

وقل رب زدني علما

ما يجب على الطالب أن يعرف

- 1- معنى استمرارية دالة عند نقطة.
- 2- معنى استمرارية دالة (من اليسار و من اليمين) و على مجال.
- 3- التعرف على دالة مستمرة.
- 4- التعرف على دالة غير مستمرة.
- 5- معرفة نظرية Bolzano .
- 6- معرفة نظرية القيم المتوسطة.
- 7- معرفة طريقة Dichotomie

<http://bacsuc.blogspot.com>

رياضيات

سلسلة 2

2017-2016

المستوى

3 ع ت - 3 ع د

إعداد الأستاذ

مراد لحسن

الاستمرارية



قال رسول الله
صلى الله عليه و سلم

إن في الجنة بابا يقال له
الريان يدخل منه الصائمون
يوم القيامة لا يدخل منه أحد
غيرهم يقال أين الصائمون
فيقومون لا يدخل منه أحد
غيرهم فإذا دخلوا أغلق
فلج يدخل منه أحد

قال الإمام أحمد

الناس إلى العلم
أخرج منهم إلى الطعام
والشراب؛ لأن الرجل يحتاج
إلى الطعام والشراب في اليوم
مرة أو مرتين
وحاجته إلى العلم بعد
أنفاسه.

هل تعلم؟

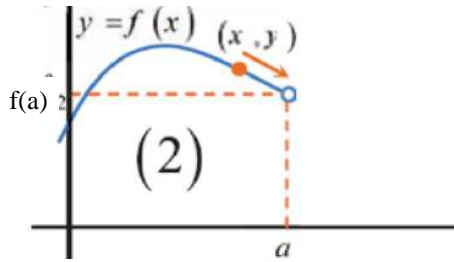
إذا حفظت في اليوم 3
آيات من القرآن الكريم
فإنك ستحفظ القرآن كله
في مدة 5 سنوات و 10
أشهر و 13 يوما

3- استمرارية دالة عند a من اليسار

f معرفة على مجال من الشكل: $]a - h ; a]$

f مستمرة عند a من اليسار إذا كانت :

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$$



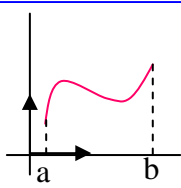
سجل

- تكون الدالة f مستمرة عند a إذا كانت
مستمرة عند a من اليمين و من اليسار.



استمرارية دالة على مجال

- f مستمرة على المجال المفتوح $]a ; b [$ إذا كانت مستمرة عند كل قيمة من هذا المجال .
- f مستمرة على المجال المغلق $[a ; b]$ إذا كانت :
- مستمرة على المجال المفتوح $]a ; b [$
- مستمرة عند a على اليمين .
- مستمرة عند b على اليسار .
- استنتج شروط الاستمرار على المجالين: $[a ; b [$, $]a ; b]$



إذا كانت f مستمرة
على المجال $[a ; b]$
فإن منحناها البياني هو
خط غير منقطع على
طول هذا المجال.

لاحظ



الطيبة .. ليست غباء !!
و إنما هي نعمة .. فقدما الأغباء

صفحة 4/1

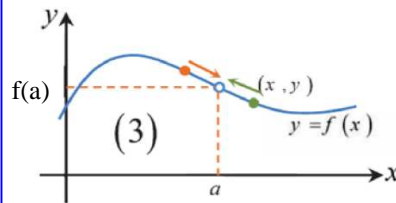
تذكر

ان لدرس الاستمرار
علاقة وثيقة
بدرس النهايات

1- استمرارية دالة عند قيمة a

f معرفة على مجال مفتوح يشمل a
 f مستمرة عند a إذا كانت :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$



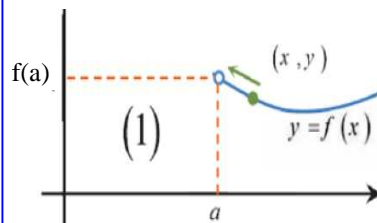
انتبه

إذا كانت f مستمرة
عند a فإن $a \in D_f$

2- استمرارية دالة عند a من اليمين

f معرفة على مجال من الشكل: $[a ; a+h [$
 f مستمرة عند a من اليمين إذا كانت :

