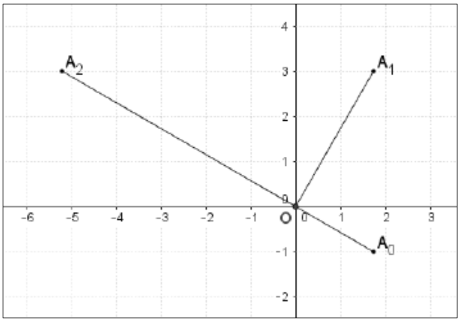
تعيين زاوية و نسبة التشابه S

$$a=\sqrt{3}i=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}\Rightarrow\boxed{k=|a|=\sqrt{3}\;;\;\theta=\arg(a)=\frac{\pi}{2}}$$

2. $A_{n+1}=S(A_n)$ ، $A_0=A$

أ. إنشاء النقط A_0 ، A_1 و A_2

$$A_1=S(A_0)\Rightarrow\begin{cases}OA_1=\sqrt{3}OA_0\\(\overrightarrow{OA_0};\overrightarrow{OA_1})=\dfrac{\pi}{2}\end{cases}\;;\;A_2=S(A_1)\Rightarrow\begin{cases}OA_2=3OA_0\\(\overrightarrow{OA_0};\overrightarrow{OA_2})=\pi\end{cases}$$



ب. برهان أنّ : $z_n=2\left(\sqrt{3}\right)^n e^{i\left(\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}$

تحقيق التراجع: $z_0=2e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$ محقّقة لأنّ :

$$2e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}=2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)=\sqrt{3}-1=z_0$$

فرض التراجع: نفرض أنّ $z_n=2\left(\sqrt{3}\right)^n e^{i\left(\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}$

تحقيق التراجع: نتحقّق أنّ $z_{n+1}=2\left(\sqrt{3}\right)^{n+1} e^{i\left(\frac{(n+1)\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}$

$$A_{n+1}=S(A_n)\Rightarrow z_{n+1}=\sqrt{3}i\times z_n=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}\times2\left(\sqrt{3}\right)^n e^{i\left(\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}$$

$$=2\left(\sqrt{3}\right)^{n+1}e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}=\boxed{2\left(\sqrt{3}\right)^{n+1}e^{i\left(\frac{(n+1)\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}}$$

ج. تعيين قيم n التي تنتمي من أجلها النقطة A_n إلى المستقيم (OA_1)

$$A_n\in(OA_1)\Rightarrow\arg(z_n)=\arg(z_1)+k\pi\Rightarrow\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}+k\pi$$

$$\Rightarrow\frac{n}{2}=\frac{1}{2}+k\Rightarrow\boxed{n=2k+1\,;k\in\mathbb{N}}$$

3. $u_n=A_nA_{n+1}$ و $u_0=A_0A_1$

أ. بيان أنّ المتتالية (u_n) هندسية يُطلب تحديد حدها الأول u_0 و أساسها q

$$u_{n+1}=A_{n+1}A_{n+2}=|z_{n+2}-z_{n+1}|=\left|\sqrt{3}iz_{n+1}-\sqrt{3}iz_n\right|$$

$$= \left|\sqrt{3}i(z_{n+1} - z_n)\right| = \left|\sqrt{3}i\right||z_{n+1} - z_n| = \sqrt{3}u_n$$

منه نستنتج أنّ المتتالية (u_n) هندسية أساسها $q = \sqrt{3}$ وحدّها الأول :

$$u_0 = A_1A_0 = |z_1 - z_0| = \left|\sqrt{3} + 3i - \sqrt{3} + i\right| = |4i| = 4$$

ب. استنتاج عبارة u_n بدلالة n

$$u_n = u_0 \times q^n = \boxed{4 \times \sqrt{3}^n}$$

ج. حساب بدلالة n ، المجموع S_n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

$$S_n = u_0\left(\frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}\right) = \boxed{4\left(\frac{\sqrt{3}^{n+1} - 1}{\sqrt{3} - 1}\right)}$$

حساب $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} 4\left(\frac{\sqrt{3}^{n+1} - 1}{\sqrt{3} - 1}\right) = \boxed{+\infty} ;(\sqrt{3}^{n+1} \to +\infty)$$

* * *

التمرين 06 : (بكالوريا 2008 ر)

$$P(z) = 2z^4 - 2iz^3 - z^2 - 2iz + 2$$

1. بيان أنّه إذا كان α جذرا لكثير الحدود $P(z)$ فإنّ $\frac{1}{\alpha}$ جذر له أيضا

$$P(\alpha) = 0 \Rightarrow 2\alpha^4 - 2i\alpha^3 - \alpha^2 - 2i\alpha + 2 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha^4\left[2 - 2i\left(\frac{1}{\alpha}\right) - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 - 2i\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3 + 2\left(\frac{1}{\alpha}\right)^4\right] = 0$$

$$\Rightarrow 2\left(\frac{1}{\alpha}\right)^4 - 2i\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3 - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 - 2i\left(\frac{1}{\alpha}\right) + 2 = 0 \Rightarrow \boxed{P\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 0}$$

2. التحقق أنّ $1 + i$ جذر لكثير الحدود $P(z)$

$$P(1+i) = 2(1+i)^4 - 2i(1+i)^3 - (1+i)^2 - 2i(1+i) + 2$$

$$(1+i)^2 = 2i \Rightarrow \begin{cases}(1+i)^3 = 2i(1+i) = -2 + 2i \\ (1+i)^4 = (2i)^2 = -4\end{cases}$$

$$P(1+i) = 2(-4) - 2i(-2 + 2i) - 2i - 2i(1+i) + 2 = \boxed{0}$$

3. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z) = 0$

$$z_0 = 1 + i \Rightarrow z_1 = \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$P(z) = [z - (1+i)]\left[z - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right)\right][az^2 + bz + c]$$

$$= \left[z^2 - \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i\right)z + 1\right][az^2 + bz + c]$$

بالمطابقة نجد : $P(z) = \left[z^2 - \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i\right)z + 1\right][2z^2 + (3 - i)z + 2]$

يمكننا أيضا تحليل $P(z)$ باستعمال خوارزمية هورنر على النحو التالي :

	2	$-2i$	-1	$-2i$	2
$1+i$	× ↓ +	=			
	2	$\underbrace{2}_{=2(1+i)-2i}$	$\underbrace{1+2i}_{=2(1+i)-1}$	$\underbrace{-1+i}_{=(1+i)(1+2i)-2i}$	$\underbrace{0}_{=(1+i)(-1+i)+2}$
$\frac{1-i}{2}$	↓				
	2	$3-i$	2	0	0

$$2z^2 + (3 - i)z + 2 = 0\ ;\ \Delta = (3 - i)^2 - 16 = -8 - 6i = (x + iy)^2$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x^2 - y^2 = -8 \\ 2xy = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 = 2 \\ xy = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ y = -\frac{3}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases} \text{أو} \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -8 - 6i = (1 - 3i)^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 1 - 3i$$

$$z_2 = \frac{-3 + i - 1 + 3i}{4} = -1 + i\ ;\ z_3 = \frac{-3 + i + 1 - 3i}{4} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$\boxed{S = \left\{1 + i\ ;\ -1 + i\ ;\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\ ;\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right\}}$$

4. كتابة الحلول على الشكل الأسي

$$z_0 = 1 + i = \boxed{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}\ ; z_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}$$

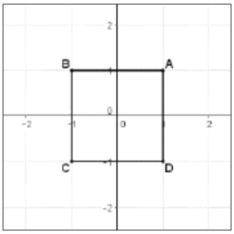
$$z_2 = -1 + i = \boxed{\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}}\ ; z_3 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}}$$

5. $\boldsymbol{z_D = \frac{m}{2} - \frac{m}{2}i}$ **،** $\boldsymbol{z_C = -\frac{m}{2} - \frac{m}{2}i}$ **،** $\boldsymbol{z_B = -1 + i}$ **،** $\boldsymbol{z_A = 1 + i}$

تعيين m حتى يكون الرباعي ABCD مربعا

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow z_B - z_A = z_C - z_D \Rightarrow -2 = -m \Rightarrow \boxed{m = 2}$$

نلاحظ أنّ القيمة الوحيدة للعدد الحقيقي m التي من أجلها يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع هي 2 وفي هذه الحالة يكون الرباعي $ABCD$ مربعا.



* * *

التمرين 07 : (بكالوريا 2009 ع ت)

$$P(z) = (z - 1 - i)(z^2 - 2z + 4)$$

1. حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $P(z) = 0$

2. $z_1 = 1 + i$ و $z_2 = 1 - \sqrt{3}i$

أ. كتابة العددين z_1 و z_2 على الشكل الأسي

$$z_1 = 1 + i = \boxed{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}\,; z_2 = 1 - \sqrt{3}i = \boxed{2e^{-i\frac{\pi}{3}}}$$

ب. كتابة العدد $\frac{z_1}{z_2}$ على الشكل الجبري ثمّ الشكل الأسي

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+i}{1-\sqrt{3}i} = \frac{(1+i)\left(1+\sqrt{3}i\right)}{\left(1-\sqrt{3}i\right)\left(1+\sqrt{3}i\right)} = \boxed{\frac{1-\sqrt{3}}{4} + \frac{1+\sqrt{3}}{4}i}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{2e^{-i\frac{\pi}{3}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}}$$

ج. استنتاج القيمة المضبوطة لكل من $cos\frac{7\pi}{12}$ و $sin\frac{7\pi}{12}$

$$\frac{z_1}{z_2} = \underbrace{\frac{1-\sqrt{3}}{4}}_{x} + \underbrace{\frac{1+\sqrt{3}}{4}}_{y}i = \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}}_{r}e^{i\frac{7\pi}{12}}$$

$$\cos\frac{7\pi}{12} = \frac{x}{r} = \frac{\frac{1-\sqrt{3}}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \boxed{\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}}\ ;\ \sin\frac{7\pi}{12} = \frac{y}{r} = \frac{\frac{1+\sqrt{3}}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \boxed{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}$$

3. تعيين قيم n بحيث يكون العدد $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$ حقيقيا

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n \in \mathbb{R} \Rightarrow arg\left[\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n\right] = k\pi \Rightarrow \frac{7n\pi}{12} = k\pi \Rightarrow n = 12\left(\frac{k}{7}\right) = 12k'$$

منه نستنتج أنّ قيم n التي من أجلها يكون العدد $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$ حقيقيا هي مضاعفات 12.

4. حساب قيمة العدد $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{456}$

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{456}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}\right)^{456}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{456}e^{i\frac{456\times7\pi}{12}}=\frac{1}{2^{228}}\underbrace{e^{i226\pi}}_{=e^0=1}=\boxed{\frac{1}{2^{228}}}$$

* * *

التمرين 08 : (بكالوريا 2009 ع ت)

1. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-2z+4=0$

$$\Delta=4-16=-12=\left(2\sqrt{3}i\right)^2\ ;z_1=\frac{2-2\sqrt{3}i}{2}=1-\sqrt{3}i\ ;z_2=1+\sqrt{3}i$$

$$\boxed{S=\left\{1-\sqrt{3}i\ ;1+\sqrt{3}i\right\}}$$

2. $z_2=1+\sqrt{3}i\ ;z_1=1-\sqrt{3}i$

أ. كتابة العددين z_1 و z_2 على الشكل الأسي

$$z_1=1-\sqrt{3}i=\boxed{2e^{-i\frac{\pi}{3}}}\ ;z_2=1+\sqrt{3}i=\boxed{2e^{i\frac{\pi}{3}}}$$

ب. $z_A=1-i\sqrt{3}$ ، $z_B=1+i\sqrt{3}$ و $z_C=\frac{1}{2}(5+i\sqrt{3})$

حساب الأطوال AB ، AC و BC واستنتاج طبيعة المثلث ABC

$$\begin{cases} AB=|z_B-z_A|=\left|2\sqrt{3}i\right|=\boxed{2\sqrt{3}} \\ AC=|z_C-z_A|=\left|\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i\right|=\boxed{3} \\ BC=|z_C-z_B|=\left|\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|=\boxed{\sqrt{3}} \end{cases}$$

لدينا : $AC^2+BC^2=12=AB^2$ ، منه نستنتج أنّ المثلث ABC قائم في C

ج. إيجاد طويلة و عمدة العدد المركب Z حيث: $Z=\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}$

$$z_C-z_B=\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

$$z_A-z_B=-2\sqrt{3}i=2\sqrt{3}(-i)=2\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

$$|Z|=\frac{|z_C-z_B|}{|z_A-z_B|}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\boxed{\frac{1}{2}}$$

$$\arg(Z)=\arg(z_C-z_B)-\arg(z_A-z_B)=-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}=\boxed{\frac{\pi}{3}}$$

د. حساب z^3 و z^6

$$Z^3=\left(\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^3=\frac{1}{8}e^{i\pi}=\boxed{-\frac{1}{8}}\ ;\ Z^6=\left(\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^6=\frac{1}{64}e^{i2\pi}=\boxed{\frac{1}{64}}$$

استنتاج أن العدد z^{3k} عدد حقيقي من أجل كل عدد طبيعي k

$$Z^{3k}=(Z^3)^k=\left(-\frac{1}{8}\right)^k\Rightarrow\boxed{Z^{3k}\in\mathbb{R}}$$

* * *

التمرين 09 : (بكالوريا 2009 ت ر)

1. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2-2z+2=0$

$\Delta=4-8=-4=(2i)^2\ ;z_1=1-i\ ;z_2=1+i$

$\boxed{S_1=\{1-i\ ;1+i\}}$

2. استنتاج في $\mathbb{C}$ حلول المعادلة : $(\bar{z}+3)^2-2(\bar{z}+3)+2=0$

بوضع : $Z=\bar{z}+3$ ، تؤول المعادلة الثانية إلى $Z^2-2Z+2=0$ ، أي :

$\bar{z}+3=1-i\Rightarrow\bar{z}=-2-i\Rightarrow z=-2+i$

$\bar{z}+3=1+i\Rightarrow\bar{z}=-2+i\Rightarrow z=-2-i$

$\boxed{S_2=\{-2+i\ ;-2-i\}}$

3. $z_A=1-i$ ، $z_B=1+i$ و $z_M=z$

أ. تعيين المجموعة (Γ)

$$M\in(\Gamma)\Rightarrow z=1-i+ke^{i\frac{5\pi}{4}}\Rightarrow z-z_A=ke^{i\frac{5\pi}{4}}\Rightarrow\arg(z-z_A)=\frac{5\pi}{4}$$

$$\Rightarrow\boxed{\left(\vec{u};\overrightarrow{AM}\right)=\frac{5\pi}{4}}$$

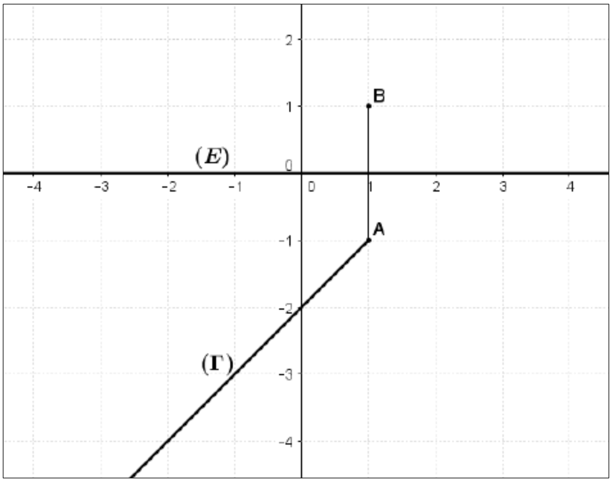
منه نستنتج أنّ المجموعة (Γ) هي نصف المستقيم الذي مبدؤه A وميله $\tan\left(\frac{5\pi}{4}\right)=1$

ب. تعيين المجموعة (E)

$$M\in(E)\Rightarrow|z-1+i|=|z-1-i|\Rightarrow|z-z_A|=|z-z_B|$$

$$\Rightarrow\boxed{AM=BM}$$

منه نستنتج أنّ المجموعة (E) هي محور القطعة المستقيمة $[AB]$ (محور الفواصل)



* * *

التمرين 10 : (بكالوريا 2009 ت ر)

1. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2 - 6z + 18 = 0$

$\Delta = 36 - 72 = -36 = (6i)^2\ ;\ z_1 = 3 - 3i\ ;\ z_2 = 3 + 3i$

$\boxed{S = \{3 - 3i\ ;\ 3 + 3i\}}$

2. $z_1 = 3 - 3i$

أ. كتابة z_1 على الشكل الأسي

$|z_1| = 3\sqrt{2}\ ;\ \arg(z_1) = -\frac{\pi}{4}\ ;\ \boxed{z_1 = 3\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}$

ب. حساب طويلة العدد z_3 و عمدة له

$$z_1 \times z_3 = 6\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right) = 6e^{i\frac{\pi}{12}}$$

$$z_3 = \frac{z_1 \times z_3}{z_1} = \frac{6e^{i\frac{\pi}{12}}}{3\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} |z_3| = \sqrt{2} \\ \arg(z_3) = \frac{\pi}{3} \end{cases}}$$

استنتاج $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$

$$z_3 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}} = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i$$

$$z_1 \times z_3 = (3 - 3i)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i\right) = \frac{3\sqrt{6} + 3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{6} - 3\sqrt{2}}{2}i$$

$$\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\frac{3\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{2}}{6}=\frac{3\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{12}=\boxed{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$$

$$\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\frac{3\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{2}}{6}=\frac{3\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{12}=\boxed{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$$

3. $\boldsymbol{z_A = 3+3i}$ ، $\boldsymbol{z_B = 3-3i}$ و $\boldsymbol{z_C = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2}}$

أ. تعيين قيم α حتى تقبل الجملة $\{(A;1),(B;-1),(C;\alpha)\}$ مرجحا Gα

$$1-1+\alpha\neq 0 \Rightarrow \alpha\neq 0 \Rightarrow \boxed{\alpha\in\mathbb{R}^*}$$

ب. تعيين مجموعة النقط Gα لما يتغير α في $\mathbb{R}^*$

$$z_{G_\alpha}=\frac{z_A-z_B+\alpha z_C}{\alpha}=\frac{3+3i-3+3i+\alpha\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2}\right)}{\alpha}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}+\left(\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{6}{\alpha}\right)i \Rightarrow G_\alpha\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{6}{\alpha}\right)$$

منه نستنتج أنّ مجموعة النقط G_α لما يتغير α في $\mathbb{R}^*$ هي المستقيم الذي معادلته $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

باستثناء النقطة $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ لأنّ $\frac{6}{\alpha}\neq 0$.

* * *

التمرين 11 : (بكالوريا 2009 ر)

$$\boldsymbol{f(z)=\frac{z-i}{z-1}}$$

1. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $(45+45i)f(z)=23+45i-2z$

$$(45+45i)\left(\frac{z-i}{z-1}\right)=23+45i-2z$$

$$\Rightarrow (45+45i)(z-i)=(23+45i-2z)(z-1)$$

$$\Rightarrow 2z^2+20z+68=0 \Rightarrow z^2+10z+34=0$$

$$\Delta=100-136=-36=(6i)^2\ ; z_1=-5-3i\ ; z_2=-5+3i$$

$$\boxed{S=\{-5-3i\ ;-5+3i\}}$$

2.

أ. تعيين مجموعة النقط M بحيث يكون $f(z)$ عددا حقيقيا سالبا تماما

لتكن A و B نقطتان من المستوي حيث : $z_A=1$ و $z_B=i$

$$f(z)<0 \Rightarrow \arg\left(\frac{z-z_B}{z-z_A}\right)=\pi+2k\pi \Rightarrow \underbrace{\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BM}\right)=\pi+2k\pi}_{\text{الشعاعان } \overrightarrow{AM} \text{ و } \overrightarrow{BM} \text{ متعاكسان في الاتجاه}}$$

منه نستنتج أنّ مجموعة النقط M هي القطعة $[AB]$ باستثناء النقطتين A و B

ب. حساب z_0

$$\begin{cases} |f(z_0)|=1 \\ Arg\big(f(z_0)\big)=\dfrac{3\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow f(z_0)=e^{i\frac{3\pi}{2}}=-i \Rightarrow \frac{z_0-i}{z_0-1}=-i$$

$$\Rightarrow z_0-i=-i(z_0-1) \Rightarrow z_0(1+i)=2i \Rightarrow z_0=\frac{2i}{1+i}=\boxed{1+i}$$

3. $z_C=z_0$ ، $z_B=i$ ، $z_A=1$

أ. تعيين نوع المثلث ABC

$$\begin{cases} |f(z_0)|=1 \\ Arg\big(f(z_0)\big)=\dfrac{3\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left|\dfrac{z_C-z_B}{z_C-z_A}\right|=1 \\ Arg\left(\dfrac{z_C-z_B}{z_C-z_A}\right)=\dfrac{3\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AC=BC \\ \left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{BC}\right)=\dfrac{3\pi}{2} \end{cases}$$

منه نستنتج أنّ المثلث ABC قائم في C ومتساوي الساقين

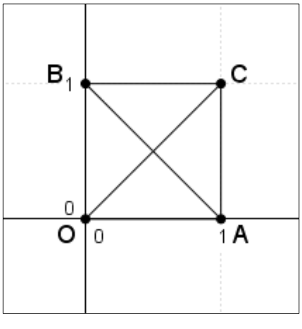
ب. تعيين النقطة D نظيرة C بالنسبة إلى المستقيم (AB)

نظيرة C بالنسبة إلى المستقيم (AB) يعني أنّ الرباعي $ADBC$ متوازي أضلاع أي :

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CB} \Rightarrow z_D-z_A=z_B-z_C \Rightarrow z_D=z_A+z_B-z_C=0 \Rightarrow \boxed{D=O}$$

استنتاج طبيعة الرباعي ADBC

بما أنّ المثلث ABC قائم في C ومتساوي الساقين ، والرباعي $ADBC$ متوازي أضلاع فهو إذن مربع.



* * *

التمرين 12 : (بكالوريا 2010 ع ت)

$z_A = 1 + i$ و $z_B = 3i$

1. كتابة z_A و z_B على الشكل الأسي

$$z_A = 1 + i = \boxed{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}\ ;\ z_B = 3i = \boxed{3e^{i\frac{\pi}{2}}}$$

2. $z' = 2iz + 6 + 3i$

أ. تعيين العناصر المميزة للتشابه المباشر S

$$k = |2i| = \boxed{2}\ ;\ \theta = \arg(2i) = \boxed{\frac{\pi}{2}}\ ; z_w = \frac{b}{1-a} = \frac{6+3i}{1-2i} = 3i = \boxed{z_B}$$

منه نستنتج أنّ التشابه المباشر S مركزه B نسبته 2 وزاويته $\frac{\pi}{2}$

ب. تعيين z_C لاحقة النقطة C صورة النقطة A بالتشابه المباشر S

$$z_C = 2iz_A + 6 + 3i = 2i(1+i) + 6 + 3i = \boxed{4+5i}$$

ج. استنتاج طبيعة المثلث ABC

$$S(A) = C \Rightarrow \begin{cases} BC = 2BA \\ (\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}) = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\text{المثلث } ABC \text{ قائم في } B}$$

3. $D\{(A;2),(B;-2),(C;2)\}$

أ. تعيين z_D

$$z_D = \frac{2z_A - 2z_B + 2z_C}{2} = z_A - z_B + z_C = 1 + i - 3i + 4 + 5i = \boxed{5+3i}$$

ب. تعيين طبيعة الرباعي ABCD

$$z_D = z_A - z_B + z_C \Rightarrow z_D - z_C = z_A - z_B \Rightarrow \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$$

إذن الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع ، وبما أنّ المثلث ABC قائم في B
نستنتج أنّ الرباعي $ABCD$ مستطيل

4.

أ. التحقق أن النقطة E ذات اللاحقة $z_E = 6 + 3i$ تنتمي إلى (Δ)

$$\frac{z_B - z_E}{z_D - z_E} = \frac{3i - 6 - 3i}{5 + 3i - 6 - 3i} = 6\ ;\ \frac{z_B - z_E}{z_D - z_E} > 0 \Rightarrow \boxed{E \in (\Delta)}$$

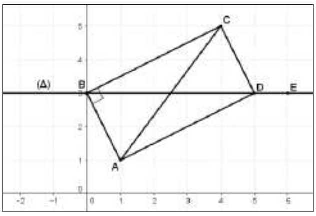
ب. التفسير الهندسي لعمدة العدد المركب $\frac{z_B - z}{z_D - z}$

عمدة العدد المركب $\frac{z_B - z}{z_D - z}$ هي قيس الزاوية $(\overrightarrow{MD};\overrightarrow{MB})$

تعيين المجموعة (Δ)

$$M \in (\Delta) \Rightarrow \arg\left(\frac{z_B - z}{z_D - z}\right) = 2k\pi \Rightarrow \underbrace{(\overrightarrow{MD};\overrightarrow{MB}) = 2k\pi}_{\text{الشعاعان } \overrightarrow{MB} \text{ و } \overrightarrow{MD} \text{ في نفس الاتجاه}}$$

منه نستنتج أنّ المجموعة (Δ) هي المستقيم (BD) باستثناء القطعة $[BD]$



التمرين 13 : (بكالوريا 2010 ع ت)

1. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-6z+18=0$

$\Delta=36-72=-36=(6i)^2\;;z_1=3+3i\;;z_2=3-3i$

$\boxed{S=\{3+3i\;;3-3i\}}$

كتابة الحلين على الشكل الأسي

$$\begin{cases}|z_1|=3\sqrt{2}\\ arg(z_1)=\dfrac{\pi}{4}\end{cases}\Rightarrow\boxed{z_1=3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}\;;\;\begin{cases}|z_2|=3\sqrt{2}\\ arg(z_2)=-\dfrac{\pi}{4}\end{cases}\Rightarrow\boxed{z_2=3\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}$$

2. $z_A=3+3i$ ، $z_B=\overline{z_A}$ ، $z_C=-z_A$ و $z_D=-z_B$

أ. بيان أنّ النقط A ، B ، C و D تنتمي إلى نفس الدائرة ذات المركز O

$$\begin{cases}z_B=\overline{z_A}\\ z_C=-z_A\\ z_D=-\overline{z_A}\end{cases}\Rightarrow|z_A|=|z_B|=|z_C|=|z_D|\Rightarrow OA=OB=OC=OD$$

منه نستنتج أنّ النقط A ، B ، C و D تنتمي إلى نفس الدائرة ذات المركز O

ب. تعيين زاوية للدوران R الذي مركزه O ويحوّل A إلى B

$$R(A)=B\Rightarrow z_B=e^{i\theta}.z_A\Rightarrow e^{i\theta}=\frac{z_B}{z_A}=\frac{3-3i}{3+3i}=\frac{1-i}{1+i}=-i=e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow\boxed{\theta=-\frac{\pi}{2}}$$

ج. بيان أنّ النقط A ، O و C في استقامية

بما أنّ $z_C=-z_A$ ، فإنّ النقطة C هي نظيرة A بالنسبة إلى O ومنه نستنتج أنّ النقط A ، O و C في استقامية

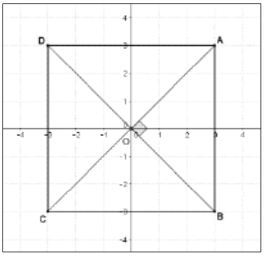
بيان أنّ النقط B ، O و D في استقامية

بما أنّ $z_D=-z_B$ ، فإنّ النقطة D هي نظيرة B بالنسبة إلى O ومنه نستنتج أنّ النقط B ، O و D في استقامية

ملاحظة: يمكن اثبات استقامية النقط A ، O و C وكذلك B ، O و D بحساب العددين $\frac{z_A}{z_C}$ و $\frac{z_B}{z_D}$ وبيان أنهما حقيقيان

د. استنتاج طبيعة الرباعي ABCD

القطران $[AC]$ و $[BD]$ متناصفان في النقطة O ومتقايسان
(لأنّ $OA = OB = OC = OD$) ومتعامدان (لأنّ $\widehat{AOB} = -\frac{\pi}{2}$) ،
ومنه نستنتج أنّ الرباعي $ABCD$ مربّع.



