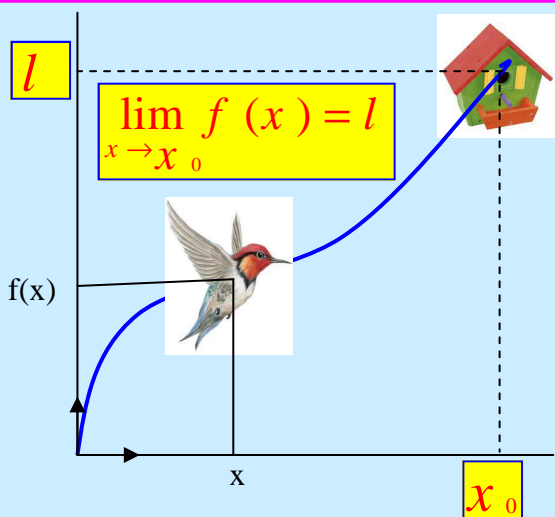


## وقل رب زدني علما

ما يجب على الطالب أن يعرف

- 1- معنى نهاية
- 2- حساب نهاية (من اليسار و من اليمين)
- 3- النهايات الاعتيادية
- 4- التحكم في إزالة عدم التعيين
- 5- التحكم في تعيين المستقيمات المقاربة

<http://bacsuc.blogspot.com>



رياضيات  
سلسلة 1  
2017-2016  
المستوى  
ع 3 - ع 3  
إعداد الأستاذ  
مراد لحسن

## النهايات

قال رسول الله  
صلى الله عليه و سلم

تَعَلَّمُوا الْعِلْمَ ..  
فَإِنَّ تَعَلَّمَهُ قُرْبَةً إِلَى اللَّهِ  
عَزَّ وَجَلَّ،

وَتَعْلِيمَهُ لِمَنْ لَا يَعْلَمُهُ  
صَدَقَّةٌ،



قال الحسن بن علي بن  
أبي طالب:  
" علم الناس علمك،  
وتعلم علم غيرك، فتكون  
قد أتقنت علمك، وعلمت  
ما لم تعلم." "

### هل تعلم ؟

إذا حفظت في اليوم 3  
آيات من القرآن الكريم  
فإنك ستحفظ القرآن كله  
في مدة 5 سنوات و 10  
أشهر و 13 يوما

### عمليات على النهايات

$$\frac{k}{\infty} = 0$$

النتيجة:  $0^+$  أو  $0^-$   
حسب إشارة  $k$  و  $\infty$

$$\frac{k}{0} = \infty$$

النتيجة:  $+\infty$  أو  $-\infty$   
حسب إشارة  $k$  و  $0$

$$\infty + k = \infty$$

النتيجة:  $+\infty$  أو  $-\infty$   
حسب إشارة  $\infty$

$$\infty \times k = \infty$$

النتيجة:  $+\infty$  أو  $-\infty$   
حسب إشارة  $k$  و  $\infty$

### حالات عدم التعيين

$$\frac{\infty}{\infty}; \frac{0}{0}; \infty - \infty; 0 \times \infty$$

أشهرها

إذا صادفنا حالة من هذه الحالات يجب  
إزالتها و ذلك بإعادة صياغة الدالة  
بشكل آخر. وهنا تتدخل الخبرة و كثرة  
الممارسة. لذا عليكم أبنائي الطلبة  
البدء في محاولة الحل كتابيا .  
معتمدين على هذه المهارات التي  
سوف أوردتها لكم و التي تساعد في  
التخلص من اغلب هذه الحالات .

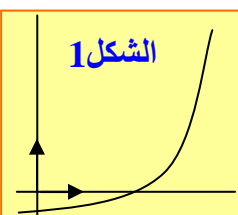
مهارة 1: دالة كثير الحدود  
و الدالة الناطقة



- 1) النهاية عند  $\pm\infty$  لدالة كثير حدود هي  
نهاية حدها الأعلى درجة عند  $\pm\infty$ .
- 2) النهاية عند  $\pm\infty$  لدالة ناطقة هي نهاية  
حاصل قسمة الحدين الأعلى درجة عند  $\pm\infty$ .

