التمرين الأول: باك علوم تجريبية[م1]

يحوي صندوق 10 كريات متماثلة لانفرق بينها باللمس ، منها 4 كرات بيضاء مرقمة بـ : 1 ، 2 ، 2 ، 3 و ثلاث كريات حمراء مرقمة بـ : 2 ، 2 ، 3 و ثلاث كريات خضراء مرقمة بـ : 2 ، 3 ، 3 .

نسحب عشوائيا و في آن واحد 3 كريات من هذا الصندوق .

نعتبر الحادثتين A : " الكريات الثلاث المسحوبة تحمل ألوان العلم الوطني ".

و B : " الكريات الثلاث المسحوبة لها نفس الرقم " .

1) أ- أحسب : $P(A)$ و $P(B)$ إحتمالي الحادثتين A و B على الترتيب .

ب- بيّن أن : $P(A\cap B)=\frac{1}{20}$ ثم استنتج $P_A(B)$ و $P(A\cup B)$.

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة عملية سحب عدد الكريات التي تحمل رقما فرديا .

عرّف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X و احسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

التمرين الثاني: باك تقني رياضي[م2]

كيس به 7 كريات متماثلة ، لانفرق بينها باللمس، منها 3 بيضاء و4 خضراء .

نسحب عشوائيا و في آن واحد كريتين من الكيس .

I) 1)أحسب إحتمال الحادثة A : " سحب كريتين مختلفتين في اللون " .

2)أحسب إحتمال الحادثة B : " سحب كريتين من نفس اللون " .

II) نقترح اللعبة التالية : للمشاركة يدفع اللاعب $\alpha(DA)$ ، (حيث α عدد طبيعي معطى و DA تعني دينار جزائري).

فإذا سحب كريتين بيضاوين يتحصل على $100DA$ ، و إذا سحب كريتين مختلفتين في اللون يتحصل على $50DA$ ،

و إذا سحب كريتين خضراوين يخسر ما دفعه . و ليكن X المتغير العشوائي الذي يمثل ربح أو خسارة اللاعب بدلالة α .

1) برّر أن قيم المتغير العشوائي هي $\{100-\alpha,50-\alpha,-\alpha\}$ ثم عرّف قانون إحتماله .

2) بيّن أن الأمل الرياضياتي للمتغيّر العشوائي X بدلالة α هو : $E(X)=-\alpha+\frac{300}{7}$.

ثم جد أكبر قيمة ممكنة لـ α حتى تكون اللعبة في صالح اللاعب.

التمرين الثالث: باك رياضيات[م2]

كيس يحوي 9 كريات لا نفرق بينها باللمس موزعة كما يلي:

خمس كريات حمراء مرقمة بـ : 1 ، 1 ، 2 ، 2 ، 2 و ثلاث كريات خضراء مرقمة بـ : -3 ، 2 ، 3 و كرية بيضاء مرقمة بـ : -1 .

نسحب عشوائيا 4 كريات في آن واحد .

1) أحسب إحتمال الحوادث التالية :

A : " الحصول على أربع كريات من نفس اللون " .

B : " الحصول على كرية بيضاء على الأكثر " .

C : " الحصول على أربع كريات مجموع أرقامها معدوم " .

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة سحب عدد الكريات الخضراء المتبقية في الكيس .

أ- عيّن قيم المتغير العشوائي X ثم عرّف قانون إحتماله .

ب- أحسب الأمل الرياضياتي $E(X)$ للمتغير العشوائي X .

جـ- أحسب إحتمال الحادثة : "$X^2-X>0$" .

تصحيح التمرين الأول: باك علوم تجريبية [م1]

عدد السحبات الممكنة هو: $C_{10}^3 = \dfrac{10!}{3!\times 7!} = 120$.

