** مفكرة حول الموافقات في Z MEBARKI2016

تعريف : n عدد طبيعي غير معدوم . نقول عن العددان a و b أنهما " متوافقان " بترديد n إذا وفقط إذا كان لهما نفس الباقي في القسمة على n. ونكتب : $a \equiv b[n]$
ونقرأ: a يوافق b بترديد n .

مثال : للعددين 139 و 28 نفس الباقي على 3 وهو 1 ومنه نقول أن : $139 \equiv 28[3]$ أو $28 \equiv 139[3]$.

نتيجة : $a \equiv b[n]$ تكافئ $a-b$ مضاعف للعدد الطبيعي n

مثال : $-20 \equiv 8[7]$ لأن $(-20)-(8) = -28 = (-4)\times 7$
أي : $(-20)-(8)$ مضاعف لـ: 7

طريقة:للتحقق من صحة الموافقة $a \equiv b[n]$ يكفي إثبات أن:
- لـ a و b نفس الباقي على العدد الطبيعي n .
- أو $a-b$ مضاعف للعدد الطبيعي n .

مثال : الموافقة $1429 \equiv 2008[7]$ خاطئة لأن : $579 = 2008-1429$ و 579 ليس مضاعف لـ 7 .
الموافقة $144 \equiv 11[19]$ صحيحة لأن :
لـ : 144 و 11 نفس باقي القسمة الإقليدية على 19 وهو 11
$(144 = 19\times 7 + 11)$ ، $(11 = 19\times 0 + 11)$.

خواص الموافقات في Z :

الخاصية 1: a عدد صحيح ، n عدد طبيعي أكبر تماما من 1.
$a \equiv r[n]$. (r باقي القسمة الإقليدية لـ a على n)

الخاصية 2: n عدد طبيعي غير معدوم .
من اجل كل عدد صحيح a : $a \equiv a[n]$

الخاصية 3: n عدد طبيعي غير معدوم. a ، b عددان صحيحان.
إذا كان : $a \equiv b[n]$ فإن : $b \equiv a[n]$

الخاصية 4: n عدد طبيعي غير معدوم. a ، b ، c أعداد صحيحة.
إذا كان : ($a \equiv b[n]$ و $b \equiv c[n]$) فإن : $a \equiv c[n]$

الخاصية 5: n عدد طبيعي غيرمعدوم. a ، b ، c ، d أعداد صحيحة.
إذا كان : ($a \equiv b[n]$ و $c \equiv d[n]$) فإن : $a + c \equiv b + d[n]$

الخاصية 6: n عدد طبيعي غير معدوم. a ، b ، c ، d أعداد صحيحة.
إذا كان : ($a \equiv b[n]$ و $c \equiv d[n]$) فإن : $a\times c \equiv b\times d[n]$

الخاصية 7: n عدد طبيعي غير معدوم ، a ، b عددان صحيحان.
من اجل كل عدد صحيح k : $k\times a \equiv k\times b[n]$

الخاصية 8: n ، p عددان طبيعيان غير معدومان. a ، b عددان صحيحان. إذا كان : $a \equiv b[n]$ فإن : $a^p \equiv b^p[n]$

أمثلة :

A. ليكن : $a \equiv 2[7]$ ، $b \equiv 5[7]$:

** نريد إثبات أن العدد : $3b + 10a$ يقبل القسمة على 7 :

لدينا: $\begin{cases} a \equiv 2[7] \\ b \equiv 5[7] \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} 10a \equiv 10\times 2[7] \\ 3b \equiv 3\times 5[7] \end{cases}$ أي $\begin{cases} 10a \equiv 10\times 2[7] \\ 3b \equiv 3\times 5[7] \end{cases}$

ومنه $\begin{cases} 10a \equiv 20[7] \\ 3b \equiv 15[7] \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} 10a \equiv 6[7] \\ 3b \equiv 1[7] \end{cases}$ لأن : $\begin{cases} 20 \equiv 6[7] \\ 15 \equiv 1[7] \end{cases}$.