### مفهوم نهاية

بالتمتع في الشكل 1: نقول أن  $f(x)$  تتوول إلى  $+\infty$   
لما  $x$  يتوول إلى  $+\infty$

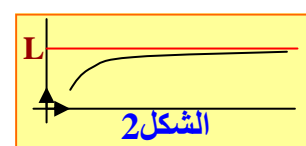


و نكتب:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

بنفس الطريقة ارسم أشكال  
تتوافق مع النهايات التالية:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

بالتمتع في الشكل 2: نقول أن  $f(x)$  تتوول إلى  $L$



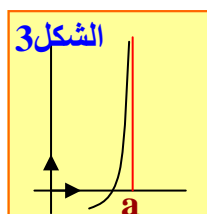
لما  $x$  يتوول إلى  $+\infty$   
و نكتب:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$

المستقيم الذي معادلته  $y=L$  هو مستقيم مقارب أفقي

بنفس الطريقة ارسم شكل  
يتوافق مع النهاية التالية:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$

بالتمتع في الشكل 3: نقول أن  $f(x)$  تتوول إلى  
 $+\infty$  لما  $x$  يتوول إلى  $a$  بقيم صغرى و نكتب:



$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$

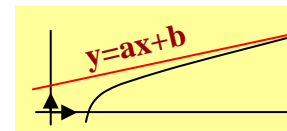
المستقيم الذي معادلته  $x=a$   
هو مستقيم مقارب عمودي

بنفس الطريقة ارسم أشكال  
تتوافق مع النهايات التالية:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty; \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$

إذا كانت  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$  فإن



المستقيم الذي معادلته  
 $y=ax+b$  هو مستقيم  
مقارب مائل

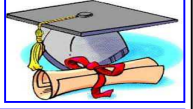
نفس النتيجة إذا كانت:  $f(x) = ax + b + g(x)$   
و كانت  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = 0$

## صورة و كلمة

ضع دائما صورتك التي تريد أن تكون عليها في عقلك و مخيلتك ، و ستجده تدريجيا نحوها ...إذا لم تهزم نفسك ، ستهزمك نفسك ...سلم النجاح لا يعاني من الازدحام في أعلاه



## مهارة 2: إخراج عامل مشترك



نفكر في استعمالها لما  $x \rightarrow \infty$  وتطبق في الحالات :  $\frac{\infty}{\infty}$ ;  $\frac{\infty}{\infty}$

في حالة  $\frac{\infty}{\infty}$  نخرج عامل مشترك من البسط و المقام و نختزل ثم نعوض فتزول حالة عدم التعيين

في حالة  $\infty - \infty$  نخرج عامل مشترك ثم نعوض فتزول حالة عدم التعيين

### تذكر

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

$$|x| = \begin{cases} x & ; x \geq 0 ; x \rightarrow 0^+, +\infty \\ -x & ; x \leq 0 ; x \rightarrow 0^-, -\infty \end{cases}$$

### انتبه

إخراج العامل المشترك المناسب يعتمد على الخبرة و الممارسة ...

## مهارة 4: الضرب و القسمة على المرافق



## مهارة 3: التحليل



نفكر في استعمالها لما تكون الدالة تتضمن أحد هذه العبارات:

$$(\sqrt{a} \pm b) ; (a \pm \sqrt{b}) ; (\sqrt{a} \pm \sqrt{b})$$

الحالة الأولى:  $x \rightarrow \infty$  وتكون حالة عدم التعيين :  $\infty - \infty$

الحالة الثانية:  $x \rightarrow a$  وتكون حالة عدم التعيين :  $\frac{0}{0}$

(1) نضرب و نقسم على المرافق .

(2) نستفيد من أحد الحالات:

$$(\sqrt{a+b})(\sqrt{a-b}) = a-b^2$$

$$(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b}) = a^2 - b$$

$$(\sqrt{a+\sqrt{b}})(\sqrt{a-\sqrt{b}}) = a-b$$

(3) نختزل و نعوض  $x=a$  فنجد النهاية المطلوبة .

نفكر في استعمالها لما  $x \rightarrow a$  وتكون حالة عدم التعيين :  $\frac{0}{0}$

(1) نحلل البسط و المقام إلى جداء عوامل أحدها العامل:  $(x-a)$   
(2) نختزل العامل  $(x-a)$  من البسط و المقام  
(3) نعوض  $x=a$  نحصل على النهاية المطلوبة.