* * *

التمرين 14 : (بكالوريا 2010 ت ر)

1. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $(z-3+2i)(z^2+6z+10)=0$

$(z-3+2i)(z^2+6z+10)=0 \Rightarrow z-3+2i=0$ أو $z^2+6z+10=0$

$z-3+2i=0 \Rightarrow z=3-2i$

$z^2+6z+10=0\ ;\ \Delta=-4=(2i)^2\ ; z_1=-3+i\ ; z_2=-3-i$

$\boxed{S=\{3-2i\ ;\ -3+i\ ; -3-i\}}$

2. تعليم النقط A، C، D و I

(انظر الشكل في نهاية التمرين)

3. $$① \ldots \begin{cases} \boldsymbol{arg(z-3+2i)=arg(z-1)+\frac{\pi}{2}} \\ \boldsymbol{|z-3+2i|=|z-1|} \end{cases}$$

أ. بيان أنّ الجملة ① تكافئ: $\boldsymbol{\frac{z-3+2i}{z-1}=i}$

$$① \Leftrightarrow \begin{cases} arg(z-3+2i)-arg(z-1)=\frac{\pi}{2} \\ \frac{|z-3+2i|}{|z-1|}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} arg\left(\frac{z-3+2i}{z-1}\right)=\frac{\pi}{2} \\ \left|\frac{z-3+2i}{z-1}\right|=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{z-3+2i}{z-1}=e^{i\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow \boxed{\frac{z-3+2i}{z-1}=i}$$

تعيين قيمة z

$$\frac{z-3+2i}{z-1}=i \Rightarrow z-3+2i=i(z-1) \Rightarrow z(1-i)=3-3i$$

$$\Rightarrow z=\frac{3(1-i)}{1-i}=\boxed{3}$$

ب. التحقق أنّ : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

$$\begin{cases} z_B - z_A = 3-3+2i = 2i \\ z_C - z_D = -3+i+3+i = 2i \end{cases} ; \; z_B - z_A = z_C - z_D \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}}$$

تعيين طبيعة الرباعي $ABCD$

بما أنّ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ ، فإنّ الرباعي $ABCD$ متوازي الأضلاع

ج. كتابة العدد Z على الشكل الأسي

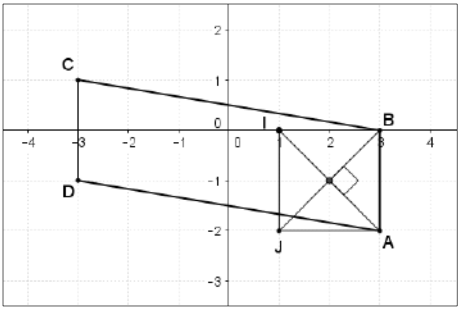
$$Z=\frac{z_A - z_I}{z_B - z_J}=\frac{3-2i-1}{3-1+2i}=\frac{2-2i}{2+2i}=\frac{1-i}{1+i}=\frac{-2i}{2}=-i=\boxed{e^{-i\frac{\pi}{2}}}$$

التحقق أنّ : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{JI}$

$$z_I - z_J = 1-1+2i = 2i = z_B - z_A \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{JI}}$$

تعيين طبيعة الرباعي $ABIJ$

بما أنّ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{JI}$ و $\frac{z_A-z_I}{z_B-z_J}=e^{-i\frac{\pi}{2}}$ ، فإنّ الرباعي $ABIJ$ مربّع (متوازي الأضلاع قطراه متقايسان ومتعامدان $AI=BJ$ و $\overrightarrow{AI}\perp\overrightarrow{BJ}$)



* * *

التمرين 15 : (بكالوريا 2010 ت ر)

.1   أ. كتابة العدد a على الشكل الأسي

$$a=-2+2i\sqrt{3}=\underbrace{4}_{|a|}\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\Rightarrow\boxed{a=4e^{i\frac{2\pi}{3}}}$$

ب. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة: $\mathbf{z^2=-2+2i\sqrt{3}}$

$$z=re^{i\theta}\Rightarrow \mathrm{z}^2=r^2e^{i2\theta}=4e^{i\frac{2\pi}{3}}\Rightarrow\begin{cases} r^2=4 \\ 2\theta=\frac{2\pi}{3}+2k\pi\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} r=2 \\ \theta=\frac{\pi}{3}+k\pi\end{cases}$$

$$\begin{cases} z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1+\sqrt{3}i \\ z_2 = 2e^{i\frac{4\pi}{3}} = 2\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -1-\sqrt{3}i \end{cases} \Rightarrow \boxed{S = \left\{1+\sqrt{3}i; -1-\sqrt{3}i\right\}}$$

.2 $\boldsymbol{z_C = 1+\sqrt{3}i}$ ، $\boldsymbol{z_B = -1-\sqrt{3}i}$ ، $\boldsymbol{z_A = -2}$

أ. حساب طويلة العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ و عمدة له

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{1+\sqrt{3}i+2}{-1-\sqrt{3}i+2} = \frac{3+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i} = \frac{(3+\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)}{(1-\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)} = \sqrt{3}i$$

$$\Rightarrow \boxed{\left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = \sqrt{3}\,; \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{2}}$$

ب. استنتاج طبيعة المثلث ABC

$$\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{\text{المثلث } ABC \text{ قائم في } A}$$

.3 **لتكن $(\boldsymbol{E})$ مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث : $\boldsymbol{arg(\bar{z}+2) = \frac{\pi}{3}}$**

أ. التحقق أن B تنتمي إلى $(\boldsymbol{E})$

$$\overline{z_B} + 2 = 1+\sqrt{3}i = 2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \Rightarrow \arg(\overline{z_B}+2) = \frac{\pi}{3}$$

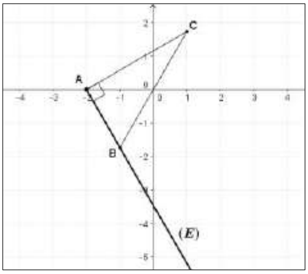
$$\Rightarrow \boxed{B \in (E)}$$

ب. تعيين المجموعة $(\boldsymbol{E})$

$$M \in (E) \Rightarrow \arg(\bar{z}+2) = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \arg(\overline{\bar{z}+2}) = -\frac{\pi}{3} \Rightarrow \arg(z+2) = -\frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \arg(z - z_A) = -\frac{\pi}{3} \Rightarrow \boxed{\left(\vec{u};\overrightarrow{AM}\right) = -\frac{\pi}{3}}$$

منه نستنتج أنّ المجموعة (E) هي نصف المستقيم الذي مبدؤه A وميله $\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$



* * *

التمرين 16 : (بكالوريا 2010 ر)

$$z^3-3z^2+3z-9=0\ \ldots(E)$$

1. أ. التحقق أنّ 3 حل للمعادلة (E)

$$3^3-3(9)+3(3)-9=36-36=0\Rightarrow\boxed{\text{3 حل للمعادلة } (E)}$$

تعيين الأعداد الحقيقية a ، b ، c

	1	−3	3	−9
3				
	1	0	3	0

$$\Rightarrow\boxed{\begin{cases}a=1\\b=0\\c=3\end{cases}}$$

$$z^3-3z^2+3z-9=(z-3)(z^2+3)$$

ب. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E)

$$(E)\Rightarrow(z-3)(z^2+3)=0\Rightarrow z-3=0 \text{ أو } z^2+3=0$$

$$\Rightarrow z=3 \text{ أو } z^2=-3=\left(\sqrt{3}i\right)^2\Rightarrow z_0=3\,;z_1=i\sqrt{3}\,;z_2=-i\sqrt{3}$$

$$\boxed{S=\left\{3\,;i\sqrt{3}\,;-i\sqrt{3}\right\}}$$

2. $z_A=3$ ، $z_B=i\sqrt{3}$ ، $z_C=-i\sqrt{3}$

بيان أنّ المثلث ABC متقايس الأضلاع

$$\begin{cases}AB=|z_B-z_A|=\left|-3+i\sqrt{3}\right|=2\sqrt{3}\\AC=|z_C-z_A|=\left|-3-i\sqrt{3}\right|=2\sqrt{3}\Rightarrow\boxed{\text{المثلث } ABC \text{ متقايس الأضلاع}}\\BC=|z_C-z_B|=\left|-2i\sqrt{3}\right|=2\sqrt{3}\end{cases}$$

3. تعيين لاحقة النقطة E

$$R(D)=E\Rightarrow z_E=e^{i\frac{\pi}{3}}\times z_D=e^{i\frac{\pi}{3}}\times2e^{i\frac{5\pi}{6}}=2e^{i\frac{7\pi}{6}}=2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)$$

$$\Rightarrow\boxed{z_E=-\sqrt{3}-i}$$

4. $z_F=1-i\sqrt{3}$

أ. حساب $\frac{z_F}{z_E}$ واستنتاج أنّ المستقيمين (OE) و (OF) متعامدان

$$\frac{z_F}{z_E}=\frac{1-i\sqrt{3}}{-\sqrt{3}-i}=\frac{\left(1-i\sqrt{3}\right)\left(-\sqrt{3}+i\right)}{\left(-\sqrt{3}-i\right)\left(-\sqrt{3}+i\right)}=\frac{4i}{4}=\boxed{i}$$

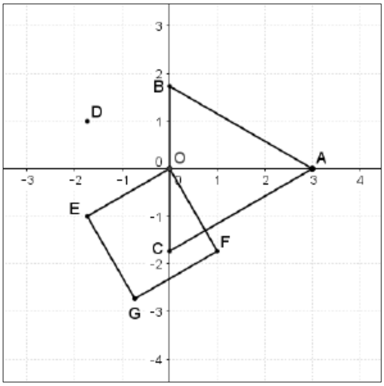
$$\frac{z_F}{z_E}=i\Rightarrow\arg\left(\frac{z_F}{z_E}\right)=\frac{\pi}{2}+2k\pi\Rightarrow\left(\overrightarrow{OE};\overrightarrow{OF}\right)=\frac{\pi}{2}+2k\pi\Rightarrow\boxed{(OE)\perp(OF)}$$

ب. تعيين z_G لاحقة النقطة G بحيث يكون $OEGF$ مربعا

بما أنّ $\frac{z_F}{z_E} = i$ ، فإنّ المثلث OEF قائم في O ومتساوي الساقين ، ويشترط للرباعي $OEGF$ حتى يكون مربعا أن يكون متوازي الأضلاع ، أي :

$$\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{OE} \Rightarrow z_G - z_F = z_E \Rightarrow z_G = z_F + z_E = 1 - i\sqrt{3} - \sqrt{3} - i$$

$$\Rightarrow \boxed{z_G = \left(1 - \sqrt{3}\right) - \left(1 + \sqrt{3}\right)i}$$



* * *

التمرين 17 : (بكالوريا 2010 ر)

1. $z_A = 1 - 4i$ ، $z_B = -1 - 2i$ ، $z_I = 1 - 2i$.

أ. **تعليم النقط A ، B ، I**

(انظر الشكل في نهاية التمرين)

ب. **كتابة Z على الشكل الجبري**

$$Z = \frac{z_I - z_A}{z_I - z_B} = \frac{1 - 2i - 1 + 4i}{1 - 2i + 1 + 2i} = \frac{2i}{2} = \boxed{i}$$

ج. **تعيين نوع المثلث IAB**

$$\begin{cases} \left|\frac{z_I - z_A}{z_I - z_B}\right| = 1 \\ \arg\left(\frac{z_I - z_A}{z_I - z_B}\right) = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AI = BI \\ \left(\overrightarrow{BI};\overrightarrow{AI}\right) = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\text{المثلث } IAB \text{ قائم في } I \text{ ومتساوي الساقين}}$$

د. **حساب z_C**

$$C = h(I) \Rightarrow z_C - z_A = 2(z_I - z_A) \Rightarrow z_C = 2z_I - z_A = 2(1 - 2i) - 1 + 4i$$

$$\Rightarrow \boxed{z_C = 1}$$

ه. **حساب z_D**

$$D\{(A;1),(B;-1),(C;1)\} \Rightarrow z_D = z_A - z_B + z_C = 1 - 4i + 1 + 2i + 1$$

$$\Rightarrow \boxed{z_D = 3 - 2i}$$

و. **بيان أنّ ABCD مربع**

الطريقة الأولى:

$$z_D = z_A - z_B + z_C \Rightarrow z_D - z_C = z_A - z_B \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}} \dots ①$$

$$\frac{z_B - z_A}{z_D - z_A} = \frac{-1-2i-1+4i}{3-2i-1+4i} = \frac{-2+2i}{2+2i} = \frac{-1+i}{1+i} = \boxed{i} \dots ②$$

من ① و② نستنتج أنّ الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع له ضلعان متتاليان متقايسان ومتعامدان [$AB = AD$ و$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$] ، فهو إذن مربّع مركزه I

الطريقة الثانية:

$$\frac{z_A + z_C}{2} = 1 - 2i = \boxed{z_I}\ ;\ \frac{z_B + z_D}{2} = 1 - 2i = \boxed{z_I}$$

القطران $[AC]$ و$[BD]$ متناصفان ، وبما أنّ المثلث IAB قائم في I ومتساوي الساقين فإنّ القطرين $[AC]$ و$[BD]$ متعامدان ومتقايسان ومنه نستنتج أنّ الرباعي $ABCD$ مربّع

2. **تعيين وإنشاء (Γ_1)**

$$M \in (\Gamma_1) \Rightarrow \left\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\right\| \Rightarrow \left\|\overrightarrow{MD}\right\| = \frac{1}{2}\left\|2\overrightarrow{MI}\right\|$$

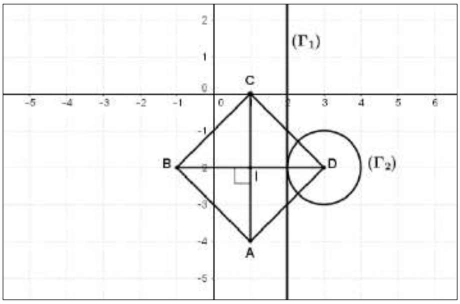
$$\Rightarrow \boxed{\left\|\overrightarrow{MD}\right\| = \left\|\overrightarrow{MI}\right\|}$$

منه نستنتج أنّ المجموعة (Γ_1) هي محور القطعة $[ID]$

3. **تعيين وإنشاء (Γ_2)**

$$M \in (\Gamma_2) \Rightarrow \left\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = 1 \Rightarrow \boxed{\left\|\overrightarrow{MD}\right\| = 1}$$

منه نستنتج أنّ المجموعة (Γ_2) هي الدائرة التي مركزها D ونصف قطرها 1.



* * *

التمرين 18 : (بكالوريا 2011 ع ت)

$z_C = -4 + i$ ، $z_B = 2 + 3i$ ، $z_A = -i$

1. أ. **كتابة $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل الجبري**

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{-4+i+i}{2+3i+i} = \frac{-4+2i}{2+4i} = \frac{-2+i}{1+2i} = \frac{(-2+i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{5i}{5} = \boxed{i}$$

ب. تعيين طويلة $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ و عمدة له

$$\left|\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right| = |i| = \boxed{1}\ ;\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right) = \arg(i) = \boxed{\frac{\pi}{2}}$$

استنتاج طبيعة المثلث ABC

$$\begin{cases}\left|\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right| = 1\\ \arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right) = \frac{\pi}{2}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}AB = AC\\ (\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}\end{cases} \Rightarrow \boxed{\text{المثلث } ABC \text{ قائم في } A \text{ ومتساوي الساقين}}$$

2. $\boldsymbol{z' = iz - 1 - i}$

أ. تعيين طبيعة التحويل T وتحديد عناصره المميزة

$$\begin{cases}a = i\\ b = -1 - i\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\theta = \arg(i) = \frac{\pi}{2}\\ z_w = \frac{b}{1-a} = \frac{-1-i}{1-i} = \frac{(-1-i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = -i = z_A\end{cases}$$

منه نستنتج أنّ التحويل T دوران مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$

ب. تعيين صورة النقطة B بالتحويل T

$$z_{B'} = iz_B - 1 - i = i(2+3i) - 1 - i = -4 + i = \boxed{z_C}$$

3. $\boldsymbol{z_D = -6 + 2i}$

أ. بيان أنّ النقط A ، C ، D في استقامية

$$\frac{z_D - z_A}{z_C - z_A} = \frac{-6+2i+i}{-4+i+i} = \frac{-6+3i}{-4+2i} = \frac{3(-2+i)}{2(-2+i)} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{z_D - z_A}{z_C - z_A} > 0 \Rightarrow \arg\left(\frac{z_D - z_A}{z_C - z_A}\right) = 2k\pi \Rightarrow \boxed{\text{النقط } A \text{ ، } C \text{ و} D \text{ في استقامية}}$$

ب. تعيين نسبة التحاكي h

$$h(C) = D \Rightarrow z_D - z_A = k(z_C - z_A) \Rightarrow k = \frac{z_D - z_A}{z_C - z_A} = \boxed{\frac{3}{2}}$$

ج. تعيين العناصر المميزة للتشابه S

$$\begin{cases}D = h(C)\\ C = T(B)\end{cases} \Rightarrow D = h[T(B)] = hoT(B) \Rightarrow \boxed{S = hoT}$$

منه نستنتج أنّ التشابه S الذي مركزه A هو تركيب الدوران T والتحاكي h ،

وبالتالي فإنّ نسبة التشابه هي $\frac{3}{2}$ وزاويته هي $\frac{\pi}{2}$.

* * *

التمرين 19 : (بكالوريا 2011 ع ت)

$z_A = 3 - 2i$ ، $z_B = 3 + 2i$ ، $z_C = 4i$.

1. أ. **تعليم النقط A ، B ، C**

(انظر الشكل في نهاية التمرين)

ب. **تعيين طبيعة الرباعي OABC**

$$z_B - z_C = 3 + 2i - 4i = 3 - 2i = z_A \Rightarrow \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OA}$$

$$\Rightarrow \boxed{OABC \text{ متوازي أضلاع}}$$

ملاحظة: الرباعي $OABC$ ليس معيّن لأنّ $OA \neq OC$ $(|z_A| \neq |z_C|)$

ج. **تعيين لاحقة النقطة Ω مركز الرباعي OABC**

$$[OB] \text{ منتصف } \Omega \Rightarrow z_\Omega = \frac{z_B}{2} = \boxed{\frac{3}{2} + i}$$

2. تعيين وإنشاء المجموعة (E)

بما أنّ النقطة Ω مركز الرباعي $OABC$ فهي مرجح الجملة :

$\{(O;1), (A;1), (B;1), (C;1)\}$

$$M \in (E) \Rightarrow \left\|\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = 12 \Rightarrow \left\|4\overrightarrow{M\Omega}\right\| = 12$$

$$\Rightarrow \boxed{\left\|\overrightarrow{M\Omega}\right\| = 3}$$

منه نستنتج أنّ المجموعة (E) هي الدائرة التي مركزها Ω ونصف قطرها 3

3. أ. **حلّ في ℂ المعادلة : $z^2 - 6z + 13 = 0$**

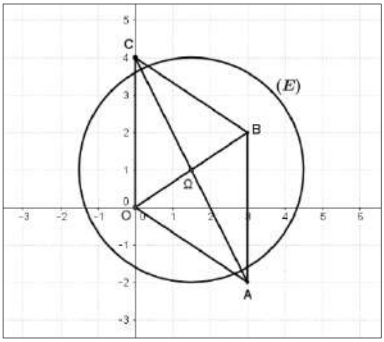
$$\Delta = 36 - 52 = -16 = (4i)^2 \,;\, z_0 = 3 - 2i = z_A \,;\, z_1 = 3 + 2i = z_B$$

$$\boxed{S = \{3 - 2i \,;\, 3 + 2i\}}$$

ب. **تعيين مجموعة النقط M من المستوي التي التحقق: $|z - z_0| = |z - z_1|$**

$$|z - z_0| = |z - z_1| \Rightarrow |z - z_A| = |z - z_B| \Rightarrow \boxed{AM = BM}$$

منه نستنتج أنّ مجموعة النقط M هي محور القطعة $[AB]$ (محور الفواصل).



* * *

التمرين 20 : (بكالوريا 2011 ت ر)

$$z^2-2\sqrt{3}z+4=0\;...(E)$$

1. **حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E)**

$$\Delta=\left(-2\sqrt{3}\right)^2-16=12-16=-4=(2i)^2\;;\;z_1=\sqrt{3}+i\;;\;z_2=\sqrt{3}-i$$

$$\boxed{S=\{\sqrt{3}+i\;;\sqrt{3}-i\}}$$

كتابة الحلول على الشكل المثلثي

$$z_1=\sqrt{3}+i=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)\Rightarrow\boxed{z_1=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)}$$

$$z_2=\sqrt{3}-i=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)\Rightarrow\boxed{z_2=2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]}$$

2. $\boldsymbol{z_A=2i}$ ، $\boldsymbol{z_B=\sqrt{3}+i}$ ، $\boldsymbol{z_C=\sqrt{3}-i}$ ، $\boldsymbol{L=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}$

أ. كتابة L على الشكل الأسي

$$L=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)\Rightarrow\boxed{L=e^{i\frac{4\pi}{3}}}$$

ب. اثبات أنّ: $\boldsymbol{z_A-z_B=L(z_C-z_B)}$

$$\begin{cases}z_A-z_B=2i-\sqrt{3}-i=-\sqrt{3}+i\\ L(z_C-z_B)=\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(-2i)=-\sqrt{3}+i\end{cases}\Rightarrow\boxed{z_A-z_B=L(z_C-z_B)}$$

استنتاج أنّ A صورة C بتحويل نقطي يُطلب تعيينه و تحديد عناصره المميزة

$$z_A-z_B=L(z_C-z_B)\Rightarrow\boxed{z_A-z_B=e^{i\frac{4\pi}{3}}(z_C-z_B)}$$

منه نستنتج أنّ النقطة A هي صورة C بالدوران الذي مركزه B وزاويته $\frac{4\pi}{3}$

ج. استنتاج نوع المثلث ABC وحساب مساحته S

$$z_A-z_B=e^{i\frac{4\pi}{3}}(z_C-z_B)\Rightarrow\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}=e^{i\frac{4\pi}{3}}\Rightarrow\left|\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}\right|=1$$

$$\Rightarrow\boxed{BA=BC}$$

منه نستنتج أنّ المثلث ABC متساوي الساقين

لتكن النقطة I منتصف $[AC]$. لدينا : $z_I=\frac{z_A+z_C}{2}=\frac{\sqrt{3}+i}{2}=\frac{z_B}{2}$

$$S=\frac{1}{2}(AC\times BI)=\frac{1}{2}|z_C-z_A|\times|z_I-z_B|=\frac{1}{2}\left|\sqrt{3}-3i\right|\times\frac{1}{2}\left|\sqrt{3}+i\right|$$

$$=\frac{1}{4}\times\sqrt{12}\times2=\frac{4\sqrt{3}}{4}=\boxed{\sqrt{3}\,ua}$$

* * *

التمرين 21 : (بكالوريا 2011 ت ر)

$$\boldsymbol{L=\frac{-4\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{5+3i}}$$

1. أ. كتابة L على الشكل الجبري ثمّ على الشكل الأسي

$$L=\frac{(-4+i)\sqrt{2}}{5+3i}=\sqrt{2}\left[\frac{(-4+i)(5-3i)}{(5+3i)(5-3i)}\right]=\sqrt{2}\left(\frac{-17+17i}{34}\right)$$

$$=\boxed{-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i}$$

$$L=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i=\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\Rightarrow\boxed{L=e^{i\frac{3\pi}{4}}}$$

ب. **بيان أنّ: $\boldsymbol{L^{12}+1=0}$**

$$L^{12}+1=\left(e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)^{12}+1=e^{i9\pi}+1=e^{i\pi}+1=-1+1=\boxed{0}$$

حساب: $\boldsymbol{\left(-4\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)^{12}+(5+3i)^{12}}$

$$L^{12}+1=0\Rightarrow L^{12}=-1\Rightarrow\left(\frac{-4\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{5+3i}\right)^{12}=-1$$

$$\Rightarrow\left(-4\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)^{12}=-(5+3i)^{12}$$

$$\Rightarrow\boxed{\left(-4\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)^{12}+(5+3i)^{12}=0}$$

ج. **اثبات أنّ: $\boldsymbol{L^{4n}+L^{4p}=0}$**

$$L^{4n}+L^{4p}=\left(e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)^{4n}+\left(e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)^{4p}=e^{i3n\pi}+e^{i3p\pi}=-1+1=\boxed{0}$$

2. $\boldsymbol{z_A=5+3i}$ ، $\boldsymbol{z_B=5-3i}$

أ. **تعيين $\boldsymbol{z_{A'}}$**

$$A'=S(A)\Rightarrow z_{A'}-z_B=\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}(z_A-z_B)\Rightarrow z_{A'}=\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}(z_A-z_B)+z_B$$

$$\Rightarrow z_{A'}=\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)(6i)+5-3i=\boxed{-1-9i}$$

ب. تعيين $\boldsymbol{z_G}$

$$G\{(A;1),(B;1),(A';1)\}\Rightarrow z_G=\frac{1}{3}(z_A+z_B+z_{A'})=\frac{1}{3}(9-9i)$$

$$\Rightarrow\boxed{z_G=3-3i}$$

* * *

التمرين 22 : (بكالوريا 2011 ر)

$z_A = 1 - i$ ، $z_B = -1 + i$ ، $z_C = \sqrt{3}(1 + i)$.

1. **كتابة z_A ، z_B ، z_C على الشكل الأسّي**

$$z_A = 1 - i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \boxed{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}$$

$$z_B = -1 + i = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \boxed{\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}}$$

$$z_C = \sqrt{3}(1 + i) = \sqrt{6}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \boxed{\sqrt{6}e^{i\frac{\pi}{4}}}$$

2. **أ. حساب الطويلة وعمدة للعدد المركب $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$**

$$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{-2 + 2i}{\left(\sqrt{3} - 1\right) + \left(\sqrt{3} + 1\right)i} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\left|\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right| = \left|\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = \boxed{1}\,; \arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) = \arg\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \boxed{\frac{\pi}{3}}$$

تفسير النتائج هندسيا

$$\left|\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right| = 1 \Rightarrow \boxed{AB = AC}\,; \arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \boxed{\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right) = \frac{\pi}{3}}$$

ب. **تحديد طبيعة المثلث ABC**

من التفسير السابق نستنتج أنّ المثلث ABC متقايس الأضلاع

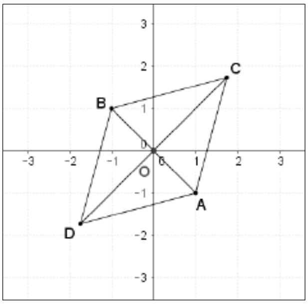
3. **تعيين لاحقة النقطة D بحيث يكون الرباعي $ACBD$ معيّنا**

طريقة ①: بما أنّ المثلث ABC متقايس الأضلاع ، فإنّ الرباعي $ACBD$ يكون معيّنا إذا كان متوازي أضلاع

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB} \Rightarrow z_C - z_A = z_B - z_D \Rightarrow z_D = z_A + z_B - z_C = \boxed{-\sqrt{3}(1 + i)}$$

طريقة ②: بما أنّ المثلث ABC متقايس الأضلاع والنقطتين A وB متناظرتين بالنسبة إلى O ، فإنّ النقطتين C وD متناظرتين بالنسبة إلى O ، أي :

$$z_D = -z_C = \boxed{-\sqrt{3}(1 + i)}$$



4. $z' = (-1 + i)z + 1 - 3i$

أ. تعيين طبيعة التحويل T وعناصره المميزة

$$z' = (-1+i)z + 1 - 3i = z_B z + 1 - 3i = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}z + 1 - 3i$$

منه نستنتج أنّ T تشابه مباشر نسبته $\sqrt{2}$ ، زاويته $\frac{3\pi}{4}$ ومركزه A :

$$z_\omega = \frac{b}{1-a} = \frac{1-3i}{2-i} = 1 - i = z_A$$

ب. استنتاج طبيعة التحويل ToT وعناصره المميزة

$$\boxed{T = S_{(\omega;k;\theta)} \Rightarrow ToT = S_{(\omega;k^2;2\theta)}}$$

بتطبيق هذه القاعدة على التحويل T ، نستنتج أنّ ToT تشابه مباشر نسبته 2 ، زاويته $\frac{3\pi}{2}$ ومركزه A.

