

تمارين الدعم / السلسلة رقم 1 / تقديم الأستاذ: بك علي

النهايات - الاستمرارية - مبرهنة القيم المتوسطة / للأقسام 3 ع ت +3 ر +3

التمرين 10

احسب النهايات التالية: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ ، $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+22}-5}{\sqrt{x-2}-1}$ ، $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}}{x-1}$

التمرين 11

برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي $x > -1$:

$$\frac{-1}{x+1} \leq \frac{\cos x}{x+1} \leq \frac{1}{x+1}$$

هل تقبل الدالة $f: x \mapsto \frac{\cos x}{x+1}$ نهاية عند $+\infty$ ؟

التمرين 12

f دالة بحيث من أجل كل عدد حقيقي $x > 1$ ،

$$\frac{3x + \cos x}{x} \leq f(x) \leq \frac{3x+7}{x-1}$$

هل تقبل f نهاية عند $+\infty$ ؟

التمرين 13

f دالة بحيث من أجل كل عدد حقيقي $x \geq 0$:

$$|f(x) - 3| \leq \frac{1}{x^2 + 1}$$

هل تقبل الدالة f نهاية عند $+\infty$ ؟

التمرين 14

f دالة بحيث من أجل كل عدد حقيقي $x < 0$:

$$f(x) \leq -2x^3$$

هل تقبل الدالة f نهاية عند $+\infty$ ؟

التمرين 15

f دالة بحيث من أجل كل عدد حقيقي $x > 0$:

$$f(x) \geq \frac{1}{2}x^4 + x$$

هل تقبل الدالة f نهاية عند $+\infty$ ؟

(1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون:

$$1 \leq 3 + 2 \cos x \leq 5$$

(2) هل تقبل الدالة $f: x \mapsto \frac{x-1}{3+2 \cos x}$ نهاية عند $+\infty$.؟

التمرين 1

أحسب النهايات عند أطراف المجموعة (المجال) D_f للدالة f
 $D_f =]-\infty, +\infty[$ ، $f(x) = -2x^3 + 4x - 1$

التمرين 2

أحسب النهايات عند أطراف المجموعة (المجال) D_f للدالة f
 $D_f =]-\infty, 3[\cup]3, +\infty[$ ، $f(x) = \frac{1+2x}{3-x}$

التمرين 3

أحسب النهايات عند أطراف المجموعة (المجال) D_f للدالة f
 $D_f =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$ ، $f(x) = \frac{x^3-1}{1-x^2}$

التمرين 4

أحسب النهايات عند أطراف المجموعة (المجال) D_f للدالة f
 $D_f =]-\infty, 2[\cup]2, 3[\cup]3, +\infty[$ ، $f(x) = \frac{x+2}{x^3-5x+6}$

التمرين 5

أحسب النهايات عند أطراف المجموعة (المجال) D_f للدالة f
 $D_f =]-\infty, +\infty[$ ، $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$

التمرين 6

أحسب: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^3 - 8x^2 - 10x + 21}{x^2 - x - 6}$

التمرين 7

احسب النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x + \sqrt{4x^2 + 3} \quad (2) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{\frac{3x+4}{x-3}} \quad (1)$$

التمرين 8

احسب النهايتين:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{-2x^3 + x - 3} \quad (2) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} \quad (1)$$

التمرين 9

باستعمال تعريف العدد المشتق احسب النهايات التالية:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

التمرين 16

(1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون:

$$x^2 - 3\sin x \geq x^2 - 3$$

(2) هل تقبل الدالة $f: x \mapsto x^2 - \sin 3x$ نهاية عند $+\infty$ ؟

التمرين 17

هل تقبل الدالة $f: x \mapsto x^2 + 2x \sin x$ نهاية عند

$+\infty$ ؟ و عند $-\infty$ ؟

التمرين 18

دالة معرفة على $]-\frac{1}{2}; +\infty[$ بـ:

$$f(x) = \frac{x + \sin x}{2x + 1}$$

(1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x > -\frac{1}{2}$:

$$\frac{x-1}{2x+1} \leq f(x) \leq \frac{x+1}{2x+1}$$

(2) هل تقبل الدالة f نهاية عند $+\infty$ ؟

التمرين 19

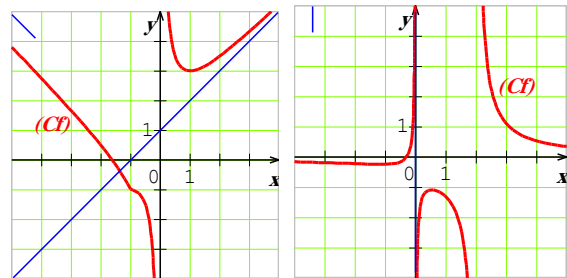
المنحني C_f هو التمثيل البياني للممثل لدالة f

بقراءة بيانية

(1) في كل حالة من الحالات الثلاث عين D مجموعة تعريف الدالة f ثم خمن النهايات عند أطراف المجموعة D وإتجاه التغير ثم شكل جدول التغيرات