ومنه نستنتج $3b + 10a \equiv 6 + 1[7]$ أي $3b + 10a \equiv 7[7]$
وبما أن $7 \equiv 0[7]$ فإن $3b + 10a \equiv 7[7]$
أي: $3b + 10a$ يقبل القسمة على 7.

** البحث عن باقي قسمة العدد $3a^2 + 2b^3$ على 7:

لدينا $\begin{cases} a \equiv 2[7] \\ b \equiv 5[7] \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} a^2 \equiv 2^2[7] \\ b^3 \equiv 5^3[7] \end{cases}$ أي $\begin{cases} a^2 \equiv 4[7] \\ b^3 \equiv 125[7] \end{cases}$

وبماأن $125 \equiv 6[7]$ فإن $\begin{cases} a^2 \equiv 4[7] \\ b^3 \equiv 6[7] \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} 3a^2 \equiv 12[7] \\ 2b^3 \equiv 12[7] \end{cases}$

ومنه $3a^2 + 2b^3 \equiv 12 + 12[7]$ أي $3a^2 + 2b^3 \equiv 24[7]$
وبما أن $24 \equiv 3[7]$ فإن $3a^2 + 2b^3 \equiv 3[7]$
ومنه باقي قسمة العدد $3a^2 + 2b^3$ على 7 هو:3

B. ايجاد بواقي قسمة : 371^{238} ، 579^{2008} على 5 :

** نعلم أن : $371 \equiv 1[5]$ ومنه $371^{238} \equiv 1^{238}[5]$
ومنه $371^{238} \equiv 1\ [5]$.

ونعلم أن : $579 \equiv 4[5]$ أي $579 \equiv -1[5]$
(لأن $\begin{cases} 579 \equiv 4[7] \\ 0 \equiv 5[7] \end{cases}$ أي $579 \equiv 4-5[5]$ أي $579 \equiv -1[5]$)

ومنه $579^{2008} \equiv (-1)^{2008}[5]$ إذن $579^{2008} \equiv 1\ [5]$
باقي قسمة كل من 371^{238} و 579^{2008} على 7 هو 1.

C. إيجاد قيم العدد الصحيح x حيث : $3x \equiv 4[5]$

نبحث عن بواقي قسمة $3x$ على 5 لما x يوافق كل بواقيه الممكنة على 5 كما يوضح الجدول الآتي :

$x \equiv$	0	1	2	3	4	[5]
$3x \equiv$	0	3	1	4	2	[5]

ومنه $3x \equiv 4[5]$ لما : $x \equiv 3[5]$.

D. حل المعادلة: $2n^2 + 3n + 2 \equiv 0[7]$:

بنفس الطريقة السابقة نبحث عن بواقي قسمة $2n^2 + 3n + 2$ على 7 لما n يوافق كل بواقيه الممكنة على 7 كالآتي :

n	0	1	2	3	4	5	6	[7]
$3n$	0	3	6	2	5	1	4	[7]
n^2	0	1	4	2	2	4	1	[7]
$2n^2$	0	2	1	4	4	1	2	[7]
$2n^2 - 3n$	6	6	2	2	6	2	5	[7]
$2n^2 + 3n + 2 \equiv$	1	1	4	4	1	2	0	[7]

ومنه : $2n^2 + 3n + 2 \equiv 0[7]$ لما : $n \equiv 6[7]$.

** حل تمرين شامل حول الموافقات في MEBARKI2016 Z

بــواقي قسمــة قــوى عدد طبيعــي علــى آخــر

تمرين :

a) عين تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 3^n على 7

b) استنتج بواقي قسمة كل من : 3^{2008} ، 3^{1429} على 7 .

c) أوجد بواقي قسمة كل من: 1963^{1980} ، 2012^{2012} على 7

d) عين باقي القسمةالإقليديةعلى 7 للعدد: $3^{1988}+10^{1408}$

e) بين أن العدد $(2\times 3^{6n+1}-10^{6n+4}+17^{6n+5})$ يقبل القسمة على 7 .

f) أوجد قيم العدد الطبيعي n حتى يقبل العدد $(9^{3n}-2\times 3^{12n+4}+n)$ القسمة على 7.