* * *

التمرين 23 : (بكالوريا 2011 ر)

الإجابة بصحيح أو خطأ مع التبرير في كل حالة من الحالات الآتية:

1. أ. الشكل المثلثي للعدد المركب $a = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ هو $-\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$: **خطأ**

$$|a| = 1\,;\arg(a) = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \boxed{a = \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}}$$

ب. $a^{2011} + \bar{a} = 0$ ، حيث: $\bar{a}$ مرافق a : **صحيح**

$$a = e^{i\frac{3\pi}{4}} \xRightarrow[\arg(\bar{a})=-\arg(a)]{} a^{2011} + \bar{a} = \underbrace{e^{i\frac{6033\pi}{4}}}_{\frac{6033\pi}{4}=1508\pi+\frac{\pi}{4}} + \underbrace{e^{-i\frac{3\pi}{4}}}_{-\frac{3\pi}{4}\equiv\frac{5\pi}{4}[2\pi]} = e^{i\frac{\pi}{4}} + e^{i\frac{5\pi}{4}}$$

$$a^{2011} + \bar{a} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} = \boxed{0}$$

2. **أ.** التحويل T الذي كتابته المركبة: $z' = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)z$ دوران زاويته $-\frac{\pi}{4}$ و مركزه مبدأ المعلم : **خطأ**

$$z' = az = e^{i\frac{3\pi}{4}}z \Rightarrow \boxed{T \text{ دوران زاويته } \frac{3\pi}{4} \text{ومركزه } O}$$

ب. مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث: $\arg(z-i) = -\frac{\pi}{4}$ هي المستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة A ذات اللاحقة i و شعاع توجيهه $\vec{u}$ لاحقته $1+i$: **خطأ**

$$\arg(z-i) = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow \arg(z-z_A) = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow \boxed{\left(\vec{u};\overrightarrow{AM}\right) = -\frac{\pi}{4}}$$

مجموعة النقط M هي المستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة A ذات اللاحقة i و شعاع توجيهه $\vec{u}$ لاحقته $1-i$

* * *

التمرين 24 : (بكالوريا 2012 ع ت)

1. **حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z = \frac{3i(z+2i)}{z-2+3i}$ ، $z \neq 2-3i$**

$$z = \frac{3i(z+2i)}{z-2+3i} \Rightarrow z(z-2+3i) = 3i(z+2i) \Rightarrow z^2 - 2z + 6 = 0$$

$$\Delta = 4 - 24 = -20 = \left(2\sqrt{5}i\right)^2 ; z_1 = 1 + \sqrt{5}i ; z_2 = 1 - \sqrt{5}i$$

$$\boxed{S = \left\{1 + \sqrt{5}i ; 1 - \sqrt{5}i\right\}}$$

2. **التحقق أنّ A و B تنتميان إلى دائرة مركزها O يُطلب تعيين نصف قطرها**

$$|z_A| = \left|1 + \sqrt{5}i\right| = \sqrt{6} ;\ |z_B| = \left|1 - \sqrt{5}i\right| = \sqrt{6} ; \boxed{OA = OB = \sqrt{6}}$$

منه نستنتج أنّ النقطتين A و B تنتميان إلى الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها $\sqrt{6}$

3. **$z' = \frac{3i(z+2i)}{z-2+3i}$ ، $z_C = -2i$ ، $z_D = 2-3i$ ، $z_E = 3i$**

أ. التعبير عن المسافة OM' بدلالة المسافتين CM و DM

$$z' = \frac{3i(z+2i)}{z-2+3i} = \frac{z_E(z-z_C)}{z-z_D} \Rightarrow |z'| = |z_E|\left|\frac{z-z_C}{z-z_D}\right| \Rightarrow \boxed{OM' = 3\frac{CM}{DM}}$$

ب. استنتاج أنّه من أجل كل نقطة M من (Δ) فإنّ النقطة M' تنتمي إلى دائرة (γ) يُطلب تعيين مركزها ونصف قطرها

$$M \in (\Delta) \Rightarrow CM = DM \Rightarrow \boxed{OM' = 3}$$

منه نستنتج أنّ النقطة M' تنتمي إلى الدائرة (γ) التي مركزها O ونصف قطرها 3

التحقق أنّ E تنتمي إلى (γ)

$$|z_E| = 3 \Rightarrow OE = 3 \Rightarrow \boxed{E \in (\gamma)}$$

* * *

التمرين 25 : (بكالوريا 2012 ع ت)

.1 $P(z) = z^3 - 12z^2 + 48z - 72$

أ. **التحقق أنّ 6 هو جذر لـ $P(z)$**

$$P(6) = 6^3 - 12(6)^2 + 48(6) - 72 = 504 - 504 = 0 \Rightarrow \boxed{6 \text{ جذر لـ } P(z)}$$

ب. **إيجاد العددين الحقيقيين α و β**

	1	-12	48	-72
6				
	1	-6	12	0

$$\boxed{P(z) = (z-6)(z^2 - 6z + 12)}$$

ج. **حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z) = 0$**

$$P(z) = 0 \Rightarrow (z-6)(z^2 - 6z + 12) = 0$$

$$z^2 - 6z + 12 = 0\ ;\ \Delta = 36 - 48 = -12 = \left(2\sqrt{3}i\right)^2$$

$$z_0 = 6\ ;\ z_1 = 3 + i\sqrt{3}\ ;\ z_2 = 3 - i\sqrt{3}$$

$$\boxed{S = \{6\ ;\ 3 + i\sqrt{3}\ ;\ 3 - i\sqrt{3}\}}$$

.2 $z_A = 6$ ، $z_B = 3 + i\sqrt{3}$ ، $z_C = 3 - i\sqrt{3}$

أ. **كتابة كلا من z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسّي**

$$z_A = 6 = \boxed{6e^{i2\pi}}$$

$$z_B = 3 + i\sqrt{3} = 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \boxed{2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}}$$

$$z_C = 3 - i\sqrt{3} = 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = \boxed{2\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{3}}}$$

ب. **كتابة $\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C}$ على الشكل الجبري ، ثمّ على الشكل الأسّي**

$$\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C} = \frac{3 - i\sqrt{3}}{3 + i\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} - i}{\sqrt{3} + i} = \frac{\left(\sqrt{3} - i\right)^2}{4} = \boxed{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

$$\left|\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C}\right| = 1\ ; \arg\left(\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C}\right) = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow \boxed{\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C} = e^{-i\frac{\pi}{3}}}$$

ج. **استنتاج طبيعة المثلث ABC**

$$\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C} = e^{-i\frac{\pi}{3}} \Rightarrow \begin{cases} AB = AC \\ \left(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{BA}\right) = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \boxed{\text{المثلث } ABC \text{ متقايس الأضلاع}}$$

.3

أ. إيجاد الكتابة المركبة للتشابه S

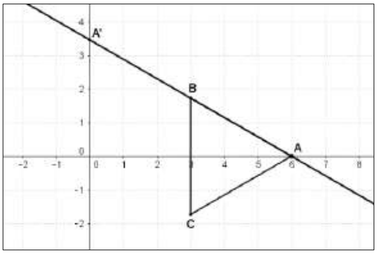
$$\begin{cases} a=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}=\sqrt{3}i \\ b=z_C(1-a)=\left(3-i\sqrt{3}\right)\left(1-\sqrt{3}i\right)=-4\sqrt{3}i \end{cases} \Rightarrow \boxed{z'=\sqrt{3}iz-4\sqrt{3}i}$$

ب. تعيين $z_{A'}$

$$z_{A'}=\sqrt{3}iz_A-4\sqrt{3}i=6\sqrt{3}i-4\sqrt{3}i=\boxed{2\sqrt{3}i}$$

ج. بيان أنّ النقط A', B, A في استقامية

$$\frac{z_A-z_B}{z_A-z_{A'}}=\frac{3-i\sqrt{3}}{6-2i\sqrt{3}}=\frac{3-i\sqrt{3}}{2\left(3-i\sqrt{3}\right)}=\frac{1}{2}\Rightarrow \boxed{\text{النقط } A',B,A \text{ في استقامية}}$$



التمرين 26 : (بكالوريا 2012 ت ر)

.1 تعيين z_1 و z_2

$$\begin{cases}2z_1+3z_2=9-2i\\ 3z_1-z_2=8+8i\end{cases}\xRightarrow[\text{نضرب المعادلة الثانية في 3}]{}\begin{cases}2z_1+3z_2=9-2i\ \dots \text{①}\\ 9z_1-3z_2=24+24i\ \dots \text{②}\end{cases}$$

$$\text{①}+\text{②}\Rightarrow 11z_1=33+22i\Rightarrow \boxed{z_1=3+2i}$$

$$z_2=3z_1-8-8i=9+6i-8-8i\Rightarrow \boxed{z_2=1-2i}$$

.2 $z_A=3+2i$ ، $z_B=-3$ ، $z_\Omega=1-2i$

أ. اثبات أنّ : $z_B-z_\Omega=i(z_A-z_\Omega)$

$$\begin{cases}z_B-z_\Omega=-3-1+2i=-4+2i\\ i(z_A-z_\Omega)=i(2+4i)=-4+2i\end{cases}\Rightarrow \boxed{z_B-z_\Omega=i(z_A-z_\Omega)}$$

ب. تعيين طبيعة المثلث ΩAB

$$z_B-z_\Omega=i(z_A-z_\Omega)\Rightarrow \frac{z_B-z_\Omega}{z_A-z_\Omega}=i\Rightarrow \begin{cases}\Omega A=\Omega B\\ \left(\overrightarrow{\Omega A};\overrightarrow{\Omega B}\right)=\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

منه نستنتج أنّ المثلث ΩAB قائم في Ω ومتساوي الساقين

.3

أ. تعيين الكتابة المركبة للتحاكي h

$$M'=h(M)\Rightarrow z'-z_A=2(z-z_A)\Rightarrow z'=2z-z_A=\boxed{2z-3-2i}$$

ب. تعيين z_C

$$C = h(\Omega) \Rightarrow z_C = 2z_\Omega - 3 - 2i = 2 - 4i - 3 - 2i = \boxed{-1 - 6i}$$

ج. تعيين z_D

$$D\{(A,1);(B,-1);(C,1)\} \Rightarrow z_D = z_A - z_B + z_C = \boxed{5 - 4i}$$

د. بيان أنّ $ABCD$ مربّع

$$\frac{z_A + z_C}{2} = 1 - 2i = z_\Omega \; ; \; \frac{z_B + z_D}{2} = 1 - 2i = z_\Omega$$

القطران $[AC]$ و$[BD]$ متناصفان في Ω وبما أنّ المثلث ΩAB قائم في Ω ومتساوي الساقين ، فإنّ القطرين $[AC]$ و$[BD]$ متقايسان ومتعامدان ، منه نستنتج أنّ الرباعي $ABCD$ مربّع

.4 $\left\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = 4\sqrt{5} \ldots (E)$

أ. التحقق أنّ النقطة B تنتمي إلى المجموعة (E)

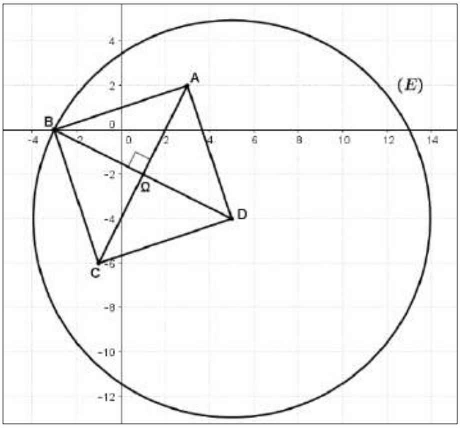
$$\left\|\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BB} + \overrightarrow{BC}\right\| = \left\|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\right\| = \left\|\overrightarrow{BD}\right\| = |z_D - z_B| = |8 - 4i| = \sqrt{80}$$
$$= 4\sqrt{5} \Rightarrow \boxed{B \in (E)}$$

تعيين طبيعة (E) وعناصرها المميزة

$$\left\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = 4\sqrt{5} \xrightarrow[D\{(A,1);(B,-1);(C,1)\}]{} \left\|\overrightarrow{MD}\right\| = 4\sqrt{5}$$

منه نستنتج أنّ المجموعة (E) دائرة مركزها D وتشمل النقطة B

ب. إنشاء المجموعة (E)



* * *

التمرين 27 : (بكالوريا 2012 ت ر)

.1 حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $0 = \left(z^2 + 2z + 4\right)\left(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4\right)$

$$z^2 + 2z + 4 = 0 \; ; \; \Delta = -12 = \left(2\sqrt{3}i\right)^2 \; ; z_1 = -1 + i\sqrt{3} \; ; z_2 = -1 - i\sqrt{3}$$

$z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0\ ;\ \Delta = -4 = (2i)^2\ ;\ z_3 = \sqrt{3} + i\ ;\ z_4 = \sqrt{3} - i$

$$\boxed{S = \left\{-1 + i\sqrt{3}\ ; -1 - i\sqrt{3}\ ;\ \sqrt{3} + i\ ; \sqrt{3} - i\right\}}$$

.2 $\boldsymbol{z_A = \sqrt{3} + i}$ ، $\boldsymbol{z_B = \sqrt{3} - i}$ ، $\boldsymbol{z_C = -1 - i\sqrt{3}}$ ، $\boldsymbol{z_D = -1 + i\sqrt{3}}$

أ. كتابة $\boldsymbol{z_A}$ ، $\boldsymbol{z_B}$ ، $\boldsymbol{z_C}$ و $\boldsymbol{z_D}$ على الشكل الأسّي

$$z_A = \sqrt{3} + i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \boxed{2e^{i\frac{\pi}{6}}}$$

$$z_B = \sqrt{3} - i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = \boxed{2e^{-i\frac{\pi}{6}}}$$

$$z_C = -1 - i\sqrt{3} = 2\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \boxed{2e^{i\frac{4\pi}{3}}}$$

$$z_D = -1 + i\sqrt{3} = 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \boxed{2e^{i\frac{2\pi}{3}}}$$

ب. التحقق أنّ : $\boldsymbol{\frac{z_D - z_B}{z_A - z_C} = i}$

$$\frac{z_D - z_B}{z_A - z_C} = \frac{-\left(\sqrt{3}+1\right) + \left(\sqrt{3}+1\right)i}{\left(\sqrt{3}+1\right) + \left(\sqrt{3}+1\right)i} = \frac{-1+i}{1+i} = \frac{-(1-i)^2}{2} = \frac{2i}{2} = \boxed{i}$$

استنتاج أنّ المستقيمين $\boldsymbol{(AC)}$ و $\boldsymbol{(BD)}$ متعامدان

$$\arg\left(\frac{z_D - z_B}{z_A - z_C}\right) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \left(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{BD}\right) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{(AC) \perp (BD)}$$

.3 $\boldsymbol{z_n = \frac{1}{2^n}e^{\frac{2n\pi}{3}i}}$ ، $\boldsymbol{L_n = z_D \times z_n}$

أ. كتابة $\boldsymbol{L_0}$ ، $\boldsymbol{L_1}$ على الشكل الجبري

$$L_0 = z_D \times z_0 = z_D\left(e^0\right) = z_D = \boxed{-1 + i\sqrt{3}}$$

$$L_1 = z_D \times z_1 = 2e^{i\frac{2\pi}{3}} \times \frac{1}{2}e^{i\frac{2\pi}{3}} = e^{i\frac{4\pi}{3}} = \boxed{-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

ب. $\boldsymbol{u_n = |L_n|}$

- **اثبات أنّ المتتالية $\boldsymbol{(u_n)}$ هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدّها الأول**

$$u_{n+1} = |L_{n+1}| = |z_D \times z_{n+1}| = |z_D| \times \left|\frac{1}{2^{n+1}}e^{\frac{(2n+2)\pi}{3}i}\right| = 2 \times \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^n}$$

$$= \frac{1}{2}\left(2 \times \frac{1}{2^n}\right) = \frac{1}{2}|z_D \times z_n| = \frac{1}{2}|L_n| = \boxed{\frac{1}{2}u_n}$$

منه نستنتج أنّ المتتالية (u_n) هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ وحدّها الأول $u_0 = |L_0| = 2$

- **حساب المجموع S_n**

$$S_n = \left\|\overrightarrow{OM_0}\right\| + \left\|\overrightarrow{OM_1}\right\| \dots + \left\|\overrightarrow{OM_n}\right\| = |L_0| + |L_1| + \cdots + |L_n|$$

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right) = 2\left(\frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}\right)$$

$$\boxed{S_n = 4\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)}$$

- **إيجاد نهاية S_n**

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} 4\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right) = \boxed{4}\ ;\ \left(\frac{1}{2^{n+1}} \to 0\right)$$

* * *

التمرين 28 : (بكالوريا 2012 ر)

1. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2 - \sqrt{2}z + 1 = 0$

$$\Delta = -2 = \left(\sqrt{2}i\right)^2\ ;\ z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\ ;\ z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$\boxed{S = \left\{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\ ;\ \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right\}}$$

2. $z_A = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ ، $z_B = \overline{z_A}$ ، $z_C = z_A + z_B$

أ. كتابة z_A ، z_B و $\frac{z_A}{z_B}$ على الشكل الأسّي

$$z_A = \frac{1+i}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i = \boxed{e^{i\frac{\pi}{4}}}\ ;\ z_B = \frac{1-i}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i = \boxed{e^{-i\frac{\pi}{4}}}$$

$$\frac{z_A}{z_B} = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{e^{-i\frac{\pi}{4}}} = e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)} = \boxed{e^{i\frac{\pi}{2}}}$$

ب. تعيين لاحقة كل من A' ، B' و C'

$$z_{A'} = e^{i\frac{\pi}{4}} \times z_A = e^{i\frac{\pi}{4}} \times e^{i\frac{\pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{2}} = \boxed{i}$$

$$z_{B'} = e^{i\frac{\pi}{4}} \times z_B = e^{i\frac{\pi}{4}} \times e^{-i\frac{\pi}{4}} = e^{0} = \boxed{1}$$

$$z_{C'} = e^{i\frac{\pi}{4}} \times z_C = e^{i\frac{\pi}{4}}\left(e^{i\frac{\pi}{4}} + e^{-i\frac{\pi}{4}}\right) = e^{i\frac{\pi}{2}} + e^{0} = \boxed{1+i}$$

ج. بيان أنّ الرباعي $OA'C'B'$ مربّع

$z_{A'} = z_{C'} - z_{B'} \Rightarrow \overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{B'C'}$ ... ①

$$\frac{z_{A'}}{z_{B'}} = i \Rightarrow \begin{cases} OA' = OB' \\ \left(\overrightarrow{OB'};\overrightarrow{OA'}\right) = \dfrac{\pi}{2} \dots ② \end{cases}$$

من ① و ② نستنتج أنّ الرباعي $OA'B'C'$ مربّع (متوازي أضلاع له ضلعان متتاليان متقايسان ومتعامدان)

.3 $|z - z_A| = |z - z_B| \dots (\Delta)$

أ. بيان أنّ (Δ) هو محور الفواصل

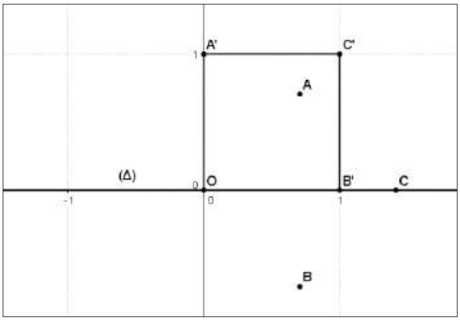
$|z - z_A| = |z - z_B| \Rightarrow AM = BM \Rightarrow$ (Δ) هو محور القطعة $[AB]$

وبما أنّ النقطتين A و B متناظرتان بالنسبة إلى محور الفواصل $(z_B = \overline{z_A})$، نستنتج أنّ (Δ) هو محور الفواصل

ب. بيان أنّ حليّ المعادلة $\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right)^2 = i$ عددان حقيقيان

$$\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right)^2 = i \Rightarrow \left|\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right)^2\right| = 1 \Rightarrow \left|\frac{z-z_A}{z-z_B}\right| = 1 \Rightarrow |z-z_A| = |z-z_B|$$

$$\Rightarrow M \in (\Delta) \xRightarrow[\text{هو محور الفواصل } (\Delta)]{} \boxed{z \in \mathbb{R}}$$



* * *

التمرين 29 : (بكالوريا 2012 ر)

.1 حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $(z^2 + 4)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4) = 0$

$z^2 + 4 = 0 \Rightarrow z^2 = -4 = (2i)^2 \Rightarrow z_1 = 2i \,; z_2 = -2i$

$z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0 \,; \Delta = -4 = (2i)^2 \,; z_3 = \sqrt{3} + i \,; z_4 = \sqrt{3} - i$

$$\boxed{S = \left\{2i \,; -2i \,; \sqrt{3} + i \,; \sqrt{3} - i\right\}}$$

.2 $z_A = \sqrt{3} + i$ ، $z_B = \overline{z_A}$ ، $z_C = -2i$ ، $z_D = \overline{z_C}$

بيان أنّ النقط A ، B ، C و D تنتمي إلى دائرة (γ) يُطلب تعيين مركزها ونصف قطرها

$|z_A| = |z_B| = |z_C| = |z_D| = 2 \Rightarrow OA = OB = OC = OD = 2$

منه نستنتج النقط A ، B ، C و D تنتمي إلى دائرة (γ) مركزها O ونصف قطرها 2

إنشاء النقط A ، B ، C و D

(انظر الشكل في نهاية التمرين)

3. $z_E = -z_B$

أ. بيان أنّ $\frac{z_A-z_C}{z_E-z_C} = e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$

$$\frac{z_A - z_C}{z_E - z_C} = \frac{\sqrt{3}+3i}{-\sqrt{3}+3i} = \frac{1+\sqrt{3}i}{-1+\sqrt{3}i} = -\frac{\left(1+\sqrt{3}i\right)^2}{4} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \boxed{e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}}$$

ب. بيان أنّ النقطة A هي صورة E بدوران R مركزه C يُطلب تعيين زاويته

$$\frac{z_A - z_C}{z_E - z_C} = e^{-i\frac{\pi}{3}} \Rightarrow \boxed{z_A - z_C = e^{-i\frac{\pi}{3}}(z_E - z_C)}$$

منه نستنتج أنّ النقطة A هي صورة E بالدوران R الذي مركزه C وزاويته $-\frac{\pi}{3}$

ج. استنتاج طبيعة المثلث AEC

$$\frac{z_A - z_C}{z_E - z_C} = e^{-i\frac{\pi}{3}} \Rightarrow \begin{cases} CA = CE \\ \left(\overrightarrow{CE};\overrightarrow{CA}\right) = -\frac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\text{المثلث } AEC \text{ متقايس الأضلاع}}$$

د. تعيين طبيعة التحويل RoH وعناصره المميزة

تذكير : لتركيب دوران R وتحاكي H نميّز حالتين :

الحالة الأولى : للتحويلين R و H نفس المركز ω

$$\begin{cases} k > 0 \Rightarrow R_{(\omega;\theta)}oH_{(\omega;k)} = S_{(\omega;k;\theta)} \\ k < 0 \Rightarrow R_{(\omega;\theta)}oH_{(\omega;k)} = S_{(\omega;|k|;\theta+\pi)} \end{cases}$$

الحالة الثانية : للتحويلين R و H مركزين مختلفين ω و ω'

$$\begin{cases} k > 0 \Rightarrow R_{(\omega_1;\theta)}oH_{(\omega_2;k)} = S_{(\omega;k;\theta)} \\ k < 0 \Rightarrow R_{(\omega_1;\theta)}oH_{(\omega_2;k)} = S_{(\omega;|k|;\theta+\pi)} \end{cases} \text{ حيث } \omega = RoH(\omega_2)$$

والحالة التي أمامنا مطابقة للحالة الثانية (مع $k > 0$)، لذا نبحث عن لاحقة ω

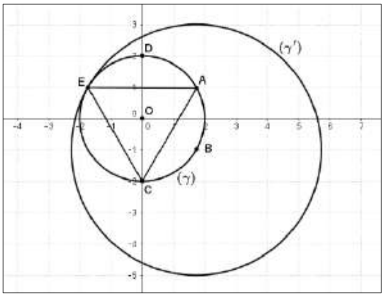
$$\omega = RoH(O) = R(O) \Rightarrow z_\omega - z_C = e^{-i\frac{\pi}{3}}(z_O - z_C)$$

$$\Rightarrow z_\omega = \left(1 - e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)z_C = -2i\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \sqrt{3} - i = \boxed{z_B}$$

منه نستنتج أنّ التحويل RoH هو تشابه مباشر مركزه B ، نسبته 2 وزاويته $-\frac{\pi}{3}$

استنتاج صورة الدائرة (γ) بالتحويل RoH

نستنتج أنّ صورة الدائرة (γ) بالتحويل RoH هي الدائرة (γ') التي مركزها B ونصف قطرها $r' = 2r = 4$



التمرين 30 : (بكالوريا 2013 ع ت)

1. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (I) ... $z^2-(4\cos\alpha)z+4=0$

$$\Delta=16\cos^2\alpha-16=-16(1-\cos^2\alpha)=-16\sin^2\alpha=(4i\sin\alpha)^2$$

$$z_1=2\cos\alpha+2i\sin\alpha\ ;\ z_2=2\cos\alpha-2i\sin\alpha$$

$$\boxed{S=\{2\cos\alpha+2i\sin\alpha\ ;2\cos\alpha-2i\sin\alpha\}}$$

2. بيان أنّ : $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2013}=1$

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2013}=\left(\frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2e^{-i\frac{\pi}{3}}}\right)^{2013}=\left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^{2013}=e^{i\frac{4026\pi}{3}}=e^{i1342\pi}=e^0=\boxed{1}$$

3. $z_A=1+i\sqrt{3}$ ، $z_B=1-i\sqrt{3}$ ، $z_C=4+i\sqrt{3}$

أ. إنشاء النقط A ، B و C

(انظر الشكل في نهاية التمرين)

ب. كتابة $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ على الشكل الجبري

$$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{3}{-2i\sqrt{3}}=\boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

استنتاج أنّ C هي صورة B بالتشابه المباشر S الذي مركزه A يُطلب تعيين نسبته وزاويته

$$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{\sqrt{3}}{2}i\Rightarrow\boxed{z_C-z_A=\frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}(z_B-z_A)}$$

منه نستنتج أنّ C هي صورة B بالتشابه المباشر S الذي مركزه A نسبته $\frac{\sqrt{3}}{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$

ج. تعيين لاحقة النقطة G وإنشائها

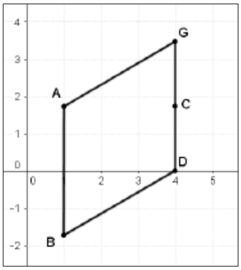
$$G\{(A;1),(B;-1),(C;2)\} \Rightarrow z_G = \frac{z_A - z_B + 2z_C}{2} = \frac{8 + 4i\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{z_G = 4 + 2i\sqrt{3}}$$

د. حساب z_D

$ABDG$ متوازي أضلاع $\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{GD} \Rightarrow z_B - z_A = z_D - z_G$

$$\Rightarrow z_D = z_G + z_B - z_A = \boxed{4}$$



* * *

التمرين 31 : (بكالوريا 2013 ع ت)

$$z^2 + 4z + 13 = 0 \ldots (E)$$

1. التحقق أنّ $-2 - 3i$ حل للمعادلة (E) وإيجاد الحل الآخر

$$(-2-3i)^2 + 4(-2-3i) + 13 = -5 + 12i - 8 - 12i + 13 = \boxed{0}$$

الحل الثاني هو مرافق الحل الأول أي $-2 + 3i$

2. $z_A = -2 - 3i$ و $z_B = i$

أ. بيان أنّ $z' = \frac{1}{2}iz - \frac{7}{2} - 2i$

$$M' = S(M) \Rightarrow z' - z_A = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}(z - z_A) \Rightarrow z' = \frac{1}{2}iz + \left(1 - \frac{1}{2}i\right)z_A$$

$$\Rightarrow z' = \frac{1}{2}iz + \left(1 - \frac{1}{2}i\right)(-2-3i) = \boxed{\frac{1}{2}iz - \frac{7}{2} - 2i}$$

ب. حساب z_C

$$C = S(B) \Rightarrow z_C = \frac{1}{2}iz_B - \frac{7}{2} - 2i = -\frac{1}{2} - \frac{7}{2} - 2i = \boxed{-4 - 2i}$$

3. $2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$

أ. بيان أنّ D مرجح النقطتين A و B المرفقتين بمعاملين حقيقيين يُطلب تعيينهما

$$2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \vec{0} \Rightarrow 2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} = \vec{0} \Rightarrow -3\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \boxed{D\{(A;-3),(B;1)\}}$$

ب. حساب z_D

$$D\{(A;-3),(B;1)\} \Rightarrow z_D = \frac{-3z_A + z_B}{-2} = \frac{6+10i}{-2} = \boxed{-3-5i}$$

ج. بيان أنّ $\frac{z_D - z_A}{z_C - z_A} = i$ واستنتاج طبيعة المثلث ACD

$$\frac{z_D - z_A}{z_C - z_A} = \frac{-3-5i+2+3i}{-4-2i+2+3i} = \frac{-1-2i}{-2+i} = \frac{(-1-2i)(-2-i)}{5} = \boxed{i}$$

$$\frac{z_D - z_A}{z_C - z_A} = i \Rightarrow \begin{cases} AD = AC \\ \left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD}\right) = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\text{المثلث } ACD \text{ قائم في } A \text{ ومتساوي الساقين}}$$

* * *

التمرين 32 : (بكالوريا 2013 ت ر)

1. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $2z^2 + 6z + 17 = 0$

$$\Delta = 36 - 136 = -100 = (10i)^2\ ; z_1 = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2}i\ ; z_2 = -\frac{3}{2} - \frac{5}{2}i$$

$$\boxed{S = \left\{-\frac{3}{2} + \frac{5}{2}i\ ; -\frac{3}{2} - \frac{5}{2}i\right\}}$$

2. $z_A = -4$ ، $z_B = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2}i$ ، $z_C = -\frac{3}{2} - \frac{5}{2}i$

حساب طويلة وعمدة $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$

$$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{\frac{5}{2} + \frac{5}{2}i}{\frac{5}{2} - \frac{5}{2}i} = \frac{1+i}{1-i} = i \Rightarrow \boxed{\left|\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right| = 1\ ; \arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) = \frac{\pi}{2}}$$

استنتاج طبيعة المثلث ABC

$$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = i \Rightarrow \begin{cases} AB = AC \\ \left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right) = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\text{المثلث } ABC \text{ قائم في } A \text{ ومتساوي الساقين}}$$

.3

أ. تعيين z_D و z_E

يكون الرباعي $BCDE$ مربّعا مركزه A ، عندما تكون النقطة A منتصف القطرين $[BD]$ و $[CE]$ (لأنّ المثلث ABC قائم في A ومتساوي الساقين)

$$\frac{z_B + z_D}{2} = z_A \Rightarrow z_D = 2z_A - z_B = -8 + \frac{3}{2} - \frac{5}{2}i = \boxed{-\frac{13}{2} - \frac{5}{2}i}$$

$$\frac{z_C + z_E}{2} = z_A \Rightarrow z_E = 2z_A - z_C = -8 + \frac{3}{2} + \frac{5}{2}i = \boxed{-\frac{13}{2} + \frac{5}{2}i}$$

ب. تعيين (Γ_1)

A مركز المربّع $BCDE$ $\Rightarrow A\{(B;1),(C;1),(D;1),(E;1)\}$

$$M \in (\Gamma_1) \Rightarrow \left\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}\right\| = 10\sqrt{2} \Rightarrow \left\|4\overrightarrow{MA}\right\| = 10\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\left\|\overrightarrow{MA}\right\| = \frac{5\sqrt{2}}{2}}$$

منه نستنتج أنّ المجموعة (Γ_1) هي الدائرة التي مركزها A ونصف قطرها $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ (الدائرة المحيطة بالمربّع $BCDE$)

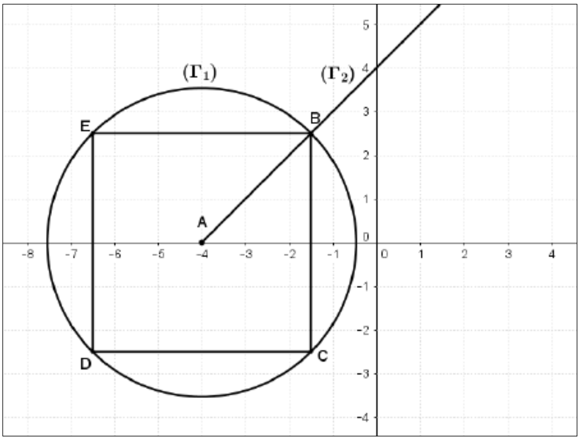
4. التحقق أنّ النقطة B تنتمي إلى (Γ_2)

$$\arg(z_B+4) = \arg\left(-\frac{3}{2}+\frac{5}{2}i+4\right) = \arg\left(\frac{5}{2}+\frac{5}{2}i\right) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \boxed{B \in (\Gamma_2)}$$

تعيين المجموعة (Γ_2)

$$M \in (\Gamma_2) \Rightarrow \arg(z+4) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \arg(z-z_A) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \boxed{\left(\vec{u};\overrightarrow{AM}\right) = \frac{\pi}{4}}$$

منه نستنتج أنّ المجموعة (Γ_2) هي نصف المستقيم $[AB)$ باستثناء النقطة A.