## مهارة 5: الحصر و المقارنة



نفكر في استعمالها في عدة حالات أشهرها:

(1) الدوال المثلثية عند الحصول على :  $\sin \infty$  أو  $\cos \infty$   
(2) الدوال الأسية و اللوغارتمية ( سوف نتناولها في السلاسل الخاصة بها)

### الحصر

إذا كان  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = l$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = l$

و كان  $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$

فإن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$

### المقارنة

إذا كان  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$  إذا كان  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

و كان  $f(x) \leq g(x)$  و كان  $f(x) \geq g(x)$

فإن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$  فإن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

### تذكر

$$-1 \leq \cos x \leq +1 ; -1 \leq \sin x \leq +1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{ax} = 1$$

## مهارة 6: نظرية l'Hospital



تستعمل هذه النظرية في الحالتين  $\frac{\infty}{\infty}$ ;  $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{h(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g'(x)}{h'(x)}$$

هذه النظرية تعتبر آلة حاسبة للنهاية بالفعل .. و لأن استعمالها يجعل الطالب يهمل التحكم في الكثير من المهارات السابقة فقد نزلت من برنامج التعليم الثانوي ننصح الطالب باستعمالها فقط للتأكد من النتائج ..

و الآن ..  
خذ قلم و ورقة  
و أبدء

صفحة 4/2



لا يسعى للنجاح من لا يملك طموحا و لذلك كان الطموح هو الكنز الذي لا يفنى .. فكن طموحا و انظر إلى المعالي .. فهذا عمر بن عبد العزيز خامس الخلفاء الراشدين يقول معبرا عن طموحه : ( إن لي نفسا تواقه , تمتنت الإمارة فنالتها , و تمتنت الخلافة فنالتها , و أنا الآن أتوق إلى الجنة و أرجو أن أنالها )

**سؤال**

ما الفرق بين عدم التعيين و عدم التعريف ؟

**الجواب**

في حالة عدم التعيين يكون الجواب موجود فبتطبيق احد المهارات السابقة تزول هذه الحالة و من ثم نعين نهاية الدالة إن وجدت.  
أما في حالة عدم التعريف فالجواب غي موجود إطلاقا .

**انتبه**

**المهارة 4 لا تطبق في حالة دوال من الشكل:**

$$\begin{array}{c} \sqrt{x} - 4 - x^2 \\ \neq \\ \sqrt{x} \neq x^2 \end{array} \quad \begin{array}{c} 3x - \sqrt{4x^2} - 5 \\ \neq \\ 3x \neq \sqrt{4x^2} \end{array}$$

**لاحظ** **لاحظ**

لأنه بعد الضرب في المرافق و القسمة عليه لن يتم الاختزال بل تنتج حالة عدم تعيين من جديد.

**المهارة 4 تطبق في حالة دوال من الشكل:**

$$\begin{array}{c} \sqrt{9x^2 + 5} - 3x \\ \text{لاحظ} \\ \sqrt{9x^2} = 3x \end{array} \quad \begin{array}{c} x - \sqrt{x^2 + 3} \\ \text{لاحظ} \\ x = \sqrt{x^2} \end{array}$$

**تمرين 1: أحسب النهايات التالية (مساعدة: استعمل المهارة 1)**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 4}{x^2 + x + 1} (3 \lim_{x \rightarrow -\infty} (-4x^3 + 5x - 2)) (2 \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 - 2x + 10)) (1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x - 3}{2x^2 - x - 1} (6 \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} (5 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-8x^3 + 1}{4x + 16} (4$$

**تمرين 2: احسب النهايات التالية (مساعدة: استعمل المهارة 2)**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x + 1} - x \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt{x} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x + \sqrt{1 - x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 5}}{1 - 3x} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x - 1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

**تمرين 3: احسب النهايات التالية (مساعدة: استعمل المهارة 3)**

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 3}{x - 1} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 2x} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{\sqrt{x} - \sqrt{2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x + 3)^2 - 4}{x^2 - 7x - 8} \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - x^2 - 18}{x^2 - 9}$$

**تمرين 4: احسب النهايات التالية (مساعدة: استعمل المهارة 4)**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{2x^2 + 3} - \sqrt{2x^2 - 5})$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{9x^2 - 4} - 3x) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x - 1} - \sqrt{x^2 + x + 1})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + 9} - 3}{x} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\sqrt{3x - 2} - \sqrt{x}} \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x + 10} - 4}{x - 3}$$

**تمرين 5: احسب النهايات التالية (مساعدة: استعمل المهارة 5)**

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sin 5x} \quad 3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} \quad 4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x} \quad 5) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \sin \frac{x}{2}}{\pi - x}$$

**تمرين 7:**

نريد حساب النهاية عند  $+\infty$  للدالة :

$$f : x \mapsto \frac{\sqrt{1 + x^2}}{x}$$

- برهن أنه من أجل  $x > 0$   $x^2 < 1 + x^2 < (1 + x)^2$
- استنتج من أجل  $x > 0$  حصر  $f(x)$
- استنتج نهاية  $f$  عند  $+\infty$

**تمرين 6:**

باستعمال نظريات المقارنة احسب النهايات عند  $+\infty$  و  $-\infty$  لكل دالة من الدوال التالية ان وجدت.

$$f(x) = \frac{x \sin x}{x^2 + 1} \quad g(x) = \frac{1 + \cos x}{\sqrt{x}}$$



المسجد هو مالم يكتبه الله لك  
و ليس ما عجزت عنه أنت

تذكر دائما أن المحاولة هي أول طريق للنجاح...