1) أ ـ حساب الإحتمالات :

A : " الكريات الثلاث المسحوبة تحمل ألوان العلم الوطني ". أي الحصول على ثلاثة ألوان الأبيض و الأحمر و الأخضر .

$$P(A) = \frac{C_4^1 \times C_3^1 \times C_3^1}{120} = \frac{36}{120} = \frac{3}{10}$$

B : " الكريات الثلاث المسحوبة لها نفس الرقم " .

$$P(B) = \frac{C_5^3 + C_4^3}{120} = \frac{14}{120} = \frac{7}{60}$$

ب ـ تبيان أن : $P(A \cap B) = \dfrac{1}{20}$.

$P(A \cap B)$ هو إحتمال سحب ثلاث كريات تحمل نفس الرقم و من ألوان مختلفة .

$$P(A \cap B) = \frac{C_2^1 \times C_2^1 \times C_1^1 + C_1^1 \times C_1^1 \times C_2^1}{120} = \frac{6}{120} = \frac{1}{20}$$

حساب الإحتمال الشرطي $P_A(B)$: $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{\frac{1}{20}}{\frac{3}{10}} = \dfrac{1}{6}$.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{36}{120} + \frac{14}{120} - \frac{6}{120} = \frac{44}{120} = \frac{11}{30} .$$

2) X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة عملية سحب عدد الكريات التي تحمل رقما فرديا .

لدينا : $X \in \{0;1;2;3\}$.

$P(X=0) = \dfrac{C_5^3}{120} = \dfrac{10}{120}$ ، $P(X=1) = \dfrac{C_5^1 \times C_5^2}{126} = \dfrac{50}{120}$ ، $P(X=2) = \dfrac{C_5^2 \times C_5^1}{126} = \dfrac{50}{120}$

$P(X=3) = \dfrac{C_5^3}{126} = \dfrac{10}{120}$

قانون الإحتمال:

X_i	0	1	2	3
$P(X = X_i)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$

ب ـ حساب الأمل الرياضياتي $E(X)$:

$$E(X) = 0\times\frac{1}{12} + 1\times\frac{5}{12} + 2\times\frac{5}{12} + 3\times\frac{1}{12} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2} .$$

تصحيح التمرين الثاني : باك تقني رياضي [م2]

كيس به 7 كريات متماثلة ، لانفرق بينها باللمس، منها 3 بيضاء و 4 خضراء .

نسحب عشوائيا و في آن واحد كريتين من الكيس .

عدد السحبات الممكنة هو: $C_7^2 = \dfrac{7!}{2!\times 5!} = 21$.

I) حساب الإحتمالات :

1) الحادثة A : " سحب كريتين مختلفتين في اللون " .

$$P(A) = \frac{C_3^1 \times C_4^1}{21} = \frac{3\times 4}{21} = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$$

2) الحادثة B : " سحب كريتين من نفس اللون " .

$$P(B)=1-P(A)=\frac{3}{7}$$

II) X المتغير العشوائي الذي يمثل ربح أو خسارة اللاعب بدلالة α :

1) تبرير أن قيم المتغير العشوائي X هي : $\{100-\alpha, 50-\alpha, -\alpha\}$

اللاعب يدفع αDA ويسحب كرتين في آن واحد .

الحصول على كرتين خضراوين ، الحصول على كرتين بيضاوين ، الحصول على كرة بيضاء وكرة خضراء .

الحصول على كرتين بيضاوين يربح $100DA$ ومنه $X=100-\alpha$.

الحصول على كرتين مختلفتين يربح $50DA$ ومنه $X=50-\alpha$.

الحصول على كرتين خضراوين يخسر ما دفعه ومنه $X=-\alpha$.

لدينا : $P(X=100-\alpha)=\frac{C_3^2}{21}=\frac{3}{21}$ ، $P(X=50-\alpha)=P(A)=\frac{12}{21}$ ، $P(X=-\alpha)=\frac{C_4^2}{21}=\frac{6}{21}$

قانون الإحتمال :

X	$100-\alpha$	$50-\alpha$	$-\alpha$
$P(X=x_i)$	$\frac{3}{21}$	$\frac{12}{21}$	$\frac{6}{21}$

2) إثبات أن الأمل الرياضياتي للمتغير العشوائي X هو : $E(X)=-\alpha+\frac{300}{7}$.