* * *

التمرين 33 : (بكالوريا 2013 ت ر)

1. حل في ℂ المعادلة $(z+5-i\sqrt{3})(z^2+2z+4)=0$

$$z+5-i\sqrt{3}=0 \Rightarrow z_0 = -5+i\sqrt{3}$$

$$z^2+2z+4=0\ ;\ \Delta = -12 = \left(2\sqrt{3}i\right)^2\ ; z_1 = -1+\sqrt{3}i\ ; z_2 = -1-\sqrt{3}i$$

$$\boxed{S = \left\{-5+i\sqrt{3}\ ; -1+\sqrt{3}i\ ; -1-\sqrt{3}i\right\}}$$

2. $z_A = -1-i\sqrt{3}$ ، $z_B = -1+i\sqrt{3}$ ، $z_C = -5+i\sqrt{3}$

إيجاد الكتابة المركبة للتشابه المباشر S وتعيين العناصر المميزة له

$$\begin{cases}S(A)=C\\S(O)=B\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}z_C=az_A+b\\z_B=az_O+b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\dfrac{z_C-z_B}{z_A}\\b=z_B\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\dfrac{4}{1+i\sqrt{3}}\\b=-1+i\sqrt{3}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=1-i\sqrt{3}\\b=-1+i\sqrt{3}\end{cases}\Rightarrow\boxed{z'=\left(1-i\sqrt{3}\right)z-(1-i\sqrt{3})}$$

$$k=\left|1-i\sqrt{3}\right|=2\,;\theta=\arg\left(1-i\sqrt{3}\right)=-\frac{\pi}{3}$$

$$z_\omega=\frac{-1+i\sqrt{3}}{i\sqrt{3}}=1+\frac{\sqrt{3}}{3}i$$

منه نستنتج أنّ S تشابه مباشر مركزه $\omega\left(1;\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ ، نسبته 2 وزاويته $-\frac{\pi}{3}$

.3

أ. تعيين z_D

$$D\{(A;2),(B;-1),(C;1)\}\Rightarrow z_D=\frac{2z_A-z_B+z_C}{2}=\frac{-6-2i\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow\boxed{z_D=-3-i\sqrt{3}}$$

ب. كتابة $\frac{z_B-z_A}{z_D-z_A}$ على الشكل الأسّي

$$\frac{z_B-z_A}{z_D-z_A}=\frac{2i\sqrt{3}}{-2}=-i\sqrt{3}=\boxed{\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{2}}}$$

استنتاج طبيعة المثلث ABD

$$\frac{z_B-z_A}{z_D-z_A}=\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{2}}\Rightarrow\left(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AB}\right)=-\frac{\pi}{2}\Rightarrow\boxed{\text{المثلث } ABD \text{ قائم في } A}$$

ج. تعيين المجموعة (Γ)

$$M\in(\Gamma)\Rightarrow\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right\|\Rightarrow\left\|2\overrightarrow{MD}\right\|=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$$

$$\Rightarrow\left\|\overrightarrow{MD}\right\|=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\frac{1}{2}\left|z_B-z_A\right|=\frac{1}{2}\left|2i\sqrt{3}\right|=\sqrt{3}$$

منه نستنتج أنّ المجموعة (Γ) هي الدائرة التي مركزها D ونصف قطرها $\sqrt{3}$

* * *

التمرين 34 : (بكالوريا 2013 ر)

I) $z_A=ae^{i\frac{3\pi}{4}}$ ، $z_B=-a\sqrt{2}$ ، $z_C=\overline{z_A}$ ، $z_E=be^{i\frac{3\pi}{2}}$

.1

أ. كتابة $\frac{z_A-z_B}{z_A}$ على الشكل الأسّي

$$\frac{z_A - z_B}{z_A} = \frac{ae^{i\frac{3\pi}{4}} + a\sqrt{2}}{ae^{i\frac{3\pi}{4}}} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{e^{i\frac{3\pi}{4}}} = 1 + \sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}$$

$$= 1 + \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 1 - 1 - i = -i = \boxed{e^{-i\frac{\pi}{2}}}$$

استنتاج طبيعة المثلث OAB

$$\frac{z_A - z_B}{z_A} = e^{-i\frac{\pi}{2}} \Rightarrow \begin{cases} BA = OA \\ \left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{BA}\right) = -\frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

المثلث OAB قائم في A ومتساوي الساقين

ب. تحديد طبيعة الرباعي $OABC$ واستنتاج مساحته

$$z_B - z_A = -a\sqrt{2} - ae^{i\frac{3\pi}{4}} = a\left(-\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = a\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$$

$$= ae^{i\frac{5\pi}{4}} = ae^{-i\frac{3\pi}{4}} = \overline{z_A} = z_C \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC}$$

الرباعي $OABC$ متوازي أضلاع له ضلعان متتاليان متقايسان ومتعامدان ($[AO]$ و$[AB]$) فهو إذن مربّع مساحته : $\mathcal{A} = OA^2 = |z_A|^2 = \boxed{a^2}$

2.

أ. كتابة العبارة المركبة للتشابه المباشر S والتحقق أنّ $S(A) = E$

$$S(M) = M' \Rightarrow \boxed{z' = \frac{b}{a}e^{i\frac{3\pi}{4}}z}$$

$$\frac{b}{a}e^{i\frac{3\pi}{4}}z_A = \frac{b}{a}e^{i\frac{3\pi}{4}} \times ae^{i\frac{3\pi}{4}} = be^{i\frac{3\pi}{2}} = z_E \Rightarrow \boxed{S(A) = E}$$

ب. بيان أنّ مساحة الرباعي $OEFG$ هي b^2

بما أنّ : $S(O) = O$ ، $S(A) = E$ ، $S(B) = F$ و$S(C) = G$ ، فإنّ صورة الرباعي $OABC$ بالتشابه المباشر S هو الرباعي $OEFG$ الذي مساحته تساوي :

$$\mathcal{A}' = k^2 \times \mathcal{A} = \left(\frac{b}{a}\right)^2 \times a^2 = \boxed{b^2}$$

3.

أ. حساب العبارة : $|z_C|^2 + |z_E|^2 - 2|z_C \times z_E|\cos\left[\arg\left(\frac{z_E}{z_C}\right)\right]$

$$\arg\left(\frac{z_E}{z_C}\right) = \arg z_E - \arg z_C = \frac{3\pi}{2} + \frac{3\pi}{4} = \frac{9\pi}{4} = 2\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

$$|z_C|^2 + |z_E|^2 - 2|z_C \times z_E|\cos\left[\arg\left(\frac{z_E}{z_C}\right)\right] = a^2 + b^2 - 2ab\cos\frac{\pi}{4}$$

$$= \boxed{a^2 + b^2 - \sqrt{2}ab}$$

ب. استنتاج قيمة CE^2 بدلالة a و b

في المثلث OCE لدينا : (حسب مبرهنة الكاشي)

$$CE^2 = OC^2 + OE^2 - 2OC \times OE \times cos\,(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OE})$$

$$CE^2 = |z_C|^2 + |z_E|^2 - 2|z_C \times z_E| \cos\left[\arg\left(\frac{z_E}{z_C}\right)\right] = \boxed{a^2 + b^2 - \sqrt{2}ab}$$

II) $M_0 = A$ ، $M_{n+1} = S(M_n)$ ، $u_n = |z_n|$ ، $v_n = \arg(z_n)$

1. كتابة $\frac{z_{n+1}}{z_n}$ على الشكل الأسّي بدلالة a و b

$$M_{n+1} = S(M_n) \Rightarrow z_{n+1} = \frac{b}{a}e^{i\frac{3\pi}{4}}z_n \Rightarrow \boxed{\frac{z_{n+1}}{z_n} = \frac{b}{a}e^{i\frac{3\pi}{4}}}$$

2. بيان أنّ المتتالية (u_n) هندسية ، والمتتالية (v_n) حسابية

$$u_{n+1} = |z_{n+1}| = \left|\frac{b}{a}e^{i\frac{3\pi}{4}}z_n\right| = \frac{b}{a}|z_n| = \boxed{\frac{b}{a}u_n}$$

منه نستنتج أنّ المتتالية (u_n) هندسية أساسها $\frac{b}{a}$ وحدّها الأول $u_0 = |z_0| = |z_A| = a$

$$v_{n+1} = \arg(z_{n+1}) = \arg\left(\frac{b}{a}e^{i\frac{3\pi}{4}}z_n\right) = \frac{3\pi}{4} + \arg(z_n) = \boxed{\frac{3\pi}{4} + v_n}$$

منه نستنتج أنّ المتتالية (v_n) حسابية أساسها $\frac{3\pi}{4}$ وحدّها الأول $v_0 = \arg(z_A) = \frac{3\pi}{4}$

3. حساب المجموع T_n بدلالة a ، b و n

$$T_n = a + b + \frac{b^2}{a} + \frac{b^3}{a^2} + \cdots + \frac{b^n}{a^{n-1}} = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = a\left[\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{n+1} - 1}{\frac{b}{a} - 1}\right]$$

$$\boxed{T_n = \frac{a^2}{b-a}\left[\left(\frac{b}{a}\right)^{n+1} - 1\right]}$$

حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n$

$$\lim_{n\to+\infty} T_n = \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\frac{a^2}{b-a}}_{>0}\underbrace{\left[\left(\frac{b}{a}\right)^{n+1} - 1\right]}_{\to+\infty} = \boxed{+\infty}$$

4. تعيين قيم الأعداد الطبيعية n التي تكون من أجلها النقط O , A , M_n في استقامية

M_n , A , O في استقامية $\Rightarrow arg\left(\frac{z_n}{z_A}\right) = k\pi \Rightarrow arg(z_n) - \arg(z_A) = k\pi$

$$\Rightarrow v_n - \frac{3\pi}{4} = k\pi \Rightarrow \underbrace{\frac{3\pi}{4} + n\frac{3\pi}{4}}_{v_n = v_0 + nr} - \frac{3\pi}{4} = k\pi \Rightarrow \frac{3n}{4} = k \Rightarrow 3n = 4k$$

$\Rightarrow \boxed{n = 4k'; k' \in \mathbb{N}}$ (لأنّ 3 أولي مع 4)

* * *

التمرين 35 : (بكالوريا 2013 ر)

1. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2+z+1=0$

$$\Delta= 1-4=-3=\left(\sqrt{3}i\right)^2 \,;\, z_1=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \,;\, z_2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\boxed{S=\left\{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\,;-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}}$$

2. $z_A=-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ ، $z_B=\overline{z_A}$ ، $z_M=z$

أ. كتابة z_A على الشكل الأسّي

$$z_A=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i \Rightarrow \begin{cases} |z_A|=1 \\ \arg(z_A)=\frac{4\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \boxed{z_A=e^{i\frac{4\pi}{3}}}$$

ب. تعيين مجموعة النقط M من المستوي حيث :

$$\mathbf{arg}[(z-z_A)^2]=\mathbf{arg}(z_A)-\mathbf{arg}(z_B)$$

$$\arg[(z-z_A)^2]=\arg(z_A)-\arg(z_B) \Rightarrow 2\arg(z-z_A)=\frac{4\pi}{3}+\frac{4\pi}{3}+2k\pi$$

$$\Rightarrow \arg(z-z_A)=\frac{4\pi}{3}+k\pi \Rightarrow \boxed{\left(\vec{u};\overrightarrow{AM}\right)=\frac{4\pi}{3}+k\pi}$$

منه نستنتج أنّ مجموعة النقط M هي المستقيم (OA) باستثناء النقطة A

3. $z'=z_A.z+z_B\sqrt{3}$

أ. تعيين طبيعة التحويل r وعناصره المميزة

$$r(M)=M' \Rightarrow \boxed{z'=e^{i\frac{4\pi}{3}}z+\sqrt{3}e^{-i\frac{4\pi}{3}}}$$

منه نستنتج أنّ التحويل r دوران زاويته $\frac{4\pi}{3}$ ومركزه Ω حيث :

$$z_\Omega=\frac{\sqrt{3}e^{-i\frac{4\pi}{3}}}{1-e^{i\frac{4\pi}{3}}}=\sqrt{3}\left(\frac{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}{\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}\right)=\sqrt{3}\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{3+\sqrt{3}i}\right)=\boxed{i}$$

ب. تعيين نسبة ومركز التحاكي h

$$M'=h(M) \Rightarrow \boxed{z'=-2z+3i}\,;k=-2\,;z_{\Omega'}=\frac{3i}{3}=i=z_\Omega$$

منه نستنتج أنّ التحاكي h نسبته -2 ومركزه Ω

ج. تعيين طبيعة التحويل S ، مبرزا عناصره المميزة

$$\boxed{h_{(\Omega;k)}or_{(\Omega;\theta)}=S_{(\Omega;|k|;\theta+\pi)}}\ \left(k<0 \text{ لأنّ}\right)$$

منه نستنتج أنّ التحويل S تشابه مباشر نسبته 2 ، مركزه Ω وزاويته $\frac{4\pi}{3} + \pi = \frac{\pi}{3}$

التحقق أنّ عبارته المركّبة هي : $z' = 2e^{i\frac{\pi}{3}}(z - i) + i$

$$S(M) = M' \Rightarrow z' - z_{\Omega} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}(z - z_{\Omega}) \Rightarrow \boxed{z' = 2e^{i\frac{\pi}{3}}(z - i) + i}$$

4. **بيان أنّ النقط O ، Ω و E في استقامية**

$$\begin{cases} S(O) = C \\ S(C) = D \Rightarrow \boxed{E = SoSoS(O)} \\ S(D) = E \end{cases}$$

وبما أنّ التحويل S تشابه مباشر نسبته 2 ، مركزه Ω وزاويته $\frac{\pi}{3}$ ، فإنّ التحويل $SoSoS$ تشابه مباشر نسبته 2^3 ، مركزه Ω وزاويته $3 \times \frac{\pi}{3} = \pi$ ، أي إنّ التحويل $SoSoS$ تحاكي نسبته -8 ومركزه Ω ، ومنه نستنتج أنّ النقط O ، Ω و E في استقامية

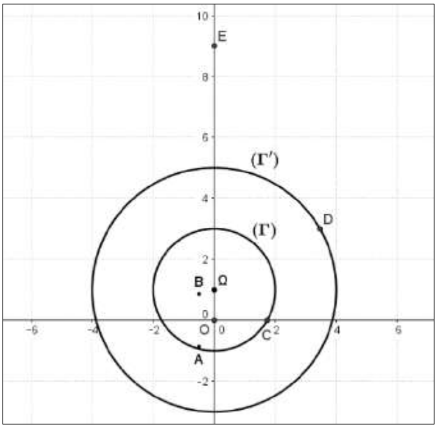
5. **أ. تعيين المجموعة (Γ)**

$$M \in (\Gamma) \Rightarrow z = 2e^{i\theta} + e^{i\frac{\pi}{2}} \Rightarrow z - z_{\Omega} = 2e^{i\theta} \Rightarrow \boxed{|z - z_{\Omega}| = 2}$$

منه نستنتج أنّ المجموعة (Γ) هي دائرة مركزها Ω ونصف قطرها $r = 2$

ب. تعيين (Γ') صورة (Γ) بالتحويل S

المجموعة (Γ') هي دائرة مركزها Ω ونصف قطرها $r' = 2r = 2$.



* * *

التمرين 36 : (بكالوريا 2014 ع ت)

1. **حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2 - 6\sqrt{2}\,z + 36 = 0$**

$$\Delta = 72 - 144 = -72 = \left(6\sqrt{2}i\right)^2 ; z_1 = 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2}i ; z_2 = 3\sqrt{2} - 3\sqrt{2}i$$

$$\boxed{S = \left\{3\sqrt{2} + 3\sqrt{2}i ; 3\sqrt{2} - 3\sqrt{2}i\right\}}$$

2. $z_A = 3\sqrt{2}(1 + i)$ ، $z_B = \overline{z_A}$ ، $z_C = 6\sqrt{2}$ ، $z_D = \frac{z_C}{2}$

أ. كتابة z_A ، z_B و $(1+i)z_A$ على الشكل الأسّي

$$z_A = 3\sqrt{2}(1+i) = 3\sqrt{2}\times\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \Rightarrow \boxed{z_A = 6e^{i\frac{\pi}{4}}\,;\ z_B = 6e^{-i\frac{\pi}{4}}}$$

$$(1+i)z_A = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\times 6e^{i\frac{\pi}{4}} \Rightarrow \boxed{(1+i)z_A = 6\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}}}$$

ب. حساب $\left(\frac{(1+i)z_A}{6\sqrt{2}}\right)^{2014}$

$$\left(\frac{(1+i)z_A}{6\sqrt{2}}\right)^{2014} = \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^{2014} = e^{i1007\pi} = e^{i\pi} = \boxed{-1}$$

ج. بيان أنّ النقط O ، A ، B و C تنتمي إلى الدائرة التي مركزها D يُطلب تعيين نصف قطرها

$$DO = |z_D| = \boxed{3\sqrt{2}}\,;\ DA = |z_A - z_D| = \left|3\sqrt{2}i\right| = \boxed{3\sqrt{2}}$$

$$DB = |z_B - z_D| = \left|-3\sqrt{2}i\right| = \boxed{3\sqrt{2}}\,;\ DC = |z_C - z_D| = \boxed{3\sqrt{2}}$$

منه نستنتج أنّ النقط O ، A ، B و C تنتمي إلى الدائرة التي مركزها D وصف قطرها $3\sqrt{2}$

د. حساب $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$

$$\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \frac{-3\sqrt{2} - 3\sqrt{2}i}{-3\sqrt{2} + 3\sqrt{2}i} = \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{2} = \frac{2i}{2} = \boxed{i}$$

إيجاد قيس للزاوية $(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB})$

$$(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}) = \arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) = \boxed{\frac{\pi}{2}}$$

تعيين طبيعة الرباعي $OACB$

$z_C - z_B = 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2}i = z_A \Rightarrow \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OA} \Rightarrow$ $OACB$ متوازي الأضلاع

وبما أنّ المثلث ABC قائم في C ومتساوي الساقين ، نستنتج أنّ الرباعي $OACB$ مربّع

.3

أ. كتابة العبارة المركبة للدوران R

$$M' = R(M) \Rightarrow z' = e^{i\frac{\pi}{2}}z \Rightarrow \boxed{z' = iz}$$

ب. تعيين لاحقة C' والتحقق أنّ النقط C ، A و C' في استقامية

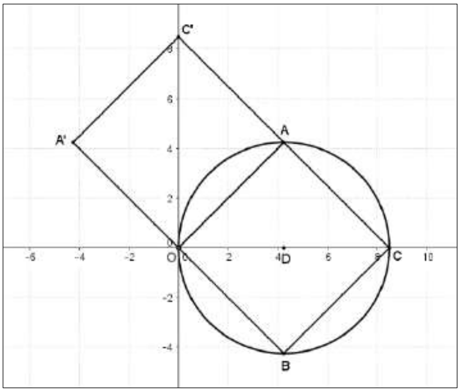
$$C' = R(C) \Rightarrow z_{C'} = iz_C = \boxed{6\sqrt{2}i}$$

$$\frac{z_{C'} - z_C}{z_A - z_C} = \frac{-6\sqrt{2} + 6\sqrt{2}i}{-3\sqrt{2} + 3\sqrt{2}i} = \frac{-2+2i}{1+i} = 2 \Rightarrow \boxed{\text{النقط } C \text{ ، } A \text{ و } C' \text{ في استقامية}}$$

ج. تعيين لاحقة A' وتحديد صورة الرباعي $OACB$ بالدوران R

$$A' = R(A) \Rightarrow z_{A'} = iz_A = i\left(3\sqrt{2} + 3\sqrt{2}i\right) = \boxed{-3\sqrt{2} + 3\sqrt{2}i}$$

$$\begin{cases} R(O)=O \text{ (مركز الدوران)} \\ R(A)=A' \\ R(C)=C' \\ R(B)=A \left((\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OA})=\dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow \boxed{\text{صورة الرباعي } OACB \text{ هي الرباعي } OA'C'A}$$



* * *

التمرين 37 : (بكالوريا 2014 ع ت)

1. **حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $(z-i)(z^2-2z+5)=0$**

$z-i=0 \Rightarrow z_0=i$

$z^2-2z+5=0\,;\Delta=-16=(4i)^2\,;z_1=1+2i\,;z_2=1-2i$

$\boxed{S=\{i\,;1+2i\,;1-2i\}}$

2. $z_A=i$ ، $z_B=1+2i$ ، $z_C=1-2i$

أ. **إنشاء النقط A ، B و C**

(انظر الشكل في نهاية التمرين)

ب. **إيجاد z_H**

معادلة المستقيم (BC) هي $x=1$ ، وبما أنّ النقطة H المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (BC) نستنتج أنّ $x_H=1$ و$y_H=1$ ، ومنه $\boxed{z_H=1+i}$

ج. **حساب مساحة المثلث ABC**

$$\mathcal{A}=\frac{1}{2}(BC\times AH)=\frac{1}{2}|z_C-z_B|\times|z_H-z_A|=\frac{1}{2}|-4i||1|=\boxed{2\,cm^2}$$

3.

أ. **تعيين الكتابة المركبة للتشابه S**

$$S(M)=M'\Rightarrow z'-z_A=\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}(z-z_A)\Rightarrow \boxed{z'=\frac{1}{2}iz+\frac{1}{2}+i}$$

ب. بيان أنّ مساحة صورة المثلث ABC بالتشابه S تساوي $\frac{1}{2}cm^2$

لتكن $\mathcal{A}'$ مساحة صورة المثلث ABC بالتشابه S. لدينا :

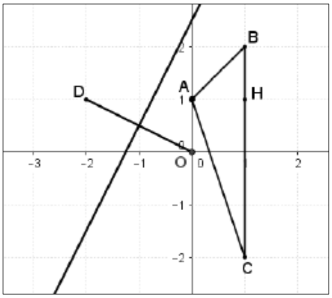
$$\mathcal{A}' = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \mathcal{A} = \frac{2}{4} = \boxed{\frac{1}{2}cm^2}$$

4. تعيين مجموعة النقط M حيث : $|z| = |iz + 1 + 2i|$

$$|z| = |iz + 1 + 2i| \Rightarrow |z| = |i(z - i + 2)| \Rightarrow |z| = |i||z - (-2 + i)|$$

$$\Rightarrow |z| = |z - z_D| \Rightarrow \boxed{OM = DM}$$

منه نستنتج أنّ مجموعة النقط M هي محور القطعة $[OD]$ حيث $z_D = -2 + i$



* * *

التمرين 38 : (بكالوريا 2014 ت ر)

1. حل في مجموعة الأعداد المركّبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(z - i)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4) = 0$

$z - i = 0 \Rightarrow z_0 = i$

$z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0\,; \Delta = -4 = (2i)^2\,; z_1 = \sqrt{3} + i\,; z_2 = \sqrt{3} - i$

$$\boxed{S = \{i\,; \sqrt{3} + i\,; \sqrt{3} - i\}}$$

2. $z_1 = \sqrt{3} + i$ ، $z_2 = \sqrt{3} - i$ ، $z_3 = i$

أ. كتابة العدد $\frac{z_1}{z_2}$ على الشكل الأسّي

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{3} + i}{\sqrt{3} - i} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{6}}}{2e^{-i\frac{\pi}{6}}} = \boxed{e^{i\frac{\pi}{3}}}$$

ب. إيجاد قيم للعدد الطبيعي n يكون من أجلها العدد المركب $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$ تخيليا صرفا

$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$ تخيلي صرف $\Rightarrow \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow \frac{n\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow \frac{n}{3} = \frac{1}{2} + k$

$$\Rightarrow 2n = 6k + 3$$

بما أنّ $2n$ زوجي و $6k + 3$ فردي ، فإنّ المعادلة السابقة ليس لها حلول في $\mathbb{N}$ ،

ومنه لا توجد قيم للعدد الطبيعي n يكون من أجلها العدد المركب $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$ تخيليا صرفا

3. أ. تعيين العبارة المركبة للتشابه المباشر S وتحديد نسبته وزاويته

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{-\sqrt{3}}{-2i} = -\frac{\sqrt{3}}{2}i = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

$$S(M) = M' \Rightarrow \boxed{z' - z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\frac{\pi}{2}}(z - z_1)}$$

منه نستنتج أنّ S تشابه مباشر مركزه A نسبته $\frac{\sqrt{3}}{2}$ وزاويته $-\frac{\pi}{2}$

ب. استنتاج طبيعة المثلث ABC

$$\arg\left(\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}\right) = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right) = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{\text{المثلث } ABC \text{ قائم في } A}$$

4. أ. تعيين العناصر المميزة للمجموعة (E)

$$M \in (E) \Rightarrow |z - z_1|^2 + |z - z_3|^2 = 5$$

$$\Rightarrow \left|x + iy - \sqrt{3} - i\right|^2 + |x + iy - i|^2 = 5$$

$$\Rightarrow \left(x - \sqrt{3}\right)^2 + (y - 1)^2 + x^2 + (y - 1)^2 = 5$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - \sqrt{3}x - 2y = 0$$

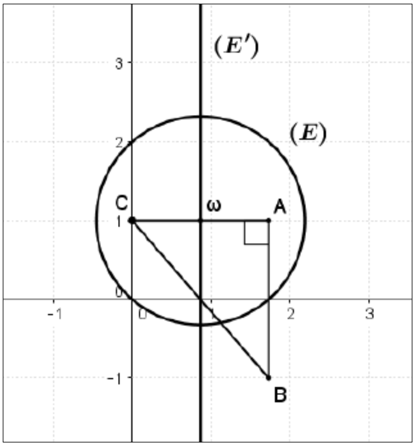
$$\Rightarrow \boxed{\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + (y - 1)^2 = \frac{7}{4}}$$