الحل :

a) تعيين تبعا لقيم العدد لطبيعي n بواقي قسمة 3^n على 7 :

لدينا : $3^0\equiv 1[7]$ ، $3^1\equiv 3[7]$ ، $3^2\equiv 2[7]$ ، $3^3\equiv 6[7]$ ، $3^4\equiv 4[7]$ ، $3^5\equiv 5[7]$ ، $3^6\equiv 1[7]$

ومنه 6 " دور" بواقي قسمة 3^n على 7 أي:

$3^{6k}\equiv 1[7]$ ، $3^{6k+1}\equiv 3[7]$ ، $3^{6k+2}\equiv 2[7]$ ، $3^{6k+3}\equiv 6[7]$

$3^{6k+4}\equiv 4[7]$ ، $3^{6k+5}\equiv 5[7]$. من اجل كل عدد طبيعي k .

التعميم : نلخص بواقي قسمة 3^n على 7 كما يلي :

** إذا كان : $n=6k$ فإن : $3^n\equiv 1[7]$.

** إذا كان : $n=6k+1$ فإن : $3^n\equiv 3[7]$.

** إذا كان : $n=6k+2$ فإن : $3^n\equiv 2[7]$.

** إذا كان : $n=6k+3$ فإن : $3^n\equiv 6[7]$.

** إذا كان : $n=6k+4$ فإن : $3^n\equiv 4[7]$.

** إذا كان : $n=6k+5$ فإن : $3^n\equiv 5[7]$.

b) استنتاج بواقي قسمة كل من : 3^{2008} ، 3^{1429} على 7:

نعلم أن : $2008=6\times 334+4$ ، $1429=6\times 238+1$

أي $2008=6k+4$ ، $1429=6k+1$ ومن خلال التعميم نستنتج أن : $3^{2008}\equiv 4[7]$ و $3^{1429}\equiv 3[7]$

باقي قسمة 3^{2008} على 7 هو 4 ، باقي قسمة 3^{1429} على 7 هو 1.

c) إيجاد بواقي قسمة كل من: 1963^{1980} ، 2012^{2012} على 7:

نعلم أن : $1963\equiv 3[7]$ و $2012\equiv 3[7]$

ومنه : $1963^{1980}\equiv 3^{1980}[7]$ و $2012^{2012}\equiv 3^{2012}[7]$.

نعلم أن : $1980=6\times 330$ ، $2012=6\times 335+2$

أي $1980=6k$ ، $2012=6k+2$ ومن خلال التعميم نستنتج أن:

$3^{1980}\equiv 1[7]$ ، $3^{2012}\equiv 2[7]$ أي $1963^{1980}\equiv 1[7]$ ، $2012^{2012}\equiv 2[7]$

باقي قسمة 1963^{1980} على7 هو4،باقي قسمة 2012^{2012} على 7هو 1.

d) تعيين باقي قسمة العدد $3^{1988}+10^{1408}$ على 7 :

نعلم أن : $10\equiv 3[7]$ ومنه $3^{1988}+10^{1408}\equiv 3^{1988}+3^{1408}[7]$.

لدينا : $1408=6\times 234+1$ ، $1988=6\times 331+2$.

ومنه : $3^{1408}\equiv 3[7]$ ، $3^{1988}\equiv 2[7]$ إذن نستنتج أن :

$3^{1988}+10^{1408}\equiv 2+3[7]$ أي $3^{1988}+10^{1408}\equiv 5[7]$

ومنه باقي قسمة العدد $3^{1988}+10^{1408}$ على 7 هو : 5 .

e) تبيين أن العدد $(2\times 3^{6n+1}-10^{6n+4}+17^{6n+5})$ يقبل القسمة على 7 .