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$



صفحة 4/1

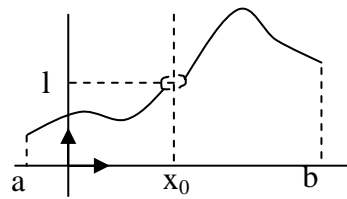
سؤال: كيف استنتج أن دالة مستمرة عند a ؟

- إذا كانت كلا من الدالتين f و g مستمرتين عند a فإن :
1. $k.f$ مستمرة عند a (k عدد حقيقي)
 2. $f+g$ مستمرة عند a (وكذلك $f-g$)
 3. $f.g$ مستمرة عند a
 4. f/g مستمرة عند a إذا كان $g(a) \neq 0$
 5. إذا كانت g مستمرة عند a وكانت f مستمرة عند $g(a)$ فإن $f \circ g$ مستمرة عند a

لتنجح يجب
أن تكون
رغبتك في
النجاح أقوى
من خوفك
من الفشل

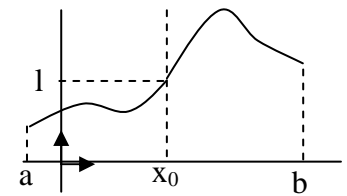


امتداد دالة بالاستمرار



الدالة f ليست مستمرة على المجال $[a; b]$
لأنها ليست مستمرة عند x_0

لنبحث عن شروط تجعل الدالة f مستمرة على $[a; b]$



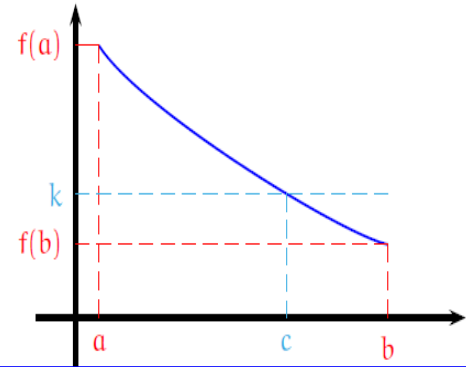
الدالة g المعرفة كما يلي:

$$\begin{cases} g(x) = f(x), & x \neq x_0 \\ g(x_0) = l \end{cases}$$

مستمرة على $[a; b]$

تسمى الدالة g امتداد للدالة f بالاستمرار عند x_0

الحل الوحيد للمعادلة: $f(x)=k$



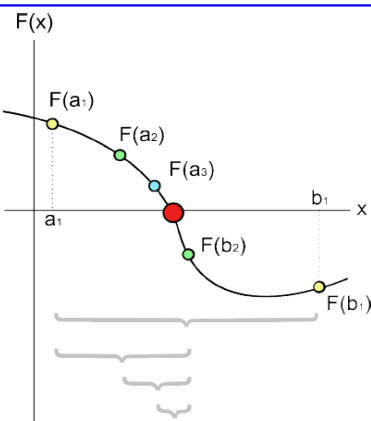
f مستمرة و رتيبة تماما على

$[a; b]$

من أجل كل عدد حقيقي k
محصور بين $f(a)$ و $f(b)$
المعادلة $f(x)=k$
تقبل حل وحيد c

في المجال $[a; b]$

طريقة Dichotomie (خوارزمية البحث عن الصفر لدالة)



(1) نبدأ بفصلتين a و b تحصران الصفر.

(2) في كل مرة نقسم المجال $[a; b]$ إلى نصفي مجالين $[a; c]$ و $[c; b]$

$$c = (a+b)/2$$

(3) هو منتصف المجال $[a; b]$
نحافظ على نصف المجال الذي يحتوي الصفر ثم نقسمه إلى نصفي مجالين , و نواصل بنفس الطريقة حتى نحصل على حصر أصغر ما يمكن.

سؤال: كيف اثبت أن دالة مستمرة على مجال تعريفها؟

الجواب : تذكر أن

كل الدوال التالية مستمرة على مجال تعريفها:

- كثيرات الحدود (مستمرة على \mathbb{R})
- الناطقة.
- الجذرية.
- المتثلثة.
- الأسية.
- اللوغارتمية.