منه نستنتج أنّ المجموعة (E) هي الدائرة التي مركزها $\omega\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; 1\right)$ ونصف قطرها $\frac{\sqrt{7}}{2}$

ب. تعيين المجموعة (E')

$$M \in (E') \Rightarrow |z - z_1| = |z - z_3| \Rightarrow \boxed{AM = CM}$$

منه نستنتج أنّ المجموعة (E') هي محور القطعة $[AC]$



* * *

التمرين 39 : (بكالوريا 2014 ت ر)

1. أ. تعيين وإنشاء المجموعة (γ)

$$M \in (\gamma) \Rightarrow z = z_0 + 2e^{i\theta} \Rightarrow z - z_0 = 2e^{i\theta} \Rightarrow |z - z_0| = 2 \Rightarrow \boxed{AM = 2}$$

منه نستنتج أنّ المجموعة (γ) هي دائرة مركزها A ونصف قطرها 2

ب. تعيين وإنشاء المجموعة (γ')

$$M \in (\gamma') \Rightarrow z = z_0 + ke^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)} \Rightarrow z - z_0 = ke^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)} \Rightarrow \arg(z - z_0) = \frac{3\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{\left(\vec{u};\overrightarrow{AM}\right) = \frac{3\pi}{4}}$$

منه نستنتج أنّ المجموعة (γ') هي نصف مستقيم مبدؤه A وميله $\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -1$

جـ. تعيين إحداثيات نقط تقاطع (γ) و(γ')

$$M \in (\gamma) \cap (\gamma') \Rightarrow z = z_0 + 2e^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)} = 1 + i - \sqrt{2} + \sqrt{2}i$$

$$\Rightarrow z = \left(1 - \sqrt{2}\right) + \left(1 + \sqrt{2}\right)i \Rightarrow \boxed{M\left(1 - \sqrt{2}\,; 1 + \sqrt{2}\right)}$$

2. $\boldsymbol{z_1 = z_0 + 2e^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}}$

أ. تعيين الشكل الجبري للعدد المركب $\frac{z_1 - z_0}{z_0}$

$$\frac{z_1 - z_0}{z_0} = \frac{\left(1 - \sqrt{2}\right) + \left(1 + \sqrt{2}\right)i - 1 - i}{1 + i} = \frac{-\sqrt{2}(1 - i)}{1 + i} = \boxed{\sqrt{2}i}$$

استنتاج طبيعة المثلث OAB

$$\arg\left(\frac{z_1 - z_0}{z_0}\right) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{AB}\right) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{\text{المثلث } OAB \text{ قائم في } A}$$

ب. تعيين z_2

$$C = R(B) \Rightarrow z_2 - z_0 = e^{-i\frac{\pi}{2}}(z_1 - z_0) \Rightarrow z_2 = -i\left[-\sqrt{2}(1 - i)\right] + 1 + i$$

$$\Rightarrow \boxed{z_2 = \left(1 + \sqrt{2}\right) + \left(1 + \sqrt{2}\right)i}$$

ج. تعيين α وβ

$$\begin{cases} O\{(A;\alpha),(C;\beta)\} \\ \alpha + \beta = \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AO} = \dfrac{\beta}{\alpha + \beta}\overrightarrow{AC} \\ \alpha + \beta = \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = \dfrac{-\sqrt{2}z_0}{z_2 - z_0} \\ \alpha + \beta = \sqrt{2} \end{cases}$$

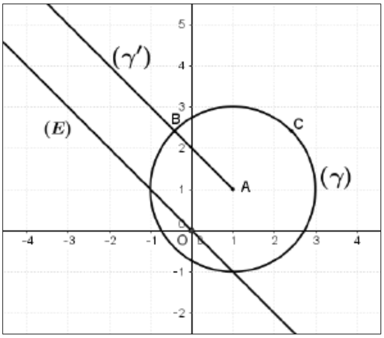
$$\Rightarrow \begin{cases} \beta = \dfrac{-\sqrt{2}(1 + i)}{\sqrt{2}(1 + i)} \\ \alpha = \sqrt{2} - \beta \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} \beta = -1 \\ \alpha = \sqrt{2} + 1 \end{cases}}$$

د. تعيين وإنشاء المجموعة (E)

$$M \in (E) \Rightarrow \underbrace{\left((1+\sqrt{2})\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}\right)}_{O\{(A;1+\sqrt{2}),(C;-1)\}}\underbrace{\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}\right)}_{=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{MC}} = 0 \Rightarrow \sqrt{2}\,\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{CA} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{CA} = 0}$$

منه نستنتج أنّ المجموعة (E) هي المستقيم الذي يشمل O ويعامد $\overrightarrow{CA}$.



التمرين 40 : (بكالوريا 2014 ر)

1. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة :

$$\boldsymbol{(z-1-2i)\left(z^2-2\left(1+\sqrt{3}\right)z+5+2\sqrt{3}\right)=0}$$

$z-1-2i=0 \Rightarrow z_0 = 1+2i$

$z^2-2\left(1+\sqrt{3}\right)z+5+2\sqrt{3}=0\,;\Delta=-4=(2i)^2$

$z_1 = 1+\sqrt{3}+i\,;z_2 = 1+\sqrt{3}-i$

$$\boxed{S=\left\{1+2i\,;1+\sqrt{3}+i\,;1+\sqrt{3}-i\right\}}$$

2. $z_A = 1+2i$ ، $z_B = 1+\sqrt{3}+i$ ، $z_C = 1+\sqrt{3}-i$ ، $z_D = 1-2i$

أ. بيان أنّ $AB = CD$ و (AD) يوازي (BC)

$$\begin{cases} AB = |z_B - z_A| = \left|\sqrt{3}-i\right| = 2 \\ CD = |z_D - z_C| = \left|-\sqrt{3}-i\right| = 2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{AB = CD}$$

$$\begin{cases} z_D - z_A = -4i \\ z_C - z_B = -2i \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BC} \Rightarrow \boxed{(AD) \parallel (BC)}$$

ب. التحقق أنّ $\frac{z_B+z_D}{2} \neq \frac{z_A+z_C}{2}$

$$\begin{cases} \dfrac{z_B+z_D}{2} = \dfrac{2+\sqrt{3}-i}{2} \\ \dfrac{z_A+z_C}{2} = \dfrac{2+\sqrt{3}+i}{2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\dfrac{z_B+z_D}{2} \neq \dfrac{z_A+z_C}{2}}$$

استنتاج طبيعة الرباعي $ABCD$

الرباعي $ABCD$ له ضلعان متقابلان متقايسان غير متوازيين ($[AB]$ و $[CD]$) وله ضلعان متقابلان متوازيان غير متقايسين ($[AD]$ و $[BC]$) ، منه نستنتج أنّ الرباعي $ABCD$ شبه منحرف متساوي الساقين

3. أ. بيان أنّ : $\frac{z_D-z_B}{z_A-z_B}=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$

$$\frac{z_D-z_B}{z_A-z_B}=\frac{-\sqrt{3}-3i}{-\sqrt{3}+i}=\frac{\left(-\sqrt{3}-3i\right)\left(-\sqrt{3}-i\right)}{4}=\sqrt{3}i=\boxed{\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}}$$

استنتاج أنّ D هي صورة A بتشابه مباشر مركزه B يُطلب تعيين نسبته وزاويته

$$\frac{z_D-z_B}{z_A-z_B}=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}\Rightarrow\boxed{z_D-z_B=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}(z_A-z_B)}$$

منه نستنتج أنّ D هي صورة A بتشابه مباشر مركزه B نسبته $\sqrt{3}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$

ب. بيان أنّ المثلث ADB قائم وأنّ النقط A ، B ، C و D تنتمي إلى دائرة يُطلب تحديد مركزها ونصف قطرها

$$\arg\left(\frac{z_D-z_B}{z_A-z_B}\right)=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{AB}\right)=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\boxed{\text{المثلث } ADB \text{ قائم في } B}$$

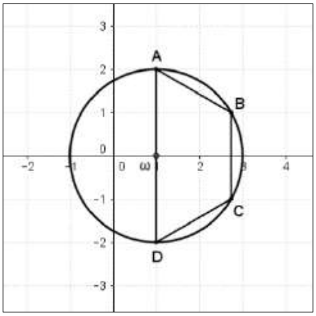
بما أنّ المثلث ADB قائم في B ، نستنتج أنّ النقط A ، B و D تنتمي إلى الدائرة (Γ) التي مركزها ω منتصف الوتر $[AD]$ ونصف قطرها $r=\frac{AD}{2}$

$$z_\omega=\frac{z_A+z_D}{2}=1\,;r=\frac{|z_D-z_A|}{2}=\frac{|-4i|}{2}=2$$

$$|z_C-z_\omega|=\left|\sqrt{3}-i\right|=2\Rightarrow\boxed{C\in(\Gamma)}$$

ج. استنتاج إنشاء للرباعي $ABCD$

لإنشاء الرباعي $ABCD$ ، نرسم الدائرة (Γ) التي مركزها $\omega(1;0)$ ونصف قطرها 2 ، وتكون B النقطة من (Γ) التي ترتيبها 1 وفاصلتها موجبة و C نظيرتها بالنسبة لمحور الفواصل ($z_C=\overline{z_B}$) ، أمّا A و D فلهما إحداثيات صحيحة.



* * *

التمرين 41 : (بكالوريا 2014 ر)

$\boldsymbol{a = -2 + 6i}$ و $\boldsymbol{b = -1 + 2i}$

1. كتابة $1 + i$ على شكل أسّي

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \boxed{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}$$

2. $\mathbf{z' = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}z + 2}$

أ. إيجاد لاحقة D'

$$D' = S(D) \Rightarrow d' = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}d + 2 = (1+i)2i + 2 = 2i = d \Rightarrow \boxed{D' = D}$$

ماذا تستنتج

بما أنّ النقطة D صامدة بالتحويل S فهي مركز هذا التحويل

ب. بيان أنّ : $\mathbf{z' - d = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}(z - d)}$

$$z' = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}z + 2 \Rightarrow z' - 2i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}z + 2 - 2i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}z - 2i(1+i)$$

$$= \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}z - 2i\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \Rightarrow \boxed{z' - d = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}(z - d)}$$

استنتاج طبيعة وعناصر التحويل S

نستنتج أنّ S تشابه مباشر مركزه D ، نسبته $\sqrt{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{4}$

3. $(\Delta): \mathbf{3x + 5y = 11}$

أ. التحقق أنّ النقطة $M_0(-3;4)$ تنتمي إلى (Δ)

$$3(-3) + 5(4) = 11 \Rightarrow \boxed{M_0 \in (\Delta)}$$

تعيين نقط (Δ) التي إحداثياتها أعداد صحيحة

$$\begin{cases} 3x + 5y = 11 \\ 3(-3) + 5(4) = 11 \end{cases} \Rightarrow 3(x+3) + 5(y-4) = 0$$

$$\Rightarrow 3(x+3) = 5(-y+4)$$

$$\begin{cases} 5 \mid 3(x+3) \\ PGCD(3;5) = 1 \end{cases} \Rightarrow 5 \mid x + 3 \Rightarrow \boxed{x = 5k - 3\,; y = -3k + 4}$$

منه نستنتج أنّ نقط (Δ) التي إحداثياتها أعداد صحيحة هي $M(5k-3;-3k+4)$ ، $k \in \mathbb{Z}$

ب. بيان أنّ المستقيمين (BM'_0) و (BA) متعامدان

$$M'_0 = S(M_0) \Rightarrow z'_0 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}z_0 + 2 = (1+i)(-3+4i) + 2 = -5 + i$$

طريقة ① :

$$arg\left(\frac{z'_0 - b}{a - b}\right) = arg\left(\frac{-4 - i}{-1 + 4i}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{(BA) \perp (BM'_0)}$$

طريقة ② :

$$\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix};\ \overrightarrow{BM_0'}\begin{pmatrix}-4\\-1\end{pmatrix};\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BM_0'}=0\Rightarrow\boxed{(BA)\perp(BM_0')}$$

4. تعيين مجموعة النقط $M(x;y)$ بحيث يكون المستقيمان (BA) و (BM') متعامدين

$$M'=S(M)\Rightarrow z'=(1+i)(x+iy)+2=(x-y+2)+(x+y)i$$

$$\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix};\ \overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x-y+3\\x+y-2\end{pmatrix};\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BM}=0\Rightarrow 3x+5y=11$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=5k-3\\y=-3k+4\end{cases}$$

$$\begin{cases}-5\le x\le 5\\-5\le y\le 5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-5\le 5k-3\le 5\\-5\le -3k+4\le 5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-\frac{2}{5}\le k\le\frac{8}{5}\\-\frac{1}{3}\le k\le 3\end{cases}\Rightarrow k\in\{0;1\}$$

$$\Rightarrow\boxed{M_0(-3;4)\ ;M_1(2;2)}$$

* * *

التمرين 42 : (بكالوريا 2015 ع ت)

I) تعيين العددين المركّبين α و β

$$\begin{cases}2\alpha-\beta=-3\\2\bar{\alpha}+\bar{\beta}=-3-2i\sqrt{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2\alpha-\beta=-3\\\overline{2\bar{\alpha}+\bar{\beta}}=-3+2i\sqrt{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2\alpha-\beta=-3\\2\alpha+\beta=-3+2i\sqrt{3}\end{cases}$$

$$\Rightarrow 4\alpha=-6+2i\sqrt{3}\Rightarrow\boxed{\alpha=-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\ ;\ \beta=2\alpha+3=i\sqrt{3}}$$

II) $z_A=-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $z_B=\overline{z_A}$ و $z_A=z_C.e^{i\frac{\pi}{3}}$

1. أ. كتابة z_A و z_C على الشكل الأسّي

$$z_A=-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)\Rightarrow\boxed{z_A=\sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}}}$$

$$z_A=z_C.e^{i\frac{\pi}{3}}\Rightarrow z_C=z_A.e^{-i\frac{\pi}{3}}=\sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}}\times e^{-i\frac{\pi}{3}}\Rightarrow\boxed{z_C=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}}$$

تعيين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n$ حقيقيا سالبا

$$\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n<0\Rightarrow\arg\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n=(2k+1)\pi\Rightarrow\arg\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^n=(2k+1)\pi$$

$$\Rightarrow\frac{n\pi}{3}=(2k+1)\pi\Rightarrow\frac{n}{3}=2k+1\Rightarrow\boxed{n=6k+3\ ;k\in\mathbb{N}}$$

ب. التحقق أنّ العدد المركّب $2\left(\frac{z_A}{\sqrt{3}}\right)^{2015}+\left(\frac{z_B}{\sqrt{3}}\right)^{1962}-\left(\frac{z_C}{\sqrt{3}}\right)^{1435}$ حقيقي

$$2\left(\frac{z_A}{\sqrt{3}}\right)^{2015}+\left(\frac{z_B}{\sqrt{3}}\right)^{1962}-\left(\frac{z_C}{\sqrt{3}}\right)^{1435}=2\left(e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)^{2015}+\left(e^{-i\frac{5\pi}{6}}\right)^{1962}-\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^{1435}$$

$$=2e^{i\frac{2015\times5\pi}{6}}+e^{-i\frac{1962\times5\pi}{6}}-e^{i\frac{1435\pi}{2}}=2e^{i\frac{7\pi}{6}}+e^{-i\pi}-e^{i\frac{3\pi}{2}}$$

$$=2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)-1+i=\boxed{-\sqrt{3}-1}$$

.2 $z_D = 1 + i$

أ. تحديد نسبة وزاوية التشابه المباشر S

$$S(D)=A\Rightarrow z_A=ke^{i\theta}.z_D\Rightarrow ke^{i\theta}=\frac{z_A}{z_D}=\frac{\sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}=\boxed{\frac{\sqrt{6}}{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}}$$

منه نستنتج أنّ التشابه المباشر S نسبته $\frac{\sqrt{6}}{2}$ وزاويته $\frac{7\pi}{12}$

ب. كتابة $\frac{z_A}{z_D}$ على الشكل الجبري

$$\frac{z_A}{z_D}=\frac{-3+\sqrt{3}i}{2(1+i)}=\frac{\left(-3+\sqrt{3}i\right)(1-i)}{4}=\boxed{\frac{-3+\sqrt{3}}{4}+\frac{3+\sqrt{3}}{4}i}$$

استنتاج القيمة المضبوطة لكل من $\cos\frac{7\pi}{12}$ و$\sin\frac{7\pi}{12}$

$$\cos\frac{7\pi}{12}=\frac{x}{r}=\frac{\frac{-3+\sqrt{3}}{4}}{\frac{\sqrt{6}}{2}}=\frac{-3+\sqrt{3}}{2\sqrt{6}}=\frac{-3\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{12}=\boxed{\frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$$

$$\sin\frac{7\pi}{12}=\frac{y}{r}=\frac{\frac{3+\sqrt{3}}{4}}{\frac{\sqrt{6}}{2}}=\frac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{6}}=\frac{3\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{12}=\boxed{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$$

.3 تعيين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي التحقق : $z=k(1+i)e^{i\left(\frac{7\pi}{12}\right)}$

$$z=k(1+i)e^{i\left(\frac{7\pi}{12}\right)}=k\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}e^{i\left(\frac{7\pi}{12}\right)}=k\sqrt{2}e^{i\frac{10\pi}{12}}=k\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

$$\arg(z)=\frac{5\pi}{6}\Rightarrow\boxed{\left(\vec{u};\overrightarrow{OM}\right)=\frac{5\pi}{6}}$$

منه نستنتج أنّ مجموعة النقط M هي نصف المستقيم الذي مبدؤه O ويشمل النقطة A.

* * *

التمرين 43 : (بكالوريا 2015 ع ت)

$z_A=2e^{i\frac{\pi}{6}}$ ، $z_B=-\overline{z_A}$ ، $z_C=-(z_A+z_B)$

.1 أ. كتابة z_B و z_C على الشكل الأسّي

طريقة ① :

$$z_B = -\overline{z_A} = -2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right) = -\sqrt{3}+i = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right) = \boxed{2e^{i\frac{5\pi}{6}}}$$

طريقة ② :

$$z_B = -\overline{z_A} \xRightarrow[\arg(\bar{z})=-\arg(z)]{} z_B = -2e^{-i\frac{\pi}{6}} \xRightarrow[\arg(-z)=\arg(z)+\pi]{} z_B = 2e^{i\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)}$$

$$\Rightarrow \boxed{z_B = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}}$$

$$z_C = -(z_A+z_B) = -\left(\sqrt{3}+i-\sqrt{3}+i\right) = -2i = \boxed{2e^{i\frac{-\pi}{2}}}$$

ب. استنتاج أنّ A ، B و C تنتمي إلى دائرة (γ) يُطلب تعيين مركزها ونصف قطرها

$$|z_A| = |z_B| = |z_C| = 2 \Rightarrow \boxed{OA = OB = OC = 2}$$

ومنه نستنتج أنّ النقط A ، B و C تنتمي إلى الدائرة (γ) التي مركزها O ونصف قطرها 2

ج. **إنشاء الدائرة (γ) و النقط A ، B و C :** (انظر الشكل في نهاية التمرين)

.2 أ. التحقق أنّ : $\frac{z_B-z_c}{z_B-z_A} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$

$$\frac{z_B-z_c}{z_B-z_A} = \frac{-\sqrt{3}+i+2i}{-\sqrt{3}+i-\sqrt{3}-i} = \frac{-\sqrt{3}+3i}{-2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i = \boxed{e^{-i\frac{\pi}{3}}}$$

ب. استنتاج أنّ المثلث ABC متقايس الأضلاع وأنّ النقطة O مركز ثقل هذا المثلث

$$\frac{z_B-z_c}{z_B-z_A} = e^{-i\frac{\pi}{3}} \Rightarrow \begin{cases} BC = BA \\ \left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CB}\right) = -\dfrac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\text{المثلث } ABC \text{ متقايس الأضلاع}}$$

$$z_A+z_B+z_C = z_A+z_B-(z_A+z_B) = 0 \Rightarrow \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow O\{(A;1),(B;1),(C;1)\} \Rightarrow \boxed{O \text{ مركز ثقل المثلث } ABC}$$

ج. تعيين وإنشاء المجموعة (E)

$$M \in (E) \Rightarrow |z| = \left|z-\sqrt{3}-i\right| \Rightarrow |z| = |z-z_A| \Rightarrow \boxed{OM = AM}$$

منه نستنتج أنّ المجموعة (E) هي محور القطعة $[OA]$

.3 أ. تعيين زاوية الدوران r

طريقة ① :

$$r(C) = A \Rightarrow z_A = e^{i\theta}z_C \Rightarrow e^{i\theta} = \frac{z_A}{z_C} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{6}}}{2e^{-i\frac{\pi}{2}}} = e^{i\frac{2\pi}{3}} \Rightarrow \boxed{\theta = \frac{2\pi}{3}}$$

طريقة ② :

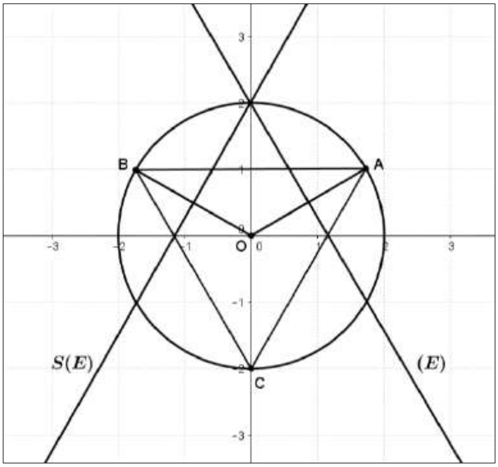
الزاوية $\widehat{CBA}$ محيطية قيسها $\frac{\pi}{3}$ (المثلث ABC متقايس الأضلاع) والزاوية $\widehat{COA}$ مركزية تحصر نفس القوس AC ، ومنه :

$$\widehat{COA} = 2\widehat{CBA} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \left(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OA}\right) = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \boxed{\theta = \frac{2\pi}{3}}$$

ب. اثبات أنّ صورة (E) بالدوران r هي محور القطعة $[OB]$

$$z_B = 2e^{i\frac{5\pi}{6}} = 2e^{i\frac{\pi}{6}} \times e^{i\frac{2\pi}{3}} = e^{i\frac{2\pi}{3}} z_A \Rightarrow \boxed{B = r(A)}$$

وبما أنّ النقطة O هي مركز الدوران r ، نستنتج أنّ صورة (E) (محور القطعة $[OA]$) بالدوران r هي محور القطعة $[OB]$.



* * *

التمرين 44 : (بكالوريا 2015 ت ر)

$z_B = 3 + 3i$ و $z_A = 1 - i$

1. أ. كتابة z_A و z_B على الشكل الأسّي

$$z_A = 1 - i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \boxed{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}$$

$$z_B = 3 + 3i = 3\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \boxed{3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}$$

ب. تعيين قيم n بحيث يكون العدد $\left(\frac{z_A}{\sqrt{2}}\right)^n$ حقيقيا

$$\left(\frac{z_A}{\sqrt{2}}\right)^n \in \mathbb{R} \Rightarrow \arg\left(\frac{z_A}{\sqrt{2}}\right)^n = k\pi \Rightarrow -\frac{n\pi}{4} = k\pi \Rightarrow \boxed{n = 4k'; k' \in \mathbb{N}}$$

ج. حساب طويلة العدد z وعمدة له

$$\frac{z}{z_A} = 4e^{i\frac{\pi}{12}} \Rightarrow z = 4e^{i\frac{\pi}{12}} \times z_A = 4e^{i\frac{\pi}{12}} \times \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} = 4\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

$$\Rightarrow \boxed{|z| = 4\sqrt{2}\,; \arg(z) = -\frac{\pi}{6}}$$

كتابة $\frac{z}{z_A}$ على الشكل الجبري

$$\frac{z}{z_A}=\frac{4\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)}{1-i}=\frac{2\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}i\right)}{1-i}=\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}i\right)(1+i)$$

$$\frac{z}{z_A}=\boxed{\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)+\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)i}$$

د. استنتاج $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$

$$\cos\frac{\pi}{12}=\frac{Re\left(\frac{z}{z_A}\right)}{\left|\frac{z}{z_A}\right|}=\boxed{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}\ ;\ \sin\frac{\pi}{12}=\frac{Im\left(\frac{z}{z_A}\right)}{\left|\frac{z}{z_A}\right|}=\boxed{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$$

2. أ. حساب z_C

$$R(B)=C\Rightarrow z_C-z_A=e^{i\frac{\pi}{2}}(z_B-z_A)\Rightarrow z_C=i(2+4i)+1-i$$

$$\Rightarrow\boxed{z_C=-3+i}$$

استنتاج طبيعة المثلث ABC

$$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=e^{i\frac{\pi}{2}}\Rightarrow\begin{cases}AB=AC\\ \left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{2}\end{cases}\Rightarrow\boxed{\text{المثلث } ABC \text{ قائم في } A \text{ ومتساوي الساقين}}$$

ب. حساب z_D

$$D\{(A;-1),(B;1),(C;1)\}\Rightarrow z_D=-z_A+z_B+z_C=\boxed{-1+5i}$$

بيان أنّ $ABDC$ مربّع

$$z_D=-z_A+z_B+z_C\Rightarrow z_D-z_C=z_B-z_A\Rightarrow\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}$$

بما أنّ الرباعي $ABDC$ متوازي أضلاع والمثلث ABC قائم في A ومتساوي الساقين ، نستنتج أنّ $ABDC$ مربّع.

* * *

التمرين 45 : (بكالوريا 2015 ت ر)

1. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (I) ... $z^2-4(\sin\theta)z+4=0$

$$\Delta=16(\sin^2\theta-1)=-16\cos^2\theta=(4i\cos\theta)^2$$

$$\boxed{z_1=2\sin\theta+2i\cos\theta\ ;z_2=2\sin\theta-2i\cos\theta}$$

2. كتابة z_1 و z_2 على الشكل الأسي

$$z_1=2\sin\frac{\pi}{3}+2i\cos\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}+i=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=\boxed{2e^{i\frac{\pi}{6}}}$$

$$z_2 = 2\sin\frac{\pi}{3} - 2i\cos\frac{\pi}{3} = \sqrt{3} - i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = \boxed{2e^{-i\frac{\pi}{6}}}$$

.3 $\boldsymbol{z_A = \sqrt{3} + i}$ ، $\boldsymbol{z_B = \sqrt{3} - i}$ و $\boldsymbol{z_C = 3\sqrt{3} + i}$.

أ. كتابة $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل الجبري ثمّ على الشكل الأسّي

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{2\sqrt{3}}{-2i} = -\frac{\sqrt{3}}{i} = \boxed{\sqrt{3}i = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}}$$

استنتاج طبيعة المثلث ABC

$$\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{\text{المثلث } ABC \text{ قائم في } A}$$

ب. استنتاج أنّ النقطة C هي صورة النقطة B بالتشابه المباشر S

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}} \Rightarrow \boxed{z_C - z_A = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}(z_B - z_A)}$$

منه نستنتج أنّ النقطة C هي صورة النقطة B بالتشابه المباشر S الذي مركزه A ، نسبته $\sqrt{3}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$

ج. تعيين لاحقة النقطة D

$$t(B) = D \Rightarrow z_D = z_B + z_{\overrightarrow{AC}} = z_B + z_C - z_A \Rightarrow \boxed{z_D = 3\sqrt{3} - i}$$

تحديد طبيعة الرباعي $ABDC$

$$z_D = z_B + z_C - z_A \Rightarrow z_D - z_C = z_B - z_A \Rightarrow \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$$

بما أنّ الرباعي $ABDC$ متوازي أضلاع المثلث ABC قائم في A ، نستنتج أنّ $ABDC$ مستطيل.

.4 أ. تعيين المجموعة (Γ_1)

$$M \in (\Gamma_1) \Rightarrow \arg\left(\frac{z - z_C}{z - z_B}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow \left(\overrightarrow{BM}; \overrightarrow{CM}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

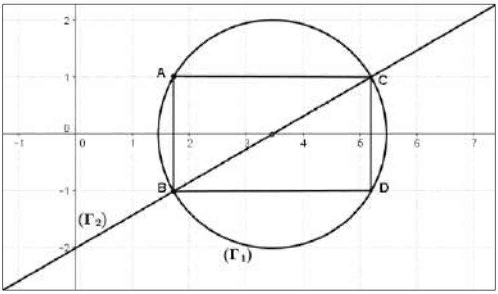
$$\Rightarrow \boxed{\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{CM} = 0}$$

منه نستنتج أنّ المجموعة (Γ_1) هي الدائرة التي قطرها $[BC]$ باستثناء النقطة B

ب. تعيين المجموعة (Γ_2)

$$M \in (\Gamma_2) \Rightarrow \arg\left(\frac{z - z_C}{z - z_B}\right) = k\pi \Rightarrow \left(\overrightarrow{BM}; \overrightarrow{CM}\right) = k\pi \Rightarrow M, C, B \text{ في استقامية}$$

منه نستنتج أنّ المجموعة (Γ_2) هي المستقيم (BC) باستثناء النقطة B.