لدينا : $E(X)=(100-\alpha)\left(\frac{3}{21}\right)+(50-\alpha)\left(\frac{12}{21}\right)+(-\alpha)\left(\frac{6}{21}\right)$

و منه : $\frac{-21\alpha+900}{21}=\frac{300-3\alpha+600-12\alpha-6\alpha}{21}=E(X)$ أي : $E(X)=-\alpha+\frac{300}{7}$.

- إيجاد أكبر قيمة للعدد α حتى تكون اللعبة في صالح اللاعب :

حتى تكون اللعبة في صالح اللاعب يجب أن يكون $E(X)>0$

أي : $-\alpha+\frac{300}{7}>0$ و منه $\alpha<\frac{300}{7}$ و منه $\alpha<42,85$ ، إذن أكبر قيمة لـ α هي $42DA$.

تصحيح التمرين الثالث : باك رياضيات[م2]

عدد السحبات الممكنة هو : $C_9^4=\frac{9!}{4!\times 5!}=126$.

3) حساب الإحتمالات :

A : " الحصول على أربع كريات من نفس اللون " .

$$P(A)=\frac{C_5^4}{126}=\frac{5}{126}$$

B : " الحصول على كرية بيضاء على الأكثر " .

معناه إما واحدة بيضاء وثلاث من اللونين الآخرين أو الأربع كريات كلها مختلطة بين الأحمر والأخضر .

$$P(B)=\frac{C_1^1\times C_8^3+C_8^4}{126}=\frac{126}{126}=1$$

C : " الحصول على أربع كريات مجموع أرقامها معدوم " .

معناه : $\{-3;-1;2;2\}$ أو $\{-3;-1;2;2\}$.

و لدينا 4 كريات مرقمة بـ 2 و كرية مرقمة بـ -1 و كرية مرقمة بـ -3 و كرية مرقمة بـ 3 و كريتان مرقمتان بـ 1 .

و منه : $P(C)=\frac{C_1^1\times C_1^1\times C_4^2+C_1^1\times C_1^1\times C_1^1\times C_1^1}{126}=\frac{6+2}{126}=\frac{8}{126}$

2)أ- X هو عدد الكريات الخضراء المتبقية في الكيس .

في الكيس 9 كريات من بينها 3 كريات خضراء و منه عندما نسحب 4 كريات فإما يتبقى 3 كريات خضراء أو كريتين خضراوين أو كرية واحدة خضراء أو لا تتبقى أية كرية خضراء . و منه $X\in\{0;1;2;3\}$.

ولدينا:

$P(X=0)=\frac{C_3^3\times C_6^1}{126}=\frac{6}{126}$ ، $P(X=1)=\frac{C_3^2\times C_6^2}{126}=\frac{45}{126}$ ، $P(X=2)=\frac{C_3^1\times C_6^3}{126}=\frac{60}{126}$

$P(X=3)=\frac{C_6^4}{126}=\frac{15}{126}$

قانون الإحتمال:

X_i	0	1	2	3
$P(X=X_i)$	$\frac{6}{126}$	$\frac{45}{126}$	$\frac{60}{126}$	$\frac{15}{126}$

بـ- حساب الأمل الرياضياتي $E(X)$:

$E(X)=0\times\frac{6}{126}+1\times\frac{60}{126}+2\times\frac{45}{126}+3\times\frac{15}{126}=\frac{5}{3}$.

جـ- أحسب إحتمال الحادثة : "$X^2-X>0$" :

$X^2-X>0$ معناه $X(X-1)>0$ أي $X\in\{2;3\}$ ومنه :

$$P(X^2-X>0)=P(X=2)+P(X=3)=\frac{60}{126}+\frac{15}{126}=\frac{75}{126}=\frac{25}{42}$$