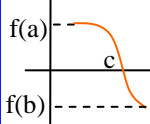
حل المعادلة: $f(x)=0$



نظرية Bolzano

إذا كانت f دالة مستمرة على $[a; b]$
و كان $f(a) \times f(b) < 0$

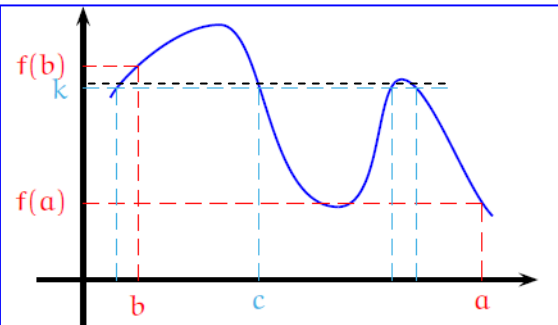
فإنه يوجد على الأقل $c \in]a; b[$
بحيث: $f(c)=0$



حل المعادلة: $f(x)=k$

نظرية القيم المتوسطة

إذا كانت f دالة مستمرة على $[a; b]$
و $f(a) \neq f(b)$ فإنه من أجل كل عدد k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ يوجد على الأقل $c \in]a; b[$
يحقق: $f(c)=k$



أنا لا أخشى العواصف لأنني أتعلم كيف أبحر
بسفينتي...



I'm not afraid of storms,
for I'm learning to sail my ship.
Louisa May Alcott

مفاتيح النجاح الدراسي : 2- العطاء يساوي الأخذ

النجاح عمل وجد وتضحية وصبر، ومن منح طموحه صبراً وعملاً وجداً، حصد نجاحاً وثمراً .. فاعمل واجتهد وابذل الجهد لتحقيق النجاح والطموح والهدف .. فمن جدّ وجد ومن زرع حصد. وقل من جد في أمر يحاوله * * * وأستعمل الصبر إلا فاز بالظفر



f دالة معرفة بالعبارة:

تمرين 7

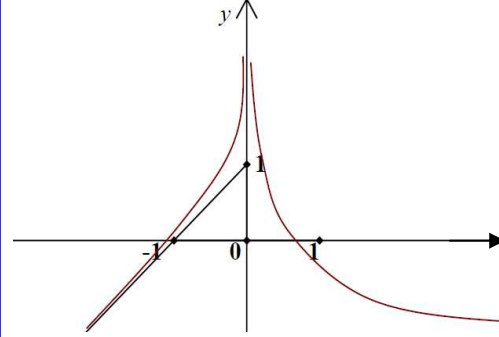
$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$$

1. برر استمرارية f على R
2. احسب النهايات عند $+\infty$ و $-\infty$
3. ادرس اتجاه تغير الدالة و شكل جدول تغيراتها.
4. اثبت أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل وحيد α في المجال

$$]1.6 ; 1.7 [$$

5. استنتج حسب قيم x إشارة f(x) عين حصراً للعدد α سعته 10^{-2}

(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد متجانس.



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} ; \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - x$$

تمرين 1

1. حدد D_f
2. حدد النهايات التالية :
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) ; \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) ; \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
3. هل f مستمرة عند 0 ؟
4. حدد النهايات التالية :

f دالة معرفة كما يلي:

تمرين 8

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}, & x \geq 1 \\ f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 1, & x < 1 \end{cases}$$

ادرس استمرارية f على R

عين العدد الحقيقي k حتى تكون الدالة f مستمرة عند العدد 2

تمرين 2

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x-2} & ; x \geq 2 \\ f(x) = x^2 + kx + 1 & ; x < 2 \end{cases}$$

عين العدد الحقيقي k حتى تكون الدالة f مستمرة على: R

تمرين 3

$$\begin{cases} f(x) = x^2 + kx + 1 & ; x > -1 \\ f(x) = \frac{x+1}{x-2} & ; x \leq -1 \end{cases}$$

f دالة معرفة على R كما يلي:

تمرين 9

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} & ; x \neq 1 \\ f(x) = b \end{cases}$$

عين قيمة العدد b حتى تكون f مستمرة على R

احسب $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$ و $f(3)$ ثم ادرس الاستمرار عند 3

تمرين 4

f دالة معرفة على $R - \{2\}$ كما يلي:

اثبت أن المعادلة $f(x) = -0.5$ تقبل حل وحيد في المجال: $] -1 ; 1 [$ فسر ذلك هندسياً .