* * *

التمرين 46 : (بكالوريا 2015 ر)

$z_A = i$ ، $z_B = -2 + i$ ، $z_C = -3$ ، $z_H = -3 + 4i$ ، $z_I = -1 - i$

1. أ. تمثيل النقط A ، B ، C ، H و I

(انظر الشكل في نهاية التمرين)

ب. تعيين نسبة وزاوية التشابه المباشر الذي مركزه B ويحوّل A إلى C

$$\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = \frac{-1 - i}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}}$$

منه نستنتج أنّ نسبة التشابه المباشر $\frac{\sqrt{2}}{2}$ وزاويته $\frac{5\pi}{4}$

2. تعيين z_G

$$z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} = \frac{-5 + 2i}{3} = \boxed{-\frac{5}{3} + \frac{2}{3}i}$$

3. أ. كتابة $\frac{z_B - z_C}{z_H - z_A}$ على الشكل الجبري

$$\frac{z_B - z_C}{z_H - z_A} = \frac{1 + i}{-3 + 3i} = \frac{(1 + i)(-3 - 3i)}{18} = \frac{-6i}{18} = \boxed{-\frac{1}{3}i}$$

ب. استنتاج أنّ المستقيمين (AH) و (BC) متعامدان

$$\arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_H - z_A}\right) = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \left(\overrightarrow{AH};\overrightarrow{BC}\right) = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{(AH) \perp (BC)}$$

ج. بيان أنّ H هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث ABC

$$\frac{z_C - z_A}{z_H - z_B} = \frac{-3 - i}{-1 + 3i} = \frac{(-3 - i)(-1 - 3i)}{10} = \frac{10i}{10} = i$$

$$\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_H - z_B}\right) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \left(\overrightarrow{BH};\overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{(BH) \perp (AC)}$$

بما أنّ (AH) و(BH) يتقاطعان في النقطة H (وهما ارتفاعان في المثلث ABC) ، نستنتج أنّ H هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث ABC

4. بيان أنّ النقط G ، H و I في استقامية

$$\frac{z_G - z_H}{z_I - z_H} = \frac{\frac{4}{3}-\frac{10}{3}i}{2-5i} = \frac{2}{3} \xrightarrow[(\overrightarrow{HI};\overrightarrow{HG})=2k\pi]{} \boxed{\text{النقط } G \text{ ، } H \text{ و } I \text{ في استقامية}}$$

5. $\boldsymbol{z+1+i=\sqrt{5}e^{i\theta}}$

أ. بيان أنّ النقطة A تنتمي إلى المجموعة (Γ)

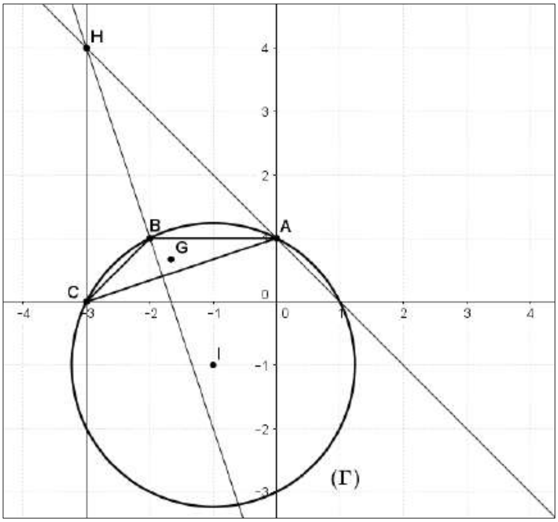
$$z_A + 1 + i = 1 + 2i \Rightarrow |z_A + 1 + i| = \sqrt{5} \Rightarrow \boxed{A \in (\Gamma)}$$

ب. تعيين طبيعة المجموعة (Γ) مع تحديد عناصرها المميزة

$$M \in (\Gamma) \Rightarrow z + 1 + i = \sqrt{5}e^{i\theta} \Rightarrow |z - z_I| = \sqrt{5} \Rightarrow \boxed{IM = \sqrt{5}}$$

منه نستنتج أنّ المجموعة (Γ) هي الدائرة التي مركزها I ونصف قطرها $\sqrt{5}$

ج. إنشاء المجموعة (Γ)



د. التحقق أنّ النقطتين B و C تنتميان إلى المجموعة (Γ)

$$|z_B - z_I| = |-1 + 2i| = \sqrt{5} \Rightarrow \boxed{B \in (\Gamma)}$$

$$|z_C - z_I| = |2 + i| = \sqrt{5} \Rightarrow \boxed{C \in (\Gamma)}$$

* * *

التمرين 47 : (بكالوريا 2015 ر)

1. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $\boldsymbol{z^2 - 2(1-\sqrt{3})z + 8 = 0}$

$$\Delta = 4(1-\sqrt{3})^2 - 32 = -16 - 8\sqrt{3} = -4(4+2\sqrt{3}) = [2i(1+\sqrt{3})]^2$$

$$z_1 = (1-\sqrt{3}) + i(1+\sqrt{3})\ ;\ z_2 = (1-\sqrt{3}) - i(1+\sqrt{3})$$

2. $\boldsymbol{z_A = (1-\sqrt{3}) + i(1+\sqrt{3})}$ و $\boldsymbol{z_B = \overline{z_A}}$

أ. بيان أنّ $\boldsymbol{\frac{z_B}{z_A} = e^{-\frac{7\pi}{6}i}}$

$$\frac{z_B}{z_A} = \frac{(1-\sqrt{3}) - i(1+\sqrt{3})}{(1-\sqrt{3}) + i(1+\sqrt{3})} = \frac{\left[(1-\sqrt{3}) - i(1+\sqrt{3})\right]^2}{8} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$= e^{i\frac{5\pi}{6}} = \boxed{e^{-\frac{7\pi}{6}i}}$$

ب. استنتاج عمدة للعدد المركب $\boldsymbol{z_A}$

$$\arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right) = \arg(z_B) - \arg(z_A) = -2\arg(z_A) = -\frac{7\pi}{6} \Rightarrow \boxed{\arg(z_A) = \frac{7\pi}{12}}$$

ج. استنتاج القيمة المضبوطة لكل من العددين $\boldsymbol{\cos\frac{7\pi}{12}}$ و $\boldsymbol{\sin\frac{7\pi}{12}}$

$$|z_A| = \left|(1-\sqrt{3}) + i(1+\sqrt{3})\right| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\cos\frac{7\pi}{12} = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \boxed{\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}}\ ;\ \sin\frac{7\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \boxed{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}$$

3. أ. حل في $\boldsymbol{\mathbb{Z}}$ المعادلة $\boldsymbol{7x - 2y = 1}$

$$\begin{cases} 7x - 2y = 1 \\ 7(1) - 2(3) = 1 \end{cases} \Rightarrow 7(x-1) = 2(y-3)$$

$$\begin{cases} 2|7(x-1) \\ PGCD(2;7) = 1 \end{cases} \Rightarrow 2|x-1 \Rightarrow x = 2k+1\ ;y = 7k+3$$

$$\boxed{S = \{(2k+1\ ;7k+3)\}\ ;k \in \mathbb{Z}}$$

ب. بيان أنّه إذا كانت الثنائية $\boldsymbol{(x;y)}$ من الأعداد الصحيحة حلا للمعادلة $\boldsymbol{7x - 24y = 12}$ فإنّ $\boldsymbol{x}$ يكون مضاعفا للعدد 12

$$7x - 24y = 12 \Rightarrow 7x = 12(2y+1)$$

$$\begin{cases} 12|7x \\ PGCD(12;7) = 1 \end{cases} \Rightarrow 12|x \Rightarrow \boxed{x = 12\alpha\ ;\ \alpha \in \mathbb{Z}}$$

ج. استنتاج حلول المعادلة $\boldsymbol{7x - 24y = 12}$

$$7x - 24y = 12 \Rightarrow 12(7\alpha - 2y) = 12 \Rightarrow 7\alpha - 2y = 1$$

$$\Rightarrow (\alpha;y) = (2k+1\ ;7k+3) \Rightarrow \boxed{(x;y) = (24k+12\ ;7k+3)\ ;k \in \mathbb{Z}}$$

د. تعيين مجموعة قيم $\boldsymbol{n}$ التي يكون من أجلها $\boldsymbol{(z_A)^n}$ عددا حقيقيا سالبا تماما

$$(z_A)^n < 0 \Rightarrow \arg(z_A)^n = (2k'+1)\pi \Rightarrow \frac{7n\pi}{12} = (2k'+1)\pi$$

$$\Rightarrow \frac{7n}{12} = 2k'+1 \Rightarrow 7n - 24k' = 12 \Rightarrow \boxed{n = 24k+12\ ;k \in \mathbb{N}}$$

* * *

التمرين 48 : (بكالوريا 2016 ع ت)

$$z' = \frac{z-2}{z-1}$$

1. **حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z' = z$**

$$z' = z \Rightarrow \frac{z-2}{z-1} = z \Rightarrow z(z-1) = z-2 \Rightarrow z^2 - 2z + 2 = 0$$

$\Delta = -4 = (2i)^2$; $\boxed{z_1 = 1 - i\, ; z_2 = 1 + i}$

2. **$z_1 = 1 - i$ و $z_2 = \overline{z_1}$**

أ. **كتابة $\frac{z_2}{z_1}$ على الشكل الأسّي**

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{2} = i = \boxed{e^{i\frac{\pi}{2}}}$$

ب. **بيان أنّ B هي صورة A بالدوران R الذي مركزه O يُطلب تعيين زاوية له**

$$\frac{z_2}{z_1} = e^{i\frac{\pi}{2}} \Rightarrow \boxed{z_2 = e^{i\frac{\pi}{2}} z_1}$$

منه نستنتج أنّ B هي صورة A بالدوران R الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$

3. **تعيين وإنشاء المجموعة (Γ)**

$$M' \in (yy') \Rightarrow \arg(z') = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow \arg\left(\frac{z - z_C}{z - z_D}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\Rightarrow \left(\overrightarrow{DM}; \overrightarrow{CM}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{DM}.\overrightarrow{CM} = 0}$$

منه نستنتج أنّ المجموعة (Γ) هي الدائرة التي قطرها $[CD]$ باستثناء النقطة D

4.

أ. **تعيين طبيعة التحويل النقطي $S = hoR$ وعناصره المميّزة**

$$\boxed{h_{(O;2)} o R_{\left(O;\frac{\pi}{2}\right)} = S_{\left(O;2;\frac{\pi}{2}\right)}}$$

منه نستنتج أنّ التحويل S هو تشابه مباشر مركزه O ، نسبته 2 وزاويته $\frac{\pi}{2}$

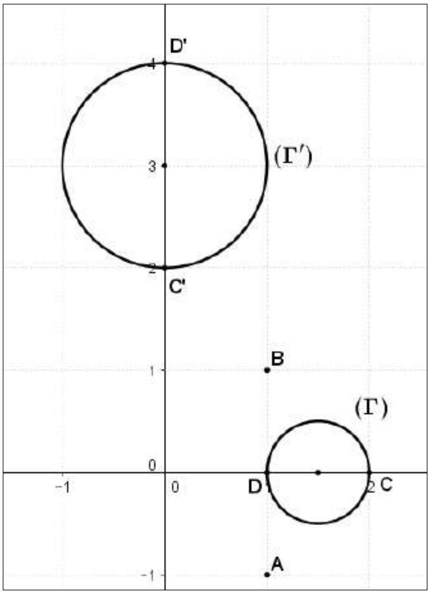
ب. **كتابة العبارة المركبة للتحويل S**

$$S(M) = M' \Rightarrow z' = 2e^{i\frac{\pi}{2}} z \Rightarrow \boxed{z' = 2iz}$$

ج. **تعيين و إنشاء المجموعة (Γ')**

$S(C) = C' \Rightarrow z_{C'} = 2iz_C = \boxed{4i}$; $S(D) = D' \Rightarrow z_{D'} = 2iz_D = \boxed{2i}$

منه نستنتج أنّ المجموعة (Γ') صورة (Γ) بالتحويل S هي الدائرة التي قطرها $[C'D']$ باستثناء النقطة D'.



* * *

التمرين 49 : (بكالوريا 2016 ع ت)

1. **حل في ℂ المعادلة** $\left(z-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)\left(z^2+\sqrt{3}z+1\right)=0$

$$z-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i=0 \Rightarrow z_0=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$$

$$z^2+\sqrt{3}z+1=0\,;\Delta=-1=i^2\,;z_1=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\,;z_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$$

$$\boxed{S=\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\,;\ -\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\,;\ -\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right\}}$$

2. $z_A=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ ، $z_B=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ ، $z_C=\overline{z_B}$.

أ. كتابة z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسّي

$$z_A=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i=\boxed{e^{i\frac{\pi}{6}}}\,;z_B=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i=\boxed{e^{i\frac{5\pi}{6}}}\,;z_C=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i=\boxed{e^{i\frac{7\pi}{6}}}$$

ب. بيان أنّه يوجد تشابه مباشر S مركزه B ويحوّل النقطة C إلى النقطة A يُطلب تعيين عناصره المميّزة

$$\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}=\frac{\sqrt{3}}{-i}=\sqrt{3}i \Rightarrow \boxed{z_A-z_B=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}(z_C-z_B)}$$

منه نستنتج أنّ A هي صورة C بالتشابه المباشر S الذي مركزه B ، نسبته $\sqrt{3}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$

3. **أ. تعيين لاحقة النقطة D**

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\Rightarrow z_B-z_A=z_C-z_D\Rightarrow z_D=z_A-z_B+z_C=\boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i}$$

تحديد الرباعي $ABCD$

الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع والمثلث ABC قائم في B ، منه نستنتج أنّ الرباعي $ABCD$ مستطيل

ب. **تعيين المجموعة (E)**

$$M\in(E)\Rightarrow|z-z_A|=|\bar{z}-z_B|\Rightarrow|z-z_A|=|\overline{\bar{z}-z_B}|$$

$$\Rightarrow|z-z_A|=|z-\overline{z_B}|\Rightarrow|z-z_A|=|z-z_C|\Rightarrow\boxed{AM=CM}$$

ج. **تعيين المجموعة (Γ)**

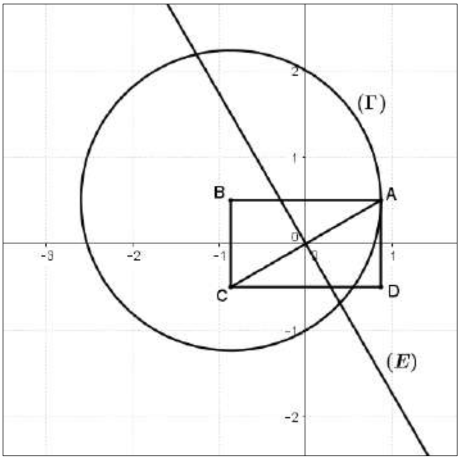
$$M\in(\Gamma)\Rightarrow z=z_B+\sqrt{3}e^{i\theta}\Rightarrow z-z_B=\sqrt{3}e^{i\theta}\Rightarrow|z-z_B|=\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow\boxed{BM=\sqrt{3}}$$

منه نستنتج أنّ المجموعة (Γ) هي الدائرة التي مركزها B ونصف قطرها $\sqrt{3}$

التحقق أنّ النقطة A تنتمي إلى (Γ)

$$|z_A-z_B|=\sqrt{3}\Rightarrow\boxed{A\in(\Gamma)}$$



* * *

التمرين 50 : (بكالوريا 2016 ع ت)

1. $P(z)=z^3-24\sqrt{3}$

أ. **التحقق أنّ $P(2\sqrt{3})=0$**

$$P(2\sqrt{3})=(2\sqrt{3})^3-24\sqrt{3}=24\sqrt{3}-24\sqrt{3}=\boxed{0}$$

ب. **إيجاد العددين الحقيقيين a و b**

	1	0	0	$-24\sqrt{3}$
$2\sqrt{3}$				
	1	$2\sqrt{3}$	12	0

$$P(z) = (z - 2\sqrt{3})(z^2 + 2\sqrt{3}z + 12)$$

ج. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $P(z) = 0$

$P(z) = 0 \Rightarrow \left(z - 2\sqrt{3}\right)\left(z^2 + 2\sqrt{3}z + 12\right) = 0$

$z - 2\sqrt{3} = 0 \Rightarrow z_0 = 2\sqrt{3}$

$z^2 + 2\sqrt{3}z + 12 = 0\ ; \Delta = -36 = (6i)^2\ ; z_1 = -\sqrt{3} + 3i\ ; z_2 = -\sqrt{3} - 3i$

$\boxed{S = \left\{2\sqrt{3}\ ;\ -\sqrt{3} + 3i\ ; -\sqrt{3} - 3i\right\}}$

.2 $z_A = -\sqrt{3} + 3i$ ، $z_B = -\sqrt{3} - 3i$ ، $z_C = 2\sqrt{3}$

أ. كتابة العدد $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل الجبري

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{3\sqrt{3} - 3i}{-6i} = \frac{\sqrt{3} - i}{-2i} = \boxed{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

ب. بيان أنّه يوجد دوران r مركزه A ويحوّل B إلى C يُطلب تعيين زاويته

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{i\frac{\pi}{3}} \Rightarrow \boxed{z_C - z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_B - z_A)}$$

منه نستنتج أنّه يوجد دوران r مركزه A ويحوّل B إلى C زاويته $\frac{\pi}{3}$

ج. استنتاج طبيعة المثلث ABC

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}} \Rightarrow \begin{cases} AC = AB \\ \left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\text{المثلث } ABC \text{ متقايس الأضلاع}}$$

د. تعيين z_D

$z_D = z_C + z_{\overrightarrow{AB}} = z_C + z_B - z_A = \boxed{2\sqrt{3} - 6i}$

تحديد طبيعة الرباعي $ABCD$

$z_D = z_C + z_B - z_A \Rightarrow z_D - z_C = z_B - z_A \Rightarrow \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$

بما أنّ الرباعي $ABCD$ متوازي الأضلاع والمثلث ABC متقايس الأضلاع ،
نستنتج أنّ الرباعي $ABCD$ معيّن

.3 تعيين المجموعة (Γ)

$M \in (\Gamma) \Rightarrow \arg\left(\frac{z}{\bar{z}}\right) = 2k\pi \Rightarrow \arg(z) - \arg(\bar{z}) = 2k\pi$

$\Rightarrow \boxed{\arg(z) = \arg(\bar{z}) + 2k\pi}$

منه نستنتج أنّ المجموعة (Γ) هي محور الفواصل باستثناء المبدأ O.

* * *

التمرين 51 : (بكالوريا 2016 ع ت)

.1 $2\bar{z}^3+3\bar{z}^2-3\bar{z}+5=0 \ldots (E)$

أ. اثبات أنّ المعادلة (E) تكافئ المعادلة $(2\bar{z}+5)(\bar{z}^2-\bar{z}+1)=0$

$$(2\bar{z}+5)(\bar{z}^2-\bar{z}+1)=2\bar{z}^3-2\bar{z}^2+2\bar{z}+5\bar{z}^2-5\bar{z}+5$$

$$=2\bar{z}^3+3\bar{z}^2-3\bar{z}+5 \Rightarrow \boxed{(E)\Leftrightarrow(2\bar{z}+5)(\bar{z}^2-\bar{z}+1)=0}$$

ب. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E)

$(2\bar{z}+5)(\bar{z}^2-\bar{z}+1)=0 \Rightarrow 2\bar{z}+5=0$ أو $\bar{z}^2-\bar{z}+1=0$

$$2\bar{z}+5=0 \Rightarrow \overline{2\bar{z}+5}=0 \Rightarrow 2\mathrm{z}+5=0 \Rightarrow z_0=-\frac{5}{2}$$

$$\bar{z}^2-\bar{z}+1=0 \Rightarrow \overline{\bar{z}^2-\bar{z}+1}=0 \Rightarrow \mathrm{z}^2-\mathrm{z}+1=0$$

$$\Delta=-3=\left(\sqrt{3}i\right)^2 ; z_1=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i ; z_2=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\boxed{S=\left\{-\frac{5}{2};\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i;\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}}$$

.2 $z_A=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ ، $z_B=\overline{z_A}$ ، $z_C=-1$ ، $z_D=-\frac{5}{2}$

أ. كتابة z_A و z_B على الشكل الأسّي

$$z_A=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=\boxed{e^{-i\frac{\pi}{3}}} ; z_B=\overline{z_A}=\boxed{e^{i\frac{\pi}{3}}}$$

ب. إنشاء النقط A ، B ، C و D

(انظر الشكل في نهاية التمرين)

ج. اثبات أنّ : $z_B-z_C=z_B(z_A-z_C)$

$$z_B-z_C=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i+1=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$z_B(z_A-z_C)=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\Rightarrow \boxed{z_B-z_C=z_B(z_A-z_C)}$$

د. استنتاج طبيعة المثلث ABC

$$z_B-z_C=z_B(z_A-z_C) \Rightarrow \frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=z_B=e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=e^{i\frac{\pi}{3}} \Rightarrow \begin{cases} AC=BC \\ \left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right)=\frac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\text{المثلث } ABC \text{ متقايس الأضلاع}}$$

3. إنشاء النقطة F وتحديد طبيعة المثلث AFC

$$S(A)=F \Rightarrow \frac{z_F-z_C}{z_A-z_C}=2e^{i\frac{\pi}{3}} \Rightarrow \begin{cases} CF=2CA \\ (\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CF})=\frac{\pi}{3}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} CF=2CB \\ (\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CF})=(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB})\end{cases}$$

منه نستنتج أنّ النقط B ، C و F في استقامية و B منتصف $[CF]$ ، وبالتالي فإنّ النقطة F هي نظيرة C بالنسبة إلى B

$$[CF] \text{ منتصف } B \Rightarrow z_B=\frac{z_C+z_F}{2} \Rightarrow z_F=2z_B-z_C=2+\sqrt{3}i$$

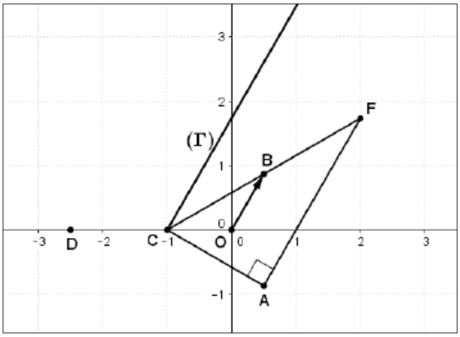
$$\frac{z_F-z_A}{z_C-z_A}=\frac{\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i}{-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}=-\sqrt{3}i \Rightarrow (\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AF})=-\frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{\text{المثلث } AFC \text{ قائم في } A}$$

4. تعيين طبيعة المجموعة (Γ)

$$M\in(\Gamma) \Rightarrow z+1=kz_B \Rightarrow z-z_C=kz_B \Rightarrow \arg(z-z_C)=\arg(z_B)$$

$$\Rightarrow \boxed{(\vec{u};\overrightarrow{CM})=(\vec{u};\overrightarrow{OB})}$$

منه نستنتج أنّ المجموعة (Γ) هي نصف المستقيم الذي مبدؤه C ويوازي $\overrightarrow{OB}$.



* * *

التمرين 52 : (بكالوريا 2016 ت ر)

1. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $9z^2-6\sqrt{3}z+4=0$

$$\Delta=-36=(6i)^2 ; \boxed{z_1=\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{3}i ;\ z_2=\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{3}i}$$

2. $z_A=\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{3}i$ و $z_B=\overline{z_A}$

أ. كتابة z_A و z_B على الشكل الأسّي

$$z_A=\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{3}i=\frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=\boxed{\frac{2}{3}e^{i\frac{\pi}{6}}} ;\ z_B=\overline{z_A}=\boxed{\frac{2}{3}e^{-i\frac{\pi}{6}}}$$

ب. بيان أنّ : $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{2016}+\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{1437}=0$

$$\frac{z_A}{z_B}=e^{i\frac{2\pi}{6}}=e^{i\frac{\pi}{3}}\Rightarrow\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{2016}+\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{1437}=e^{i\frac{2016\pi}{3}}+e^{i\frac{1437\pi}{3}}$$

$$=e^{i672\pi}+e^{i479\pi}=e^{0}+e^{i\pi}=1-1=\boxed{0}$$

ج. تعيين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{n}$ عددا حقيقيا

$$\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{n}\in\mathbb{R}\Rightarrow\arg\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{n}=k\pi\Rightarrow\frac{n\pi}{3}=k\pi\Rightarrow\boxed{n=3k\,;k\in\mathbb{N}}$$

.3 $z'=\left(\frac{z_A}{z_B}\right)z$

أ. تعيين طبيعة التحويل f وعناصره المميزة

$$f(M)=M'\Rightarrow z'=\left(\frac{z_A}{z_B}\right)z\Rightarrow\boxed{z'=e^{i\frac{\pi}{3}}z}$$

منه نستنتج أنّ التحويل f دوران مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{3}$

ب. حساب z_C لاحقة النقطة C صورة النقطة A بالتحويل f

$$C=f(A)\Rightarrow z_C=e^{i\frac{\pi}{3}}z_A=e^{i\frac{\pi}{3}}\times\frac{2}{3}e^{i\frac{\pi}{6}}=\frac{2}{3}e^{i\frac{\pi}{2}}=\boxed{\frac{2}{3}i}$$

ج. تعيين z_D لاحقة النقطة D حتى تكون O مركز ثقل الرباعي $ABCD$

$$O\{(A;1),(B;1),(C;1),(D;1)\}\Rightarrow\frac{z_A+z_B+z_C+z_D}{4}=0$$

$$\Rightarrow z_D=-z_A-z_B-z_C=-\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{3}i-\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{3}i-\frac{2}{3}i$$

$$=\boxed{-\frac{2\sqrt{3}}{3}-\frac{2}{3}i}$$

* * *

التمرين 53 : (بكالوريا 2016 ت ر)

I) 1. حل في ℂ المعادلة $\left(z^2-2\sqrt{2}z+4\right)\left(2z-\sqrt{2}\right)=0$

$$\left(z^2-2\sqrt{2}z+4\right)\left(2z-\sqrt{2}\right)=0$$

$$2z-\sqrt{2}=0\Rightarrow z_0=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$z^2-2\sqrt{2}z+4=0;\Delta=-8=\left(2\sqrt{2}i\right)^2;z_1=\sqrt{2}+\sqrt{2}i;z_2=\sqrt{2}-\sqrt{2}i$$

$$\boxed{S=\left\{\frac{\sqrt{2}}{2};\sqrt{2}+\sqrt{2}i\,;\sqrt{2}-\sqrt{2}i\right\}}$$

2. كتابة الحلول على الشكل الأسّي

$$z_0=\frac{\sqrt{2}}{2}=\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i2\pi}}$$

$$z_1=\sqrt{2}+\sqrt{2}i=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=\boxed{2e^{i\frac{\pi}{4}}}\,;z_2=\overline{z_1}=\boxed{2e^{-i\frac{\pi}{4}}}$$

II) $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ، $b=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ ، $c=\sqrt{2}-i\sqrt{2}$

1. تعليم النقط A, B و C

(انظر الشكل في نهاية التمرين)

2. حساب اللاحقتين d و e للنقطتين D و E على الترتيب

$$D=S(C)\Rightarrow d-a=3e^{i\pi}(c-a)\Rightarrow d=-3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\sqrt{2}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow\boxed{d=-\sqrt{2}+3\sqrt{2}i}$$

$$E=R(C)\Rightarrow e=e^{-i\frac{\pi}{2}}\times c=-i\left(\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)=\boxed{-\sqrt{2}-i\sqrt{2}}$$

III) $z=\frac{d-b}{e-b}$

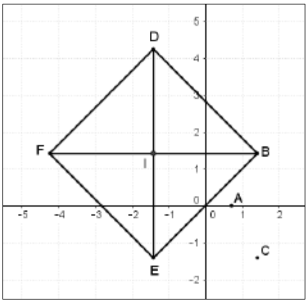
1. كتابة العدد المركّب z على الشكل المثلثي

$$z=\frac{d-b}{e-b}=\frac{-\sqrt{2}+3\sqrt{2}i-\sqrt{2}-\sqrt{2}i}{-\sqrt{2}-i\sqrt{2}-\sqrt{2}-i\sqrt{2}}=\frac{-2\sqrt{2}+2i\sqrt{2}}{-2\sqrt{2}-2i\sqrt{2}}=\frac{1-i}{1+i}=-i$$

$$\boxed{z=\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$$

2. تعيين طبيعة الرباعي $BDFE$

القطران $[BF]$ و $[DE]$ يتناصفان في النقطة I والمثلث BDE قائم في B ومتساوي الساقين $\left(\frac{d-b}{e-b}=e^{-i\frac{\pi}{2}}\right)$، منه نستنتج أنّ الرباعي $BDFE$ مربّع.