لدينا $2\times 3^{6n+1}-10^{6n+4}+17^{6n+5}\equiv 2\times 3^{6n+1}-3^{6n+4}+3^{6n+5}[7]$

(لأن $10\equiv 3[7]$ ، $17\equiv 3[7]$ ومنه $10^{6n+4}\equiv 3^{6n+4}[7]$ ، $17^{6n+5}\equiv 3^{6n+5}[7]$)

ومنه : $2\times 3^{6n+1}-10^{6n+4}+17^{6n+5}\equiv 2\times 3-4+5[7]$

أي : $2\times 3^{6n+1}-10^{6n+4}+17^{6n+5}\equiv 7[7]$

ومنه : $2\times 3^{6n+1}-10^{6n+4}+17^{6n+5}\equiv 0[7]$

إذن : $(2\times 3^{6n+1}-10^{6n+4}+17^{6n+5})$ يقبل القسمة على 7 .

f) إيجاد قيم العدد الطبيعي n حتى يقبل العدد $(9^{3n}-2\times 3^{12n+4}+n)$ القسمة على 7.

نعلم أن : $9^{3n}=(3^2)^{3n}=3^{2\times 3n}=3^{6n}$ و $3^{12n+4}=3^{6(2n)+4}$

ومنه: $9^{3n}-2\times 3^{12n+4}+n\equiv 3^{6n}-2\times 3^{6(2n)+4}+n[7]$

أي : $9^{3n}-2\times 3^{12n+4}+n\equiv 1-2\times 4+n[7]$

أي : $9^{3n}-2\times 3^{12n+4}+n\equiv -7+n[7]$

ومنه : $9^{3n}-2\times 3^{12n+4}+n\equiv n[7]$ ، (لأن $-7\equiv 0[7]$)

لكي يقبل العدد $(9^{3n}-2\times 3^{12n+4}+n)$ القسمة على 7 يكفي أن يكون:

$n\equiv 0[7]$.

التشفيـــــــــر التـــآلفـــــــي

تمرين: استعمل المفتاح $(3,5)$ لتشفير الحروف الأبجدية.ثم أوجد تشفيرا للمقولة:" ومن منح الجهال علما أضاعه ** ومن منع المستوجبين فقد ظلم".

** قم بحل تشفير العبارة : " زوهو وكثكن أوظطص حزهن ش كش شكسمص وطوو كوون "

** أوجد حل تشفير العبارة :" وكثكن حفخ كو مضفو تقووزص ش وكنزو نو خوس تكنو خوس طوكزمط "

الحل : الجدول الآتي يبين تشفير الحروف الأبجدية باستعمال المفتاح $(3,5)$ (أي إرفاق كل حرف أبجدي بعدد طبيعي x حيث $0\le x\le 27$

ثم إيجاد التشفير y حيث y هو باقي قسمة العدد $3x+5$ على 28 أي $y\equiv 3x+5[28]$).

الحرف	أ	ب	ج	د	هـ	و	ز	ح	ط	ي	ك	ل	م	ن
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
y	5	8	11	14	17	20	23	26	1	4	7	10	13	16
التشفير	و	ط	ل	س	ص	ش	خ	ظ	ب	هـ	ح	ك	ن	ف

الحرف	س	ع	ف	ص	ق	ر	ش	ت	ث	خ	ذ	ض	ظ	غ
x	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
y	19	22	25	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	2
التشفير	ر	ث	ض	أ	د	ز	ي	م	ع	ق	ت	ذ	غ	ج

تشفير المقولة هو :" ش نفظ وكلصوك ثكنو وذوثص ش نف نفث وكنرمشلطهف ضدس غكن "

**حل تشفير العبارة هو :" رأيت العلـم صاحبه كريـم ولو ولدته آبــاء لئـام" (قم بالإجابة عن السؤال الأخير)

تذكر جيدا: " أنك (تستطيع النجاح) في حياتك الدراسية ولو كان الناس جميعا يعتقدون أنك غير ناجح . ولكنك (لن تنجح أبدا) إذا كنت تعتقد في نفسك أنك غير ناجح".

الأستاذ : مبـــاركي