دراسة الفروع اللانهائية و البحث عن المقارب المائل  
( خاص بالرياضي )

إذا كانت :  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$  نتبع المراحل التالية:



إن أبواب الإنجازات تتسع لذلك  
الشخص الذي يرى في الأشياء  
التافهة إمكانات غير محدودة.

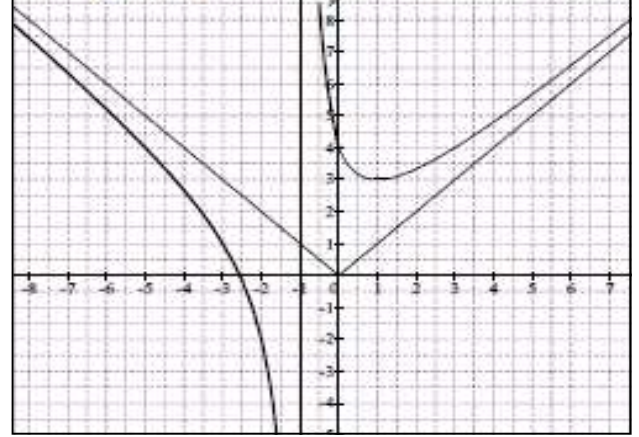
وليام آرنورد

facebook.com/hikam.wa.aqwal

تحكم في القراءة البيانية

تمرين 8

f دالة معرفة على المجال  $R - \{-1\}$   
(C<sub>f</sub>) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس كما في  
الشكل:



بقراءة بيانية :

1. احسب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها.
2. شكل جدول تغيرات الدالة .
3. عين معادلات المستقيمات المقاربة للمنحنى (C<sub>f</sub>).
4. أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C<sub>f</sub>) و المستقيمين المقاربين المائلين .

تحكم في تفسير النتائج

تمرين 9

f دالة معرفة على المجال  $R - \{-1\}$   
(C<sub>f</sub>) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس يعطي  
جدول تغيراتها كما يلي:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f(x)	2	$+\infty$	2

اجب بـ صحيح أو خطأ على كل سؤال مما يلي  
مع التبرير

1. المستقيم الذي معادلته  $y=2$  هو مستقيم مقارب للمنحنى (C<sub>f</sub>).
2. المعادلة  $f(x)=0$  تقبل حلا وحيدا .
3. مجموعة حلول المتراجحة  $f(x)>0$  هي  $R - \{-1\}$ .
4. في المجال  $]-\infty; -1[$  يكون  $f(-2)>f(x)$  لما  $x < -2$ .
5. النقطة A (-3;1) تنتمي إلى المنحنى (C<sub>f</sub>).

الرسم	النتيجة	$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax]$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$
	يوجد فرع قطع مكافئ باتجاه محور الفواصل		0
	يوجد فرع قطع مكافئ باتجاه محور القترائب		$+\infty$ أو $-\infty$
	يوجد فرع قطع مكافئ باتجاه المستقيم $y = ax$	$+\infty$ أو $-\infty$	$a \neq 0$
	يوجد مستقيم مقارب مائل معادلته $y = ax + b$	b	

تمرين إضافي : احسب النهايات

- 2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt{1+x}}{x}$
- 1)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - 3x + 2}$
- 4)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+4x} - \sqrt{1+3x}}$
- 3)  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x + 2}{x + 3}$
- 6)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$
- 5)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{\sqrt{x+2} - \sqrt{x}}$
- 7)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{\sqrt{x} - 2}$
- 8)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x+5} - 3}{\sqrt{x} - \sqrt{2x-4}}$
- 9)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x+1} - 1}$
- 10)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2x-1}}{x-1}$
- 11)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x + \sqrt{4x^2 + x + 1}}{-4x - \sqrt{x^2 + 1}}$
- 12)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - \sqrt{x^2 + 1}}{x - \sqrt{4x^2 + x}}$
- 13)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x + \sqrt{x}$
- 14)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2 + 1} - x]$



يوما ما  
سيمر شريط حياتك امام عينيك فحاول ان  
تجعله يستحق المشاهدة