* * *

التمرين 54 : (بكالوريا 2016 ر)

1. أ. حل في ℂ المعادلة : $z^2-4z+5=0$

$$\Delta=-4=(2i)^2\;;\;\boxed{z_1=2+i\;;z_2=2-i}$$

ب. استنتاج حلول المعادلة ذات المجهول المركّب z الآتية :

$$\left(z+1+i(1-\sqrt{3})\right)^2-4z+1-4i(1-\sqrt{3})=0$$

$$\left(z+1+i(1-\sqrt{3})\right)^2-4z+1-4i(1-\sqrt{3})=0$$

$$\Rightarrow\left(z+1+i(1-\sqrt{3})\right)^2-4\left(z+1+i(1-\sqrt{3})\right)+5=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}z+1+i(1-\sqrt{3})=2+i\\z+1+i(1-\sqrt{3})=2-i\end{cases}\Rightarrow\boxed{\begin{cases}z_1=1+i\sqrt{3}\\z_2=1+i(\sqrt{3}-2)\end{cases}}$$

2. $z_0=e^{i\theta}$ و $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$

أ. كتابة العدد المركّب $1+i\sqrt{3}$ على الشكل الأسّي

$$1+i\sqrt{3}=2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\boxed{2e^{i\frac{\pi}{3}}}$$

ب. تعيين θ علما أنّ : $\frac{z_0(1+i\sqrt{3})}{\overline{z_0}}=2e^{i\frac{\pi}{2}}$

$$\frac{z_0(1+i\sqrt{3})}{\overline{z_0}}=2e^{i\frac{\pi}{2}}\Rightarrow\frac{e^{i\theta}\times2e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{-i\theta}}=2e^{i\frac{\pi}{2}}\Rightarrow2e^{i\left(2\theta+\frac{\pi}{3}\right)}=2e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow2\theta+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+2k\pi\Rightarrow2\theta=\frac{\pi}{6}+2k\pi\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{12}+k\pi\Rightarrow\boxed{\theta=\frac{\pi}{12}}$$

ج. كتابة العدد المركّب $\left[\frac{z_0(1+i\sqrt{3})}{2}\right]^n$ على الشكل المثلثي

$$\left[\frac{z_0(1+i\sqrt{3})}{2}\right]^n=\left[e^{i\frac{\pi}{12}}\times e^{i\frac{\pi}{3}}\right]^n=\left[e^{i\frac{5\pi}{12}}\right]^n=e^{i\frac{5n\pi}{12}}$$

$$=\boxed{\cos\left(\frac{5n\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{5n\pi}{12}\right)}$$

د. تعيين قيّم n التي من أجلها يكون $\left[\frac{z_0(1+i\sqrt{3})}{2}\right]^n$ عددا حقيقيا موجبا تماما

$$\left[\frac{z_0(1+i\sqrt{3})}{2}\right]^n>0\Rightarrow\frac{5n\pi}{12}=2k\pi\Rightarrow5n=24k\Rightarrow n=\frac{24k}{5}$$

$$\begin{cases}5\mid24k\\PGCD(5;24)=1\end{cases}\Rightarrow5\mid k\Rightarrow k=5\alpha\Rightarrow\boxed{n=24\alpha\;;\;\alpha\in\mathbb{N}}$$

3. $z_A = 2 - i$ ، $z_B = 2 + i$ ، $z_C = 1 + i\sqrt{3}$

أ. تعيين z_D

$$D\{(A,1);(B,-1);(C,1)\} \Rightarrow z_D = z_A - z_B + z_C \Rightarrow \boxed{z_D = 1 + i(\sqrt{3} - 2)}$$

ب. استنتاج أنّ الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع

$$z_D = z_A - z_B + z_C \Rightarrow z_D - z_C = z_A - z_B \Rightarrow \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$$

$$\Rightarrow \boxed{ABCD \text{ متوازي أضلاع}}$$

ج. $$\begin{cases} \arg(z_E - z_A) - \arg(z_E - z_B) = \frac{\pi}{2} \\ \left|\frac{z_E - z_A}{z_E - z_B}\right| = 2 \end{cases}$$

- **بيان أنّ : $z_E = \frac{14}{5} + \frac{3}{5}i$**

$$\begin{cases} \arg(z_E - z_A) - \arg(z_E - z_B) = \dfrac{\pi}{2} \\ \left|\dfrac{z_E - z_A}{z_E - z_B}\right| = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \arg\left(\dfrac{z_E - z_A}{z_E - z_B}\right) = \dfrac{\pi}{2} \\ \left|\dfrac{z_E - z_A}{z_E - z_B}\right| = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{z_E - z_A}{z_E - z_B} = 2i \Rightarrow z_E - z_A = 2i(z_E - z_B) \Rightarrow (1 - 2i)z_E = z_A - 2iz_B$$

$$\Rightarrow z_E = \frac{4 - 5i}{1 - 2i} = \boxed{\frac{14}{5} + \frac{3}{5}i}$$

- **بيان أنّ A هي صورة B بتشابه مباشر يُطلب تعيين عناصره المميّزة**

$$z_E - z_A = 2i(z_E - z_B) \Rightarrow \boxed{z_A - z_E = 2i(z_B - z_E)}$$

منه نستنتج أنّ A هي صورة B بتشابه مباشر مركزه E ، نسبته 2 وزاويته $\frac{\pi}{2}$

4. أ. تعيين z_I لاحقة النقطة I

$$z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{4}{2} = \boxed{2}$$

ب. $z - z_I = e^{i\alpha}$

- **التحقق أنّ النقطة E تنتمي إلى المجموعة (Γ)**

$$|z_E - z_I| = \left|\frac{14}{5} + \frac{3}{5}i - 2\right| = \left|\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i\right| = 1 \Rightarrow \boxed{E \in (\Gamma)}$$

- **تعيين طبيعة المجموعة (Γ) وعناصرها المميزة عندما يتغيّر α في $\mathbb{R}$**

$$z - z_I = e^{i\alpha} \Rightarrow |z - z_I| = 1 \Rightarrow \boxed{IM = 1}$$

منه نستنتج أنّ المجموعة (Γ) هي الدائرة التي مركزها I ونصف قطرها 1.

* * *

التمرين 55 : (بكالوريا 2016 ر)

I) 1. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - 2z + 2 = 0$

$$\Delta = -4 = (2i)^2 \ ; \ \boxed{S = \{1 + i \ ; 1 - i\}}$$

2. إيجاد العددين المركبين z_1 و z_2

$$\begin{cases} 2z_1 - 3z_2 = 5i\sqrt{2} \\ z_1 + 3z_2 = -2i\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow 3z_1 = 3i\sqrt{2} \Rightarrow \boxed{z_1 = i\sqrt{2} \ ; \ z_2 = -i\sqrt{2}}$$

II) $z_A = i\sqrt{2}$ ، $z_B = -i\sqrt{2}$ ، $z_C = 1 + i$ ، $z_D = 1 - i$ ، $z_H = \frac{z_C - z_B}{z_E - z_B}$

1. كتابة z_H على الشكل الأسّي واستنتاج نوع المثلث BEC

$$\overrightarrow{DE} = 2\overrightarrow{DO} \Rightarrow z_E - z_D = -2z_D \Rightarrow z_E = -z_D = -1 + i$$

$$z_H = \frac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = \frac{1 + \left(1 + \sqrt{2}\right)i}{-1 + \left(1 + \sqrt{2}\right)i} \Rightarrow z_H = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i = e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$\arg(z_H) = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow \left(\overrightarrow{BE}; \overrightarrow{BC}\right) = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow \boxed{\text{المثلث } BEC \text{ متساوي الساقين}}$$

2. $z' = z_A z + z_B$

أ. تعيين طبيعة التحويل S وعناصره المميّزة

$$S(M) = M' \Rightarrow z' = z_A z + z_B \Rightarrow z' = \sqrt{2}iz - \sqrt{2}i$$

$$a = \sqrt{2}i \Rightarrow |a| = \sqrt{2} \ ; \arg(a) = \frac{\pi}{2} \ ; z_w = -\frac{\sqrt{2}i}{1 - \sqrt{2}i} = \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3}i$$

منه نستنتج أنّ التحويل S تشابه مباشر مركزه $w\left(\frac{2}{3}; -\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$ ، نسبته $k = \sqrt{2}$

وزاويته $\theta = \frac{\pi}{2}$

ب. حساب مساحة الدائرة (γ) التي مركزها C ونصف قطرها CD

$$\mathcal{A}_{(\gamma)} = \pi \times CD^2 = \pi \times |z_D - z_C|^2 = \pi \times |-2i|^2 \Rightarrow \boxed{\mathcal{A}_{(\gamma)} = (4\pi) \ uA}$$

ج. تعيين (γ') صورة (γ) بالتحويل S واستنتاج مساحتها

$$S(C) = C' \Rightarrow z_{C'} = \sqrt{2}iz_C - \sqrt{2}i = \sqrt{2}i(1 + i) - \sqrt{2}i = -\sqrt{2}$$

منه نستنتج أنّ (γ') دائرة مركزها $C'\left(-\sqrt{2}; 0\right)$ ، ونصف قطرها $2\sqrt{2}$

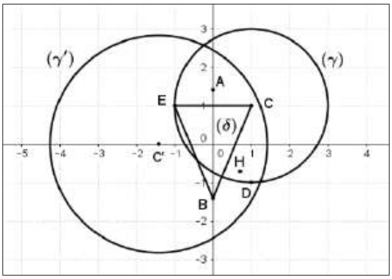
$$\mathcal{A}_{(\gamma')} = k^2 \times \mathcal{A}_{(\gamma)} = 2\mathcal{A}_{(\gamma)} \Rightarrow \boxed{\mathcal{A}_{(\gamma')} = (8\pi) \ uA}$$

3. تعيين المجموعة (δ)

$$M(z) \in (\delta) \Rightarrow \arg\left(\frac{z_B - z}{z_C - z}\right) = (2k + 1)\pi \Rightarrow \left(\overrightarrow{MC}; \overrightarrow{MB}\right) = (2k + 1)\pi$$

$$\Rightarrow M \in \,]BC[$$

منه نستنتج أنّ المجموعة (δ) هي القطعة $[BC]$ باستثناء النقطتين B و C.



* * *

التمرين 56 : (بكالوريا 2017 ع ت)

I) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $(z+2)(z^2-4z+8)=0$

$z+2=0 \Rightarrow z_0=-2$

$z^2-4z+8=0\ ;\ \Delta=-16=(4i)^2\ ; z_1=2-2i\ ; z_2=2+2i$

$\boxed{S=\{-2\ ;\ 2-2i\ ;2+2i\}}$

II) $z_A=2-2i$ ، $z_B=\overline{z_A}$ ، $z_C=-2$.

1. كتابة z_A و z_B على الشكل الأسّي

$$\begin{cases} |z_A|=2\sqrt{2} \\ \arg(z_A)=-\dfrac{\pi}{4}+2k\pi \end{cases} \Rightarrow \boxed{z_A=2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\ ;\ z_B=\bar{z_A}=2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}$$

2. تعيين z_D لاحقة النقطة D حتى تكون B مركز ثقل المثلث ACD

$$B\{(A;1),(C;1),(D;1)\} \Rightarrow z_B=\frac{z_A+z_C+z_D}{3} \Rightarrow z_D=3z_B-z_A-z_C$$

$$=3(2+2i)-2+2i+2=\boxed{6+8i}$$

3. التحقق أنّ مبدأ المعلم O هو نقطة من (Γ)

$$\arg\left(\frac{z_B-z_O}{z_A-z_O}\right)=\arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right)=\arg\left(\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{e^{-i\frac{\pi}{4}}}\right)=\arg\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{O\in(\Gamma)}$$

تعيين طبيعة المجموعة (Γ) وإنشائها

$$M\in(\Gamma) \Rightarrow \arg\left(\frac{z_B-z}{z_A-z}\right)=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{\left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}\right)=\frac{\pi}{2}}$$

منه نستنتج أنّ المجموعة (Γ) هي نصف الدائرة التي قطرها $[AB]$ وتشمل النقطة O باستثناء النقطتين A و B

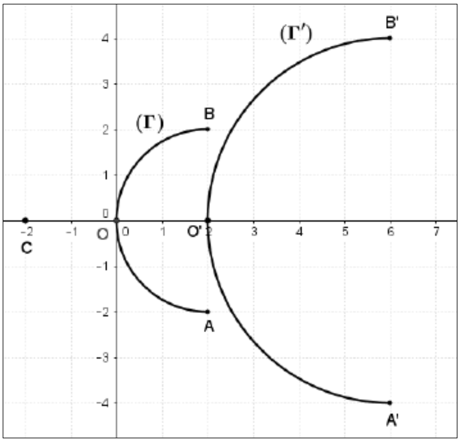
4. تعيين طبيعة المجموعة (Γ') مع تحديد عناصرها المميزة

$h(M)=M' \Rightarrow z'-z_C=2(z-z_C) \Rightarrow z'=2z-z_C=2z+2$

$h(A)=A' \Rightarrow z_{A'}=2z_A+2=\boxed{6-4i}$

$$h(B) = B' \Rightarrow z_{B'} = 2z_B + 2 = \boxed{6+4i}$$
$$h(O) = O' \Rightarrow z_{O'} = 2z_O + 2 = \boxed{2}$$

منه نستنتج أنّ المجموعة (Γ') هي نصف الدائرة التي قطرها $[A'B']$ وتشمل النقطة O' باستثناء النقطتين A' و B'.



التمرين 57 : (بكالوريا 2017 ع ت)

1. مجموعة حلول المعادلة $\left(\frac{z+1-i}{z-i}\right)^2 = 1$ في $\mathbb{C}$ هي $S = \left\{-\frac{1}{2}+i\right\}$: صحيح

$$\left(\frac{z+1-i}{z-i}\right)^2 = 1 \Rightarrow \frac{z+1-i}{z-i} = -1 \text{ أو } \frac{z+1-i}{z-i} = 1$$
$$\frac{z+1-i}{z-i} = -1 \Rightarrow z+1-i = -z+i \Rightarrow 2z = -1+2i \Rightarrow z = -\frac{1}{2}+i$$
$$\frac{z+1-i}{z-i} = 1 \Rightarrow z+1-i = z-i \Rightarrow 1 = 0 \ (\text{مستحيل})$$

2. من أجل كل عدد مركّب z ، $(z+2)\times(\bar{z}+2) = |z+2|^2$: صحيح

$$(z+2)\times(\bar{z}+2) = (z+2)\times(\overline{z+2}) = |z+2|^2 \ ; (z.\bar{z} = |z|^2)$$

3. من أجل كل عدد طبيعي n ، $\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{3n} = 1$: خطأ

$$\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{3n} = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{3n} = e^{in\pi} = \boxed{\begin{cases}-1, & \text{من أجل } n \text{ فردي}\\ 1, & \text{من أجل } n \text{ زوجي}\end{cases}}$$

4. S التشابه المباشر الذي مركزه النقطة Ω ذات اللاحقة 1 ونسبته 3 وزاويته $\frac{\pi}{2}$

صورة الدائرة (C) ذات المركز $\omega(0;1)$ ونصف القطر 3 بالتشابه S هي الدائرة (C') ذات المركز $\omega'(-2;-3)$ ونصف القطر 9 : صحيح

$$S(M) = M' \Rightarrow z' - 1 = 3i(z-1) \Rightarrow \boxed{z' = 3iz + 1 - 3i}$$

$$3iz_{\omega} + 1 - 3i = 3i(i) + 1 - 3i = -2 - 3i = z_{\omega'}\,; r' = kr = 3 \times 3 = 9$$

5. من أجل كل عدد حقيقي $\boldsymbol{\alpha}$:

إذا كان $\boldsymbol{z = (\sin\alpha + i\cos\alpha) \times (\cos\alpha - i\sin\alpha)}$

فإنّ $\boldsymbol{\arg(z) = \frac{\pi}{2} - 2\alpha + 2k\pi}$: صحيح

$$z = (\sin\alpha + i\cos\alpha) \times (\cos\alpha - i\sin\alpha)$$

$$z = \left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right] \times [\cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha)]$$

$$z = e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} \times e^{-i\alpha} = e^{i\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right)} \Rightarrow \boxed{\arg(z) = \frac{\pi}{2} - 2\alpha + 2k\pi}$$

* * *

التمرين 58 : (بكالوريا 2017 ت ر)

$\boldsymbol{z_A = -1}$ ، $\boldsymbol{z_B = 2 + i}$ و $\boldsymbol{z_C = -i}$

1. كتابة $\boldsymbol{\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}}$ على الشكل الأسّي

$$\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} = \frac{-1 + i}{2 + 2i} = \frac{(-1 + i)(2 - 2i)}{8} = \frac{1}{2}i = \boxed{\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}}$$

استنتاج طبيعة المثلث $\boldsymbol{ABC}$

$$\arg\left(\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}\right) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \left(\overrightarrow{CB}; \overrightarrow{CA}\right) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{\text{المثلث } ABC \text{ قائم في } C}$$

2. تعيين العبارة المركّبة للتشابه $\boldsymbol{S}$ الذي مركزه $\boldsymbol{C}$ ويحوّل $\boldsymbol{B}$ إلى $\boldsymbol{A}$

$$\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} = \frac{1}{2}i \Rightarrow z_A - z_C = \frac{1}{2}i(z_B - z_C) \Rightarrow a = \frac{1}{2}i$$

$$b = (1 - a)z_C = -i\left(1 - \frac{1}{2}i\right) = -\frac{1}{2} - i \Rightarrow \boxed{z' = \frac{1}{2}iz - \frac{1}{2} - i}$$

3.

أ. حساب $\boldsymbol{z_D}$ لاحقة $\boldsymbol{D}$ والتحقق أنّ $\boldsymbol{z_E = 1 - 2i}$

$$C \text{ منتصف } [BD] \Rightarrow \frac{z_B + z_D}{2} = z_C \Rightarrow z_D = 2z_C - z_B = \boxed{-2 - 3i}$$

$$S(D) = E \Rightarrow z_E = \frac{1}{2}iz_D - \frac{1}{2} - i = \frac{1}{2}i(-2 - 3i) - \frac{1}{2} - i = \boxed{1 - 2i}$$

ب. تحديد طبيعة الرباعي $\boldsymbol{ADEB}$

$$\frac{z_A + z_E}{2} = \frac{-2i}{2} = -i = z_C$$

القطران $[BD]$ و$[AE]$ يتناصفان في النقطة C والمثلث ABC قائم في C
منه نستنتج أنّ الرباعي $ADEB$ معيّن.

4. التحقق أنّ النقطة C تنتمي إلى (Γ)

$$\arg\left(\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_C - z_B}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

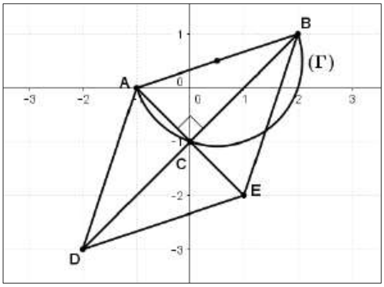
$$\Rightarrow \arg(z_C - z_A) - \arg(z_C - z_B) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow \boxed{C \in (\Gamma)}$$

تحديد طبيعة المجموعة (Γ) وإنشائها

$$M \in (\Gamma) \Rightarrow \arg(z - z_A) - \arg(z - z_B) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\Rightarrow \arg\left(\frac{z - z_A}{z - z_B}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow \boxed{\left(\overrightarrow{BM}; \overrightarrow{AM}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi}$$

منه نستنتج أنّ المجموعة (Γ) هي نصف الدائرة التي قطرها $[AB]$ وتشمل C باستثناء النقطتين A و B.



* * *

التمرين 59 : (بكالوريا 2017 ت ر)

$z_A = 1 + i$ ، $z_B = \overline{z_A}$ ، $z_C = \frac{1}{2}(1 - i)$ و $z_D = \overline{z_C}$

1. أ. كتابة z_A و z_C على الشكل الأسّي

$$z_A = 1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \boxed{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}$$

$$z_C = \frac{1}{2}(1 - i) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}$$

استنتاج الشكل الأسّي للعددين z_B و z_D

$$z_B = \bar{z_A} \Rightarrow \boxed{z_B = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}\,;\ z_D = \overline{z_C} \Rightarrow \boxed{z_D = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}$$

ب. تعيين قيم العدد الطبيعي n التي تحقق: $(z_A)^n = (z_B)^n$

$$(z_A)^n = (z_B)^n \Rightarrow \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^n = \left(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^n \Rightarrow e^{i\frac{n\pi}{4}} = e^{-i\frac{n\pi}{4}}$$

$$\Rightarrow \frac{n\pi}{4} = -\frac{n\pi}{4} + 2k\pi \Rightarrow \frac{n\pi}{2} = 2k\pi \Rightarrow \boxed{n = 4k\,;k \in \mathbb{N}}$$

2. أ. إيجاد نسبة ومركز التحاكي h الذي يحوّل D إلى A ويحوّل C إلى B

$$\begin{cases} h(D) = A \\ h(C) = B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_A = az_D + b \\ z_B = az_C + b \end{cases} \Rightarrow a = \frac{z_A - z_B}{z_D - z_C} = \frac{2i}{i} = 2 \Rightarrow \boxed{k = 2}$$

$$b = z_A - az_D = 1 + i - 2\left[\frac{1}{2}(1+i)\right] = 0\ ;\ z_\omega = \frac{b}{1-a} \Rightarrow \boxed{z_\omega = 0}$$

نستنتج أنّ التحاكي h مركزه O ونسبته 2

ب. حساب طويلة $\frac{z_C - z_B}{z_D - z_A}$ واستنتاج طبيعة الرباعي $ADCB$

$$\left|\frac{z_C - z_B}{z_D - z_A}\right| = \left|\frac{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i}{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i}\right| = \left|\frac{-1+i}{-1-i}\right| = \left|\frac{(-1+i)^2}{2}\right| = |-i| = \boxed{1}$$

$$\begin{cases} h(D) = A \\ h(C) = B \\ \left|\frac{z_C - z_B}{z_D - z_A}\right| = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AB = 2CD \\ (AB) \parallel (CD) \\ AD = BC \end{cases} \Rightarrow \boxed{\text{الرباعي } ADCB \text{ شبه منحرف متساوي الساقين}}$$

3. إيجاد z_G لاحقة النقطة G مرجح الجملة $\{(A,2);(B,2);(C,-1);(D,-1)\}$

$$z_G = \frac{2z_A + 2z_B - z_C - z_D}{2} = \frac{2(z_A + z_B) - (z_C + z_D)}{2} = \frac{4-1}{2} = \boxed{\frac{3}{2}}$$

4. بيان أنّ A نقطة من (Γ)

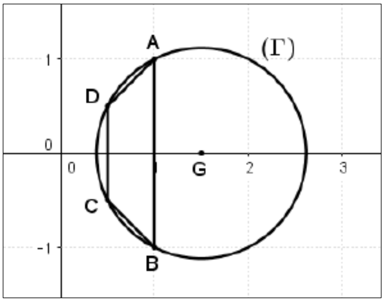
$$\left\|2\overrightarrow{AA} + 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}\right\| = |2(z_B - z_A) - z_C + z_A - z_D + z_A|$$
$$= |2z_B - z_C - z_D| = |1 - 2i| = \sqrt{5} \Rightarrow \boxed{A \in (\Gamma)}$$

تحديد طبيعة المجموعة (Γ) وعناصرها المميزة وإنشائها

$$M \in (\Gamma) \Rightarrow \left\|2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}\right\| = \sqrt{5} \Rightarrow \left\|2\overrightarrow{MG}\right\| = \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \boxed{\left\|\overrightarrow{MG}\right\| = \frac{\sqrt{5}}{2}}$$

منه نستنتج أنّ المجموعة (Γ) هي الدائرة التي مركزها G ونصف قطرها $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (تشمل A)



* * *

التمرين 60 : (بكالوريا 2017 ر)

1. **حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $(z-2+2i)\left(z^2-2\sqrt{2}z+8\right)=0$**

$$z-2+2i=0 \Rightarrow z_0=2-2i$$

$$z^2-2\sqrt{2}z+8=0;\Delta=-24=\left(2\sqrt{6}i\right)^2;z_1=\sqrt{2}+i\sqrt{6};z_2=\sqrt{2}-i\sqrt{6}$$

$$\boxed{S=\left\{2-2i\,;\sqrt{2}+i\sqrt{6}\,;\ \sqrt{2}-i\sqrt{6}\right\}}$$

2. **$z_A=\sqrt{2}+i\sqrt{6}$ ، $z_B=\overline{z_A}$ ، $z_C=2(1-i)$**

ب. كتابة z_A ، z_B وz_C على الشكل الأسّي

$$z_A=\sqrt{2}+i\sqrt{6}=2\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\boxed{2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}};\ z_B=\bar{z}_A=\boxed{2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}}$$

$$z_C=2(1-i)=2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=\boxed{2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}$$

استنتاج أنّ النقط B,A وC تنتمي إلى دائرة (Ω) يُطلب تعيين مركزها ونصف قطرها

$$|z_A|=|z_B|=|z_C|=2\sqrt{2} \Rightarrow \boxed{OA=OB=OC=2\sqrt{2}}$$

منه نستنتج أنّ النقط B,A وC تنتمي إلى الدائرة (Ω) التي مركزها O ونصف قطرها $2\sqrt{2}$

ج. تعيين قيّم n التي يكون من أجلها العدد المركّب $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n$ تخيليا صرفا

$\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n$ تخيلي صرف $\Rightarrow \arg\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n=\frac{\pi}{2}+k\pi \Rightarrow \arg\left(e^{i\frac{7\pi}{12}}\right)^n=\frac{\pi}{2}+k\pi$

$$\Rightarrow \frac{7n\pi}{12}=\frac{\pi}{2}+k\pi \Rightarrow \frac{7n}{12}=\frac{2k+1}{2} \Rightarrow 7n=12k+6 \Rightarrow 7n\equiv 6[12]$$

$$\Rightarrow n\equiv 6[12] \Rightarrow \boxed{n=12\alpha+6\,;\ \alpha\in\mathbb{N}}$$

د. التحقق أنّ النقطة C تنتمي إلى (Γ)

$$z_C=z_C-k\left(\frac{z_A}{z_B}\right) \Rightarrow k\left(\frac{z_A}{z_B}\right)=0 \Rightarrow k=0 \Rightarrow \boxed{C\in(\Gamma)}$$

تعيين وإنشاء المجموعة (Γ)

$$M\in(\Gamma) \Rightarrow z=z_C-k\left(\frac{z_A}{z_B}\right) \Rightarrow z-z_C=-k\left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)=ke^{i\left(\pi+\frac{2\pi}{3}\right)}$$

$$\Rightarrow \arg(z-z_C)=\frac{5\pi}{3}+2k'\pi \Rightarrow \boxed{\left(\vec{u};\overrightarrow{CM}\right)=\frac{5\pi}{3}+2k'\pi}$$

منه نستنتج أنّ المجموعة (Γ) هي نصف المستقيم الذي مبدؤه C وميله $\tan\left(\frac{5\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

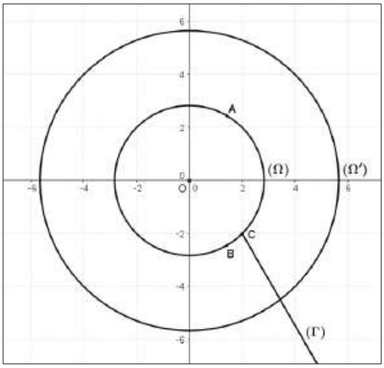
3. تعيين طبيعة التحويل hor وعناصره المميّزة

$$\boxed{h_{(O;-2)}\ o\ r_{\left(O;\frac{2\pi}{3}\right)}=S_{\left(O;2;\frac{5\pi}{3}\right)}}$$

بما أنّ نسبة التحاكي سالبة ، فإنّ التحويل hor هو تشابه مباشر مركزه O ، نسبته $k=|-2|=2$ وزاويته $\theta=\pi+\frac{2\pi}{3}=\frac{5\pi}{3}$.

