

تمرين 01: \* اكتب على الشكل الجبري ما يلي :

$$1+i+i^2+\dots+i^{2011}, (1+i)^{10}, \frac{\sqrt{3+i}}{\sqrt{3-i}} + \frac{\sqrt{3-i}}{\sqrt{3+i}}$$

تمرين 02: ليكن  $z = x + iy$  حيث  $x$  و  $y$  عددين حقيقيين .

ليكن  $Z$  عدد مركب حيث :  $z \neq 4i / Z = \frac{z+2i}{z-4i}$

1. عين  $\text{Im}(Z)$  ،  $\text{Re}(Z)$  :

2. عين مجموعة النقط  $M(z)$  حتى يكون  $Z$  حقيقي.

3. عين مجموعة النقط  $M(z)$  حتى يكون  $Z$  تخيلي

4. عين مجموعة النقط  $M(z)$  حتى يكون  $|Z|=1$  .

تمرين 03:

1. حل في  $C$  المعادلة :  $Z\bar{Z} + Z + i\bar{Z} = 2 - 2i$

2. حدد المجموعة  $(\Omega)$  للنقط  $M(Z)$  حيث :

$$Z\bar{Z} - 2\bar{Z} + 2(iZ - 1) \in \mathfrak{R}^-$$

3. بين أن العدد  $Z$  حقيقي حيث :

$$Z = (2-3i)^n + (2+3i)^n \quad n \in \mathbb{N}$$

تمرين 04:

✓ اكتب على الشكل المثلثي ما يلي :

$$(1+i\sqrt{3})^5 \times \left[2, -\frac{\pi}{3}\right]^{-3} / 3, \frac{7-4i\sqrt{3}}{5+11i\sqrt{3}} / 2, -\sqrt{3}+3i / 1$$

$$0 < \theta < 2\pi \quad 1 - \cos \theta + i \sin \theta / 5, \sin \theta + i \cos \theta / \theta \in \mathfrak{R} / 4$$

$$(\pi < \theta < 2\pi) \quad \sin \theta + i(1 + \cos \theta) / 6$$

✓ احسب :  $(1+i\sqrt{3})^6 + \left[2, -\frac{\pi}{3}\right]^3 + (-1+i)^6$

تمرين 05: 1) ليكن  $z = (1+i\sqrt{3})(1-i)$

أكتب  $z$  على الشكل الجبري و المثلثي ثم استنتج  $\cos \frac{\pi}{12}$  ،  $\sin \frac{\pi}{12}$

2) ليكن  $z = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$

حدد الشكل المثلثي لـ  $z$  ثم استنتج  $\cos \frac{\pi}{8}$  ،  $\sin \frac{\pi}{8}$

تمرين 06: ليكن :  $C(\sqrt{3}-1)$  ،  $B(-\sqrt{3}-i)$  ،  $A(2i)$

1) بين أن  $A$  ،  $B$  ،  $C$  من نفس الدائرة التي مركزها  $O$  والتي

يطلب تعيين نصف قطرها. أنشئ الدائرة والنقاط  $A$  ،  $B$  ،  $C$  .

2) حدد قيس الزاوية  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$  ثم استنتج طبيعة المثلث  $ABC$  .

تمرين 07:

1) حل في  $C$  المعادلة :  $Z^2 - 6Z + 34 = 0$

2) ليكن  $A(3+5i)$  ،  $B(3-5i)$  ،  $C(7+3i)$  ..

أ) بين أن النقطة  $C$  صورة النقطة  $A$  بالانسحاب  $(T)$  الذي شعاعه

$$\vec{V} \text{ ذو اللاحقة } 4-2i$$

ب) احسب  $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$  استنتج طبيعة المثلث  $ABC$  و  $BC = 2AC$

جـ) ليكن  $h$  التحاكي الذي مركزه  $\Omega(2,-2)$  ونسبته  $\frac{1}{2}$   
 لتكن  $M(z)$  نقطة من المستوي و  $M'(z')$  صورتها بالتحاكي  $h$  .  
 \* أوجد  $z'$  بدلالة  $z$  ثم لاحقة  $A'$  حيث  $h(A') = B$

تمرين 08:

1) حل في  $C$  المعادلة :  $Z^2 - 8Z + 17 = 0$

2) ليكن  $A(4+i)$  ،  $B(8+3i)$

لتكن  $M(z)$  نقطة من المستوي و  $M'(z')$  صورتها بالدوران  $R$

الذي مركزه  $\Omega(1+2i)$  وزاويته  $\frac{3\pi}{2}$  .

