

التمرين الأول: نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة بـ :

$$\begin{cases} u_0 = -1; u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n \end{cases}$$

(1) أحسب :  $u_2, u_3$ .

(2) نعتبر المتتاليتين  $(v_n)$  و  $(w_n)$  حيث :

$$w_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n, \quad v_n = 2^n u_n$$

a. بين أن  $(w_n)$  متتالية هندسية واكتب  $w_n$  بدلالة  $n$ .

b. بين أن  $(v_n)$  متتالية حسابية واكتب  $v_n$  بدلالة  $n$ .

c. استنتج  $u_n$  بدلالة  $n$ .

(3) بين أنه من أجل  $n \geq 2$  أن :  $\left(\frac{3}{2}\right)^n \geq n$

(4) أوجد  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n}$  ثم  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$

التمرين الثاني :

لتكن  $(u_n)$  ،  $(v_n)$  متتاليتين عدديتين معرفتين بما يلي :

$$v_n = u_{n+1} - u_n, \quad \begin{cases} u_0 = 0; u_1 = 1 \\ u_{n+2} = 10u_{n+1} - 9u_n \end{cases}$$

لتكن  $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_{n-1}$  حيث :

(1) بين أن  $(v_n)$  متتالية هندسية ، ثم اكتب  $v_n$  بدلالة  $n$ .

(2) احسب  $S_n$  بدلالة  $n$ . استنتج عبارة  $u_n$  بدلالة  $n$ .

(3) نعتبر المتتالية  $(w_n)$  حيث :  $w_n = u_{n+1} - 9u_n$ .

a. بين أن  $(w_n)$  ثابتة ثم استنتج أن :  $u_{n+1} = 9u_n + 1$ .

b. باستعمال  $(v_n)$  و  $(w_n)$  استنتج  $u_n$  بدلالة  $n$  بطريقة أخرى.

c. احسب  $S'_n$  بدلالة  $n$  حيث :  $S'_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1}$ .

التمرين الثالث :

نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة بـ :  $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \end{cases}$