استنتاج صورة الدائرة (Ω) بالتحويل hor

صورة الدائرة (Ω) هي الدائرة $(\Omega’)$ التي مركزها O ونصف قطرها $4\sqrt{2}$



* * *

التمرين 61 : (بكالوريا 2017 ر)

I) كتابة العدد المركّب $\left(\frac{5}{2}+i\right)^2$ على الشكل الجبري

$$\left(\frac{5}{2}+i\right)^2=\frac{25}{4}-1+5i=\boxed{\frac{21}{4}+5i}$$

استنتاج الجذرين التربيعيين للعدد المركّب : $\frac{21}{4}+5i$

$$z^2=\frac{21}{4}+5i=\left(\frac{5}{2}+i\right)^2\Rightarrow\boxed{z_1=\frac{5}{2}+i\,;z_2=-\frac{5}{2}-i}$$

II) $z_A=\frac{3}{2}+\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ ، $z_B=-\frac{3}{2}i$ ، $z_C=-\overline{z_A}$ ، $z_I=i$

1. كتابة z_A و z_C على الشكل الجبري

$$z_A=\frac{3}{2}+\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}=\frac{3}{2}+\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=\boxed{\frac{5}{2}+i}$$

$$z_C=-\overline{z_A}=-\left(\frac{5}{2}-i\right)=\boxed{-\frac{5}{2}+i}$$

2. كتابة $\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}$ على الشكل الأسّي

$$\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}=\frac{-\frac{5}{2}+\frac{5}{2}i}{\frac{5}{2}+\frac{5}{2}i}=\frac{-1+i}{1+i}=\frac{-(1-i)^2}{2}=\frac{2i}{2}=i=\boxed{e^{i\frac{\pi}{2}}}$$

استنتاج طبيعة المثلث ABC

$$\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}=e^{i\frac{\pi}{2}}\Rightarrow\begin{cases}BA=BC\\(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC})=\frac{\pi}{2}\end{cases}\Rightarrow$$

المثلث ABC قائم في B ومتساوي الساقين

3. أ. كتابة العبارة المركّبة للتشابه المباشر S وتعيين نسبته وزاويته

$$S(A)=I\Rightarrow z_I-z_B=a(z_A-z_B)\Rightarrow a=\frac{z_I-z_B}{z_A-z_B}=\frac{\frac{5}{2}i}{\frac{5}{2}+\frac{5}{2}i}=\frac{i}{1+i}$$

$$=\frac{i(1-i)}{2}=\boxed{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i}$$

$$b=z_B(1-a)=-\frac{3}{2}i\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)=\boxed{-\frac{3}{4}-\frac{3}{4}i}$$

$$S(M)=M'\Rightarrow\boxed{z'=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)z-\frac{3}{4}-\frac{3}{4}i}$$

$$a=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i=\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}$$

منه نستنتج أنّ التشابه المباشر S نسبته $\frac{\sqrt{2}}{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{4}$

ب. تعيين قيم n حتى يكون T_n تحاكيا

$$T_n=\underbrace{SoSo\dots oS}_{n\text{ مرّة}}=S_{\left[B;\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n;\frac{n\pi}{4}\right]}$$

T_n هو تشابه مباشر مركزه B نسبته $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$ وزاويته $\frac{n\pi}{4}$ ويكون T_n تحاكيا لمّا $\frac{n\pi}{4}=k\pi$ أي $n=4k$ حيث $k\in\mathbb{N}$.

تعيين عناصره المميّزة

T_n هو تحاكي مركزه B ونسبته $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$ ، أي أنّه :

- من أجل k فردي : $\frac{n\pi}{4}\equiv\pi[2\pi]$ ونسبة T_n هي $-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$
- من أجل k زوجي : $\frac{n\pi}{4}\equiv 0[2\pi]$ ونسبة T_n هي $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$

* * *

التمرين 62: (بكالوريا 2017 ع ت الدورة الاستثنائية)

I) حل في مجموعة الأعداد المركّبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(z-2)(z^2+2z+4)=0$

$$z-2=0 \Rightarrow z_0=2$$

$$z^2+2z+4=0; \Delta=-12=\left(2\sqrt{3}i\right)^2; z_1=-1+i\sqrt{3}; z_2=-1-i\sqrt{3}$$

$$\boxed{S=\left\{2\,; -1+i\sqrt{3}\,;\ -1-i\sqrt{3}\right\}}$$

II) $z_A=2$ ، $z_B=-1+i\sqrt{3}$ ، $z_C=\overline{z_B}$.

1. أ. كتابة العدد z_B على الشكل الأسّي واستنتاج الشكل الأسّي للعدد المركّب z_C

$$z_B=-1+i\sqrt{3}=2\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\boxed{2e^{i\frac{2\pi}{3}}};\ z_C=\overline{z_B}=\boxed{2e^{-i\frac{2\pi}{3}}}$$

ب. تعيين مركز ونصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث ABC

$$|z_A|=|z_B|=|z_C|=2 \Rightarrow \boxed{OA=OB=OC=2}$$

منه نستنتج أنّ النقطة O هي مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC ونصف قطرها 2

إنشاء النقط C,B,A : (انظر الشكل في نهاية التمرين)

2. S التشابه المباشر الذي مركزه النقطة O ونسبته $\frac{1}{2}$ وزاويته $\frac{2\pi}{3}$

أ. كتابة العبارة المركّبة للتشابه S

$$S(M)=M' \Rightarrow z'=\frac{1}{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}z=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z=\boxed{\left(-\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i\right)z}$$

تعيين لاحقة كل من A' ، B' و C' صور النقط A ، B و C على الترتيب بالتشابه S

$$z_{A'}=\left(-\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i\right)z_A=2\left(-\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i\right)=\boxed{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

$$z_{B'}=\left(-\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i\right)z_B=\left(-\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i\right)\left(-1+i\sqrt{3}\right)=\boxed{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

$$z_{C'}=\left(-\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i\right)z_C=\left(-\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i\right)\left(-1-i\sqrt{3}\right)=\boxed{1}$$

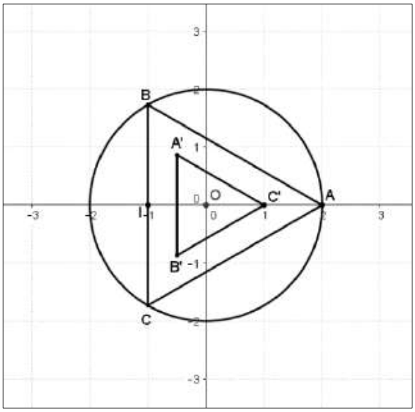
ب. حساب مساحة المثلث $A'B'C'$ بالسنتيمتر المربع

لتكن I منتصف القطعة $[BC]$. لدينا : $z_I=\frac{z_B+z_C}{2}=-1$

$$\mathcal{A}_{ABC}=\frac{AI\times BC}{2}=\frac{|z_I-z_A|\times|z_C-z_B|}{2}=\frac{|-3|\times\left|-2i\sqrt{3}\right|}{2}=3\sqrt{3}\,ua$$

وبما أنّ المثلث $A'B'C'$ هو صورة المثلث ABC بالتشابه S نستنتج أنّ :

$$\mathcal{A}_{A'B'C'}=\left(\frac{1}{2}\right)^2\mathcal{A}_{ABC}=\frac{3\sqrt{3}}{4}ua=\frac{3\sqrt{3}}{4}(4)cm^2=\boxed{3\sqrt{3}\ cm^2}$$



* * *

التمرين 63 : (بكالوريا 2017 ع ت الدورة الاستثنائية)

$z_A=-3-2i$ ، $z_B=1+i$ و $z_C=4-3i$

1. **تعيين النسبة وزاوية للتشابه S ذي المركز A والذي يحوّل النقطة B إلى النقطة C**

$$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{7-i}{4+3i}=1-i=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=\boxed{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}$$

منه نستنتج أنّ نسبة التشابه المباشر $\sqrt{2}$ وزاويته $-\frac{\pi}{4}$

2. **كتابة العدد المركّب $\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}$ على الشكل الأسّي**

$$\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}=\frac{-4-3i}{3-4i}=\frac{(-4-3i)(3+4i)}{25}=\frac{-25i}{25}=-i=\boxed{e^{-i\frac{\pi}{2}}}$$

استنتاج طبيعة المثلث ABC

$$\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}=e^{-i\frac{\pi}{2}}\Rightarrow\begin{cases}BA=BC\\(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA})=-\frac{\pi}{2}\end{cases}\Rightarrow\boxed{\text{المثلث } ABC \text{ قائم في } B \text{ ومتساوي الساقين}}$$

3. **نرمز بـ G إلى مركز المثلث ABC وبـ I إلى منتصف القطعة $[AC]$**

تعيين z_G و z_I

$$G\{(A;1),(B;1),(C;1)\}\Rightarrow z_G=\frac{z_A+z_B+z_C}{3}=\frac{2-4i}{3}=\boxed{\frac{2}{3}-\frac{4}{3}i}$$

$$z_I=\frac{z_A+z_C}{2}=\frac{1-5i}{2}=\boxed{\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i}$$

بيان أنّ النقط B ، G و I في استقامية

$$\begin{cases} z_G - z_B = \frac{2}{3} - \frac{4}{3}i - 1 - i = -\frac{1}{3} - \frac{7}{3}i \\ z_I - z_B = \frac{1}{2} - \frac{5}{2}i - 1 - i = -\frac{1}{2} - \frac{7}{2}i \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BI} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{BG} \parallel \overrightarrow{BI}}$$

منه نستنتج أنّ النقط B ، G و I في استقامية.

ملاحظة: يمكن بيان استقامية النقط B ، G و I بحساب العدد $\frac{z_{①} - z_{②}}{z_{③} - z_{②}}$ وبيان أنّه حقيقي ، حيث تمثل الأرقام ① ، ② و③ النقط B ، G و I (لا يهمّ الترتيب).

ويمكن أيضا استعمال خاصية مركز ثقل المثلث الذي هو نقطة تلاقي المتوسطات ، حيث أنّ (BI) متوسط متعلق بالضلع $[AC]$ و $G \in (BI)$ حيث : $\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BI}$

4. تحديد طبيعة الرباعي $ABCD$

لدينا القطرين $[BD]$ و $[AC]$ متناصفين في I وبالتالي الرباعي $ABCD$ متوازي الأضلاع ، وبما أنّ المثلث ABC قائم في B ومتساوي الساقين نستنتج أنّ الرباعي $ABCD$ مربّع

5. نعتبر (Γ) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق: $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\| = 5\sqrt{2}$

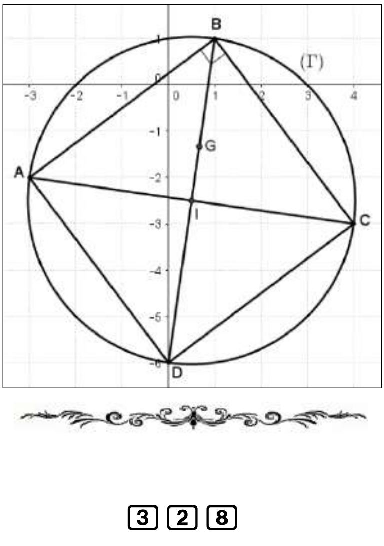
أ. التحقّق أنّ النقطة C تنتمي إلى (Γ)

$$\|\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CC}\| = \|\overrightarrow{CA}\| = |z_A - z_C| = |-7 + i| = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \Rightarrow \boxed{C \in (\Gamma)}$$

ب. تعيين طبيعة المجموعة (Γ) وإنشائها

$$M \in (\Gamma) \Rightarrow \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\| = 5\sqrt{2} \Rightarrow \|2\overrightarrow{MI}\| = 5\sqrt{2} \Rightarrow \boxed{\|\overrightarrow{MI}\| = \frac{5}{2}\sqrt{2}}$$

منه نستنتج أنّ المجموعة (Γ) هي الدائرة التي مركزها I ونصف قطرها $\frac{5}{2}\sqrt{2}$ وهي الدائرة المحيطة بالمربّع $ABCD$ الذي مركزه I.



* * *

التمرين 64 : (بكالوريا 2017 ت ر الدورة الاستثنائية)

I) حل في مجموعة الأعداد المركّبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $0 = (z^2 - 2z + 4)(z - 4)$

$$z - 4 = 0 \Rightarrow z_0 = 4$$

$$z^2 - 2z + 4 = 0; \Delta = -12 = \left(2\sqrt{3}i\right)^2; z_1 = 1 + i\sqrt{3}; z_2 = 1 - i\sqrt{3}$$

$$\boxed{S = \left\{4\,; 1 + i\sqrt{3}\,;\ 1 - i\sqrt{3}\right\}}$$

II) $z_A = 4$ ، $z_B = 1 + i\sqrt{3}$ ، $z_C = 1 - i\sqrt{3}$.

1. كتابة العدد المركّب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل الأسّي

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{-3 - i\sqrt{3}}{-3 + i\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} + i}{\sqrt{3} - i} = \frac{\left(\sqrt{3} + i\right)^2}{4} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \boxed{e^{i\frac{\pi}{3}}}$$

استنتاج طبيعة المثلث ABC

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}} \Rightarrow \begin{cases} AB = AC \\ \left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\text{المثلث } ABC \text{ متقايس الأضلاع}}$$

2. أ. تعيين لاحقة D صورة B بالدوران r الذي مركزه O وزاويته $\frac{2\pi}{3}$

$$D = r(B) \Rightarrow z_D = e^{i\frac{2\pi}{3}} z_B = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(1 + i\sqrt{3}\right) = \boxed{-2}$$

ب. تعيين طبيعة الرباعي $ABDC$

$$\begin{cases} z_B - z_A = -3 + i\sqrt{3} \\ z_D - z_C = -3 + i\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow \text{الرباعي } ABDC \text{ متوازي الأضلاع}$$

وبما أنّ المثلث ABC متقايس الأضلاع نستنتج أن الرباعي $ABDC$ معيّن

3. $z_n = (z_B)^n + (z_C)^n$

أ. بيان أنّ من أجل كل عدد طبيعي n ، $z_n = 2^{n+1} \times \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$

$$z_B = 1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}\,;\ z_C = \overline{z_B} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

$$z_n = (z_B)^n + (z_C)^n = \left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^n + \left(2e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^n = 2^n e^{i\frac{n\pi}{3}} + 2^n e^{-i\frac{n\pi}{3}}$$

$$= 2^n \left[\cos\frac{n\pi}{3} + i\sin\frac{n\pi}{3} + \cos\left(-\frac{n\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{n\pi}{3}\right)\right]$$

$$= 2^n \left[\cos\frac{n\pi}{3} + i\sin\frac{n\pi}{3} + \cos\frac{n\pi}{3} - i\sin\frac{n\pi}{3}\right]$$

$$= 2^n \times 2\cos\frac{n\pi}{3} = \boxed{2^{n+1} \times \cos\frac{n\pi}{3}}$$

ب. كتابة t_n بدلالة n

$$t_n = z_{6n} = 2^{6n+1} \times \cos\frac{6n\pi}{3} = 2^{6n+1} \times \cos 2n\pi = \boxed{2^{6n+1}}$$

حساب P_n بدلالة n

$$P_n = t_0 \times t_1 \times \ldots \times t_n = 2 \times 2^7 \times 2^{13} \times 2^{6n+1} = 2^{1+7+13+\cdots+6n+1}$$
$$= 2^{\frac{n+1}{2}(1+6n+1)} = 2^{\frac{(n+1)(6n+2)}{2}} = \boxed{2^{(n+1)(3n+1)}}$$

* * *

التمرين 65 : (بكالوريا 2017 ت ر الدورة الاستثنائية)

I) حل في مجموعة الأعداد المركّبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $\left(z + 1 - \sqrt{3}\right)\left(z^2 + 2z + 4\right) = 0$

$$z + 1 - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow z_0 = -1 + \sqrt{3}$$

$$z^2 + 2z + 4 = 0; \Delta = -12 = \left(2\sqrt{3}i\right)^2; z_1 = -1 + i\sqrt{3}; z_2 = -1 - i\sqrt{3}$$

$$\boxed{S = \left\{-1 + \sqrt{3}\,; -1 + i\sqrt{3}\,;\ -1 - i\sqrt{3}\right\}}$$

II) $z_A = -1 + \sqrt{3}$ ، $z_B = -1 - i\sqrt{3}$ ، $z_C = \overline{z_B}$.

4. بيان أنّ $z_B - z_A = i(z_C - z_A)$

$$\begin{cases} z_B - z_A = -1 - i\sqrt{3} + 1 - \sqrt{3} = -\sqrt{3} - i\sqrt{3} \\ i(z_C - z_A) = i\left(i\sqrt{3} - \sqrt{3}\right) = -\sqrt{3} - i\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \boxed{z_B - z_A = i(z_C - z_A)}$$

استنتاج طبيعة المثلث ABC وحساب مساحته

$$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = i \Rightarrow \begin{cases} AB = AC \\ \left(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB}\right) = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\text{المثلث } ABC \text{ قائم في } A \text{ ومتساوي الساقين}}$$

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{AB \times AC}{2} = \frac{|z_B - z_A| \times |z_C - z_A|}{2} = \frac{\left|-\sqrt{3} - i\sqrt{3}\right|\left|-\sqrt{3} + i\sqrt{3}\right|}{2}$$
$$= \boxed{3\,ua}$$

5. أ. كتابة العدد L على الشكل الجبري

$$L = \frac{z_C - z_A}{z_C} = \frac{-\sqrt{3} + i\sqrt{3}}{-1 + i\sqrt{3}} = \boxed{\frac{3 + \sqrt{3}}{4} + \frac{3 - \sqrt{3}}{4}i}$$

ب. بيان أنّ $L = \frac{\sqrt{6}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$

$$L = \frac{z_C - z_A}{z_C} = \frac{-\sqrt{3} + i\sqrt{3}}{-1 + i\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)}{2\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)} = \frac{\sqrt{6}e^{i\frac{3\pi}{4}}}{2e^{i\frac{2\pi}{3}}} = \frac{\sqrt{6}}{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$$

$$= \boxed{\frac{\sqrt{6}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)}$$

استنتاج القيمة المضبوطة لـ $\tan\frac{\pi}{12}$

$$\tan\frac{\pi}{12}=\frac{\sin\frac{\pi}{12}}{\cos\frac{\pi}{12}}=\frac{\frac{\frac{3-\sqrt{3}}{4}}{\frac{\sqrt{6}}{2}}}{\frac{\frac{3+\sqrt{3}}{4}}{\frac{\sqrt{6}}{2}}}=\frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{2}=\boxed{2-\sqrt{3}}$$

$$\left(L=x+iy=re^{i\frac{\pi}{12}}\Rightarrow\tan\frac{\pi}{12}=\frac{\sin\frac{\pi}{12}}{\cos\frac{\pi}{12}}=\frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}}=\frac{y}{x}\right)$$

.6 $z'=(z-z_B)L+z_B$

بيان أنّ S تشابه مباشر يُطلب تعيين عناصره المميزة

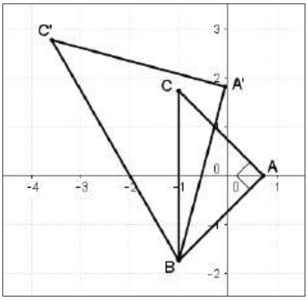
$$z'=(z-z_B)L+z_B\Rightarrow\boxed{z'-z_B=\frac{\sqrt{6}}{2}e^{i\frac{\pi}{12}}(z-z_B)}$$

منه نستنتج أنّ S تشابه مباشر مركزه B ، نسبته $\frac{\sqrt{6}}{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{12}$

.7 حساب مساحة المثلث $A'B'C'$

SoS تشابه مباشر مركزه B ، نسبته $\frac{3}{2}=\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2$ وزاويته $\frac{\pi}{6}$ ، وبما أنّ النقط A' ، B' و C' صور النقط A ، B و C على الترتيب بالتحويل SoS ، نستنتج أنّ :

$$\mathcal{A}_{A'B'C'}=\left(\frac{3}{2}\right)^2\mathcal{A}_{ABC}=3\left(\frac{9}{4}\right)=\boxed{\frac{27}{4}ua}$$



* * *

التمرين 66 : (بكالوريا 2017 ر الدورة الاستثنائية)

I) حل في مجموعة الأعداد المركّبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $2z^2-10z+\frac{29}{2}=0$

$\Delta=100-116=-16=(4i)^2\,;z_1=\frac{5}{2}+i\,;z_2=\frac{5}{2}-i$

$$\boxed{S=\left\{\frac{5}{2}+i\,;\frac{5}{2}-i\right\}}$$

(II $z_A=\frac{3}{2}+\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ ، $z_B=\frac{3}{2}e^{-i\frac{\pi}{2}}$ ، $z_C=-\overline{z_A}$ و $z_D=i$.

1. أ. كتابة العددين z_A وz_B على الشكل الجبري

$$z_A=\frac{3}{2}+\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}=\frac{3}{2}+\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=\boxed{\frac{5}{2}+i}$$

$$z_B=\frac{3}{2}e^{-i\frac{\pi}{2}}=\boxed{-\frac{3}{2}i}$$

ب. كتابة العدد المركّب $\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}$ على الشكل الأسّي

$$\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}=\frac{\frac{5}{2}+\frac{5}{2}i}{-\frac{5}{2}+\frac{5}{2}i}=\frac{1+i}{-1+i}=\frac{-(1+i)^2}{2}=\frac{-2i}{2}=-i=\boxed{e^{-i\frac{\pi}{2}}}$$

استنتاج طبيعة المثلث ABC

$$\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}=e^{-i\frac{\pi}{2}}\Rightarrow\begin{cases}BC=BA\\(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA})=-\frac{\pi}{2}\end{cases}\Rightarrow\boxed{\text{المثلث } ABC \text{ قائم في } B \text{ ومتساوي الساقين}}$$

2. تعيين لاحقة النقطة E نظيرة B بالنسبة إلى D

D منتصف $[BE]\Rightarrow z_D=\frac{z_B+z_E}{2}\Rightarrow z_E=2z_D-z_B=2i+\frac{3}{2}i=\boxed{\frac{7}{2}i}$

استنتاج طبيعة الرباعي $ABCE$

$z_A+z_C=2i=2z_D\Rightarrow$ D منتصف $[AC]$

القطران $[AC]$ و$[BE]$ يتناصفان في النقطة D والمثلث ABC قائم في B ومتساوي الساقين منه نستنتج أنّ الرباعي $ABCE$ مربّع.

3. كتابة العبارة المركّبة للتشابه المباشر S وتحديد نسبته وزاويته

$$S(A)=D\Rightarrow\begin{cases}z_D=az_A+b\\z_B=az_B+b\end{cases}\Rightarrow a=\frac{z_D-z_B}{z_A-z_B}=\frac{\frac{5}{2}i}{\frac{5}{2}+\frac{5}{2}i}=\frac{i}{1+i}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$$

$$b=z_B(1-a)=-\frac{3}{2}i\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)=\frac{3}{4}-\frac{3}{4}i\Rightarrow\boxed{z'=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)z+\frac{3}{4}-\frac{3}{4}i}$$

$$a=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i=\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}$$

منه نستنتج أنّ S تشابه مباشر نسبته $\frac{\sqrt{2}}{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{4}$

4. $A_0 = A$ و $A_{n+1} = S(A_n)$

أ. برهان بالتراجع أنّ: $z_n - z_B = 5\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1} e^{i\frac{\pi}{4}(n+1)}$

تحقيق التراجع : $z_0 - z_B = 5\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{1} e^{i\frac{\pi}{4}}$ محققة لأنّ :

$$z_0 - z_B = z_A - z_B = \boxed{\frac{5}{2} + \frac{5}{2}i}$$

$$5\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)e^{i\frac{\pi}{4}} = 5\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \boxed{\frac{5}{2} + \frac{5}{2}i}$$

فرض التراجع : نفرض أنّ $z_n - z_B = 5\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1} e^{i\frac{\pi}{4}(n+1)}$

برهان التراجع : نبرهن أنّ $z_{n+1} - z_B = 5\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+2} e^{i\frac{\pi}{4}(n+2)}$

$$A_{n+1} = S(A_n) \Rightarrow z_{n+1} - z_B = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}(z_n - z_B) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \times 5\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1} e^{i\frac{\pi}{4}(n+1)}$$

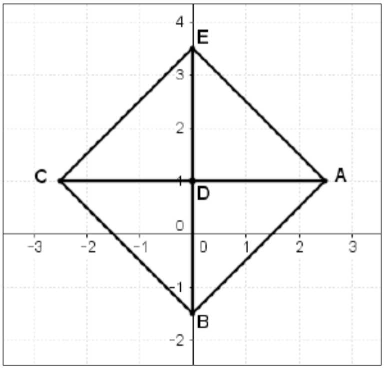
$$\Rightarrow \boxed{z_{n+1} - z_B = 5\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+2} e^{i\frac{\pi}{4}(n+2)}}$$

ب. تعيين قيّم n الطبيعية حتى تنتمي النقطة A_n إلى المستقيم (AB)

$$A_n \in (AB) \Rightarrow \frac{z_n - z_B}{z_0 - z_B} \in \mathbb{R} \Rightarrow \arg\left(\frac{z_n - z_B}{z_0 - z_B}\right) = k\pi$$

$$\Rightarrow \arg(z_n - z_B) = \arg(z_0 - z_B) + k\pi \Rightarrow \frac{\pi}{4}(n+1) = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$\Rightarrow \frac{n\pi}{4} = k\pi \Rightarrow \boxed{n = 4k\,; k \in \mathbb{N}}$$



* * *

التمرين 67 : (بكالوريا 2017 ر الدورة الاستثنائية)

I) $\boldsymbol{z^2-2(1-\sin\alpha)z+2(1-\sin\alpha)=0 \dots (E)}$

1. تعيين الحلين z_1 وz_2 بدلالة α

$$\Delta=4(1-\sin\alpha)^2-8(1-\sin\alpha)=4(1-\sin\alpha)(-1-\sin\alpha)$$
$$=-4(1-\sin^2\alpha)=4i^2\cos^2\alpha=(2i\cos\alpha)^2$$

$$\boxed{z_1=1-\sin\alpha+i\cos\alpha\ ;z_2=1-\sin\alpha-i\cos\alpha}$$

2. بيان أنّ : $z_1^{2017}+z_2^{2017}=1$

$$\alpha=\frac{\pi}{6}\Rightarrow z_1=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=e^{i\frac{\pi}{3}}\,;z_2=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

$$z_1^{2017}+z_2^{2017}=\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{2017}+\left(e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^{2017}=e^{i\frac{2017\pi}{3}}+e^{-i\frac{2017\pi}{3}}$$
$$=e^{i\left(672\pi+\frac{\pi}{3}\right)}+e^{-i\left(672\pi+\frac{\pi}{3}\right)}=e^{i\frac{\pi}{3}}+e^{-i\frac{\pi}{3}}$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=\boxed{1}$$

II) $\boldsymbol{z_A=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}$ ، $\boldsymbol{z_B=\overline{z_A}}$ ، $\boldsymbol{z_C=2z_A}$

1. تعيين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n$ عددا حقيقيا موجبا تماما

$$\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n>0\Rightarrow \arg\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n=2k\pi\Rightarrow \arg\left(\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{-i\frac{\pi}{3}}}\right)^n=2k\pi$$

$$\Rightarrow \arg\left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^n=2k\pi\Rightarrow \frac{2n\pi}{3}=2k\pi\Rightarrow \boxed{n=3k\,;k\in\mathbb{N}}$$

2. تعيين طبيعة التحويل S وتحديد عناصره المميّزة

$$S(M)=M'\Rightarrow z'=(1+z_A)z+2z_B=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z+2\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{z'=\left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z+1-\sqrt{3}i}$$

$$a=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=\boxed{\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}}\,;\ z_\omega=\frac{b}{1-a}=\frac{1-\sqrt{3}i}{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

$$=-2\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i}\right)=-\frac{2\left(1-\sqrt{3}i\right)^2}{4}=1+\sqrt{3}i=\boxed{z_C}$$

منه نستنتج أنّ التحويل S تشابه مباشر مركزه C ، نسبته $\sqrt{3}$ وزاويته $\frac{\pi}{6}$

3. التحقّق أنّ النقطة C تنتمي إلى (Γ)

$$\arg(\overline{z_C}-z_B)=\arg\left(1-\sqrt{3}i-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\arg\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$=-\frac{\pi}{3}+2k\pi \Rightarrow \boxed{C\in(\Gamma)}$$

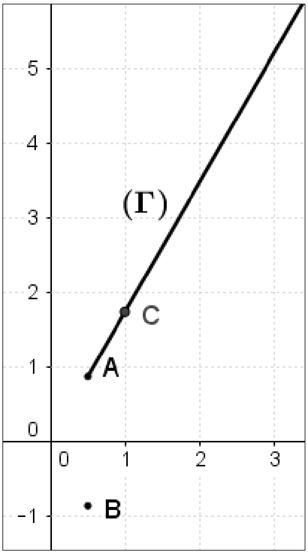
تحديد طبيعة (Γ) وإنشائها

$$M\in(\Gamma)\Rightarrow \arg(\bar{z}-z_B)=-\frac{\pi}{3}+2k\pi \Rightarrow \arg(\overline{\bar{z}-z_B})=\frac{\pi}{3}+2k\pi$$

$$\Rightarrow \arg(z-\overline{z_B})=\frac{\pi}{3}+2k\pi \Rightarrow \arg(z-z_A)=\frac{\pi}{3}+2k\pi$$

$$\Rightarrow \boxed{(\vec{u};\overrightarrow{AM})=\frac{\pi}{3}+2k\pi}$$

منه نستنتج أنّ المجموعة (Γ) هي نصف المستقيم الذي مبدؤه A ويشمل النقطة C باستثناء النقطة A.



* * *

فهرس

تم بحمد الله

* * *

أتمنى لكم التوفيق والنجاح في البكالوريا
عبد الكرامة والنية

أرحب بجميع استفساراتكم
أو ملاحظاتكم أو تصويباتكم
على العنوان التالي
ouailmaths@gmail.com
0668 177 233