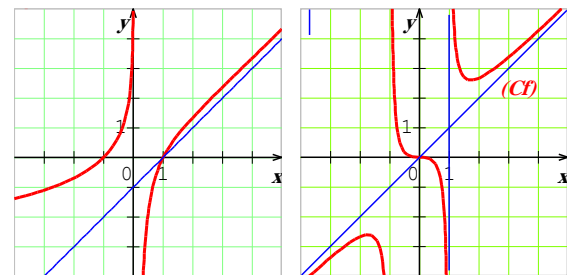
(2) في الشكل (3) حدد وضعية C_f بالنسبة لمستقيم المقارب المائل

(3) في الشكل (4) أكتب معادلة ديكارتية للمستقيم المقارب المائل لـ C_f



الحالة (2)

الحالة (1)



الحالة (4)

الحالة (3)

التمرين 20

(1) ادرس النهاية عند $-\infty$ ، عند $+\infty$ وعند 1 للدالة f

$$f(x) = \frac{2x+5}{x-1}$$

(2) حدّد معادلات المستقيمات المقاربة لمنحني الدالة f

و ادرس وضعيته بالنسبة إلى المستقيم المقارب الأفقي.

التمرين 21

دالة معرفة على $]\pi; +\infty[$ بـ:

$$f(x) = \frac{3x + \cos x}{x - \pi}$$

(1) بين أن: $\frac{3x-1}{x-\pi} \leq f(x) \leq \frac{3x+1}{x-\pi}$ من أجل كل $x > \pi$

استنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم فسر النتيجة بيانياً.

(2) بين أن $\lim_{x \rightarrow \pi} f(x) = +\infty$ ثم فسر النتيجة بيانياً.

(أ-1) من أجل كل $x > 3$ بين أن: $2x \geq \sqrt{x^2 - 3x}$

(ب) استنتج حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 3x} - 4x)$ مستخدماً

نظرية الحد من الأعلى.

(أ-2) من أجل $x > 0$ ، قارن بين $\sqrt{9x^2 + x + 1}$ و $3x$

(ب) استنتج حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{9x^2 + x + 1} - 2x)$ مستخدماً

نظرية الحد من الأسفل.

التمرين 22

f دالة معرفة ومستمرة وقابلة للإشتقاق على $\mathbb{R} - \{2\}$ و جدول تغيراتها الآتي:

x	$-\infty$	0	2	3	$+\infty$
f(x)	4	$+\infty$	$+\infty$	0	-2

واليك تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس.

(أ-1) فسر بيانياً، كل نهاية لـ f ، عين نهاية $f\left(\frac{1}{x}\right)$ عند $+\infty$.

(ب) بين أن المعادلة $f(x) = \frac{1}{2}$ تقبل حلاً وحيداً على $]2; 3[$.

(-2) دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{3\}$ بالشكل:

$$g(x) = \frac{1}{f(x)}; x \neq 2 \text{ و } g(2) = 0$$

(أ) بين أن g مستمرة عند العدد 2.

(ب) عين نهايات الدالة g عند $+\infty$ ، $-\infty$ و 3.

التمرين 23

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ بـ :
$$f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 6x + 3}{(x+1)^2}$$

عين a, b, c, d بحيث من أجل كل عدد حقيقي x يكون $f(x) = ax + b + \frac{cx + d}{(x+1)^2}$

- (2) استنتج أن المنحني (C) الممثل للدالة f يقبل مستقيما مقاربا مائل (Δ) عند $-\infty$ و عند $+\infty$ يطلب تعيين معادلة له
(3) حدّد وضعية المنحني (C) بالنسبة إلى (Δ) .

التمرين 24

f دالة معرفة على \mathbb{R} فسر هندسيا المعلومات التالي:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - 2x + 5] = -4, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x + 5] = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -3$$

من أجل $x > 1$ فإن $f(x) < 0$ ، ومن أجل $x \leq -2$ فإن $f(x) - x + 3 > 0$

التمرين 25

f دالة معرفة على \mathbb{R} بـ :
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+2-\sqrt{4+x^2}}{x}, & x \neq 0 \\ \alpha, & x = 0 \end{cases}$$

الدالة f مستمرة عند 0

التمرين 26

f دالة معرفة على \mathbb{R} بـ :
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - \alpha, & x > 2 \\ \frac{2x^2 - \alpha + \beta}{x}, & x \leq 2 \end{cases}$$

حتى تكون الدالة f مستمرة عند 2

التمرين 27

لتكن الدالة f المعرفة على \mathbb{R} بـ :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 + 3}{x + 1}; x > 1 \\ f(x) = \sqrt{x^2 + 3}; x \leq 1 \end{cases}$$

أثبت أن f مستمرة عند 1.

التمرين 28

1/ شكل جنول تغيرات الدالة h المعرفة على \mathbb{R} كما يلي : $h(x) = x^3 - 3x - 2$

2/ عل لما ذا المعادلة : $h(x) + 1 = 0$ تقبل ثلاثة حلول مختلفة في \mathbb{R}

التمرين 29

1/ بين أن المعادلة : $x^3 - x + 4 = 0$ تقبل حلا وحيدا α محصور بين 1 و 1.5

التمرين 30

f دالة معرفة على \mathbb{R} كما يلي بـ :
$$f(x) = \frac{\cos x}{1 + x^2}$$

- أدرس استمرار الدالة f على \mathbb{R}

التمرين 31

f دالة معرفة على \mathbb{R} كما يلي : $f(x) = (x^3 - 2x^2 + 7x - 10) \sin x$

أدرس استمرارية الدالة f على \mathbb{R}