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1} - 2 & ; x > 3 \\ \frac{x-3}{x-2} & ; x \leq 3 \end{cases}$$

f دالة معرفة و مستمرة على R جدول تغيراتها معطى :

تمرين 5

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'(x)	-	0	+
f(x)	$+\infty$	1	$+\infty$

1. بين أن المنحنى البياني للدالة لا يقطع حامل محاور الفواصل.
2. بين أن المعادلة $f(x) - 2 = 0$ تقبل حلين مختلفين في الإشارة.

من الصعب هزيمة شخص .. لم يهزمه اليأس من داخله



ادرس استمرارية الدالة f عند 2 هل الدالة f مستمرة على R علل .

تمرين 6

$$\begin{cases} f(x) = x^2 - 2x + 1 & ; x \leq 2 \\ f(x) = \frac{x+1}{x-2} & ; x > 2 \end{cases}$$

تمرين 17 دالة معرفة على R كما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = |x^2 - 1| + \alpha ; x \leq 0 \\ f(x) = x - \alpha + \beta ; x > 0 \end{cases}$$

اوجد علاقة بين α و β حتى تكون f مستمرة على R



مسألة

الجزء 1:

دالة معرفة على R كما يلي:

$$f(x) = x^3 - 3x + 5$$

و (C_f) تمثيلها البياني .

1. ادرس تغيرات الدالة f على R
2. بين أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث $-3 < \alpha < -2$.
3. استنتج إشارة f(x) على R
4. جد حصرًا للعدد α بتقريب 10^{-2}

الجزء 2:

g دالة معرفة على R كما يلي:

$$g(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 5x$$

1. ادرس تغيرات الدالة g
2. (أ) اثبت أن:
$$g(\alpha) = \frac{-3\alpha(\alpha - 5)}{4}$$
 (ب) جد حصرًا لـ $g(\alpha)$ ثم استنتج عدد جذور $g(x)$



تمرين 10 دالة معرفة على R كما يلي:

1. احسب :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1 - \sqrt{1+x^2}}{x} ; x \neq 0 \\ f(0) = \alpha \end{cases} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) ; \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

ثم فسر النتيجة هندسيًا.

2. عين قيمة العدد الحقيقي α حتى تكون f مستمرة عند 0

تمرين 11 دالة معرفة على R بجدول تغيراتها المعطى :

x	$-\infty$	3-	2-	3	$+\infty$
f(x)	$-\infty$	1	-3	+4	3

ما هو عدد حلول المعادلة $f(x)=0$ ؟

تمرين 12 دالة معرفة كما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1} ; x \neq 1 ; x \neq -1 \\ f(-1) = 3 \end{cases}$$

- عين مجموعة التعريف
- ادرس استمرارية عند -1

تمرين 13 دالة معرفة كما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{ax + b}{x^2 + 4} ; x > 0 \\ f(x) = \sqrt{2x^2 + 1} ; x \leq 0 \end{cases}$$

- عين العدد الحقيقي b حتى تكون الدالة f مستمرة عند 0

تمرين 14 دالة معرفة كما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = x + \frac{|x-1|}{x-1} ; x \neq 1 \\ f(1) = 2 \end{cases}$$

1. عين مجموعة التعريف
2. ادرس استمرارية f على مجموعة تعريفها.

تمرين 15 دالة معرفة R كما يلي: $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+d}$

عين الأعداد الحقيقية a; b; c; d بحيث :

- المنحنى (C_f) يشمل النقطة $A(0;4)$
- المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل عند $\pm\infty$ معادلته $y=2x+3$
- المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $x=1$

تمرين 16 دالة معرفة على $[0 ; +\infty[$ كما يلي :

$$f(x) = x + 1 + \sqrt{x^2 + 4x}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم .

1. بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=2x+3$ مقارب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.
2. ادرس الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) .