أ) أوجد  $z'$  بدلالة  $z$  ثم لاحقة  $C$  حيث :  $R(A) = C$

ب) بين أن :  $z_B - z_C = 2(z_A - z_C)$  ماذا تستنتج ؟

تمرين 09:

نعتبر :  $P(Z) = Z^3 - 8Z^2 + 21Z - 20$

1) حل في  $C$  المعادلة :  $P(Z) = 0$

2) ليكن  $A(Z_1)$  ،  $B(Z_2)$  ،  $C(Z_3)$  حيث  $Z_1$  و  $Z_2$  و  $Z_3$

هي حلول المعادلة  $Z_1 / P(Z) = 0$  الحل الحقيقي ،  $\text{Im}(Z_3) > 0$

- بين أن :  $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA}$  و  $OC = OB$
- ما طبيعة الرباعي  $OBAC$  .

تمرين 10:

I) لتكن المعادلة  $(E) : Z^2 - 10Z + 29 = 0$

(a) بين أن  $5+2i$  حل للمعادلة  $(E)$  .

(b) استنتج الحل الآخر دون حل المعادلة

II) حل في  $C$  المعادلة الآتية :

$$Z^3 - 13Z^2 + 59Z - 87 = 0$$

III) ليكن  $A(3)$  ،  $B(5-2i)$  ،  $C(5+2i)$  ،  $M(Z)$

1) بين أن المثلث  $ABC$  مثلث قائم و متساوي الساقين.

2) أعط التفسير الهندسي لعمدة العدد المركب :  $\frac{Z-3}{Z-5+2i}$

3) استنتج مجموعة النقط  $M$  بحيث يكون  $\frac{Z-3}{Z-5+2i}$

(a) حقيقي

(b) حقيقي موجب تماما

(c) حقيقي سالب تماما

(d) تخيلي

(e) تخيلي موجب تماما

(f) تخيلي سالب تماما

4) لتكن  $(C)$  الدائرة المحيطة بالمثلث  $ABC$  والنقطة  $\Omega(2-i)$

(a) أعط الكتابة المركبة للدوران  $R$  الذي مركزه  $\Omega$  وزاويته  $-\frac{\pi}{2}$

(b) أوجد  $(C')$  صورة  $(C)$  بالدوران  $R$

(c) أوجد المعادلة الديكارتيّة لـ  $(C')$



**التمرين 11:**

1. حل في  $C$  المعادلة:  $Z^2 - 2Z + 2 = 0$ .  
استنتج طويلة وعمدة كل حل من الحلول
2. استنتج مجموعة حلول المعادلة:

$$(-iZ + 3i + 3)^2 - 2(-iZ + 3i + 3) + 2 = 0$$

3. المستوى مزود بمعلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، وحدة الرسم  $2cm$ . نفرض النقط  $A, B, C$  التي لواحقها على الترتيب  $Z_C = 2Z_B, Z_B = \overline{Z_A}, Z_A = 1 + i$ .

- (a) أوجد الشكل الجبري لـ  $Z_C$  و  $Z_B$ .
- (b) مثل  $A, B, C$  في المعلم  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .
- (c) بين أن النقط  $A, B, C$  تنتمي إلى الدائرة  $(\phi)$  التي مركزها  $I$  ذات اللاحقة  $3$  ونصف قطرها  $\sqrt{5}$ .

- (d) احسب  $\frac{Z_C - 3}{Z_A - 3}$  ثم استنتج طبيعة المثلث  $IAC$ .

- (e) صورة النقطة  $O$  بالانسحاب الذي شعاعه  $2\vec{IC}$ .  
أوجد لاحقة النقطة  $E$ .

- (f) صورة النقطة  $E$  بالدوران الذي مركزه  $O$  وزاويته  $\frac{\pi}{2}$ .  
أوجد لاحقة النقطة  $D$ .

- (g) بين أن المستقيمين  $(AB)$  و  $(CD)$  متعامدين.

**التمرين 12:**

- المستوى مزود بمعلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، وحدة الرسم  $4cm$ . دالة ترفق بكل عدد مركب  $z \neq -2i$  بـ:

$$Z = f(z) = \frac{z - 2 + i}{z + 2i}$$

1. إذا كان  $z = x + iy$  حيث  $x$  و  $y$  عدنان حقيقيان.  
أوجد  $\text{Re}(Z)$  و  $\text{Im}(Z)$  بدلالة  $x$  و  $y$ .

تحقق من أن:  $\text{Re}(Z) = \frac{x^2 + y^2 - 2x + 3y + 2}{x^2 + (y + 2)^2}$ . استنتج:

- (a) المجموعة  $(\Gamma)$  للنقط  $M(z)$  حيث  $Z$  حقيقي.
  - (b) المجموعة  $(\Omega)$  للنقط  $M(z)$  حيث  $Z$  تخيلي بحت.
  - (c) مثل المجموعتين  $(\Gamma)$  و  $(\Omega)$ .
2. لتكن  $A$  و  $B$  نقطتان ذوات اللواحق  $Z_A$  و  $Z_B$  على الترتيب حيث:  $Z_B = -2i$  و  $Z_A = 2 - i$ .

- (a) أوجد مجموعة  $(\Phi)$  للنقط  $M(z)$  حيث:  $|Z| = 1$ .
- (b) احسب  $|f(z) - 1| \times |z + 2i|$  ثم استنتج انه: من أجل النقط  $M(z)$  من الدائرة ذات المركز  $B$  ونصف القطر  $\sqrt{5}$  فإن مجموعة النقط  $M'(Z)$  من نفس الدائرة التي يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

**التمرين 13:** لتكن الأعداد المركبة الآتية:

$$Z = \frac{Z_1}{Z_2} \quad \text{و} \quad Z_2 = 2 + 2i, \quad Z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$$

1. اكتب  $Z$  على الشكل الجبري.
2. أوجد طويلة وعمدة كل من  $Z_1, Z_2$  و  $Z$ .
3. استنتج  $\text{Sin} \frac{\pi}{12}$  و  $\text{Cos} \frac{\pi}{12}$  ثم  $\text{Sin} \frac{11\pi}{12}$  و  $\text{Cos} \frac{11\pi}{12}$ .

$$\text{ثم } \text{Sin} \frac{-7\pi}{12} \text{ و } \text{Cos} \frac{-7\pi}{12}$$

4. اكتب  $Z^{2007}$  على الشكل الجبري.
5. أوجد قيم العدد الطبيعي  $n$  حتى يكون  $Z^n$  حقيقي.
6. أوجد قيم العدد الطبيعي  $n$  حتى يكون  $Z^n$  تخيلي.

**التمرين 14:**

1. حل في  $C$  المعادلة:  $Z^3 - 8 = 0$ .
  2. المستوى مزود بمعلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، وحدة الرسم  $2cm$ . نفرض النقط  $A, B, C$  التي لواحقها على الترتيب:  $Z_C = -1 - i\sqrt{3}, Z_B = 2, Z_A = -1 + i\sqrt{3}$ .
- (a) اكتب  $Z_C$  و  $Z_A$  على الشكل المثالي.
  - (b) مثل  $A, B, C$  في المعلم  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .
  - (c) ما هي طبيعة المثلث  $ABC$ .
  - (d) أوجد  $Z_G$  لاحقة النقطة  $G$  مركز ثقل المثلث  $ABC$ .
3. لتكن  $f$  الدالة التي ترفق كل نقطة  $M(z)$  بالنقطة

$$z' = e^{2i\frac{\pi}{3}} z \quad \text{بـ: } M'(z')$$

- (a) أوجد نوع التحويل  $f$  مبينا عناصره المميزة.
- (b) أوجد لواحق صور  $A$  و  $C$  بالتحويل  $f$ .
- (c) استنتج صورة المستقيم  $(AC)$  بالتحويل  $f$ .

**التمرين 15:** اكتب الأعداد المركبة الآتية على الشكل الأسّي:

$$Z_2 = 2 \left( \text{Cos} \frac{\pi}{12} - i \text{Sin} \frac{\pi}{12} \right), \quad Z_1 = -3 \left( \text{Cos} \frac{\pi}{8} + i \text{Sin} \frac{\pi}{8} \right)$$

$$Z_4 = -5e^{-\frac{5\pi}{6}i}, \quad Z_3 = \sqrt{2} \left( \text{Sin} \frac{7\pi}{5} - i \text{Cos} \frac{7\pi}{5} \right)$$

$$Z_6 = -9(\sqrt{3} - i) \left( \text{Sin} \frac{\pi}{11} - i \text{Cos} \frac{\pi}{11} \right), \quad Z_5 = -3ie^{i\pi}$$

$$Z_7 = \frac{(\sqrt{2} - \sqrt{2}i)e^{-i\frac{7\pi}{4}} \left( \text{Sin} \frac{\pi}{8} - i \text{Cos} \frac{\pi}{8} \right)}{-3 \left( \text{Cos} \frac{2\pi}{5} - i \text{Sin} \frac{2\pi}{5} \right)}$$

**التمرين 16:** أوجد مجموعة النقط  $M(z)$  في كل حالة:

$$|2Z + 5| = 2|Z - 4|, \quad |Z - 5i| = |Z - 3 + 4i|$$

$$\text{Arg} \left( \frac{iZ}{Z} \right) = \frac{\pi}{2}, \quad \sqrt{2}|Z + 5 + 3i| = |(1 - i)\overline{Z} - 5i + 3|$$



$$Z = 1 - 3i + 5e^{i\theta} \quad / \quad \theta \in \mathfrak{R}$$

انتظروا الجديد.

الأستاذ: مبارك

تذكر جيدا: " أنك (تستطيع النجاح) في حياتك الدراسية ولو كان الناس جميعا يعتقدون أنك غير ناجح. ولكنك (لن تتجح أبدا) إذا كنت تعتقد في نفسك أنك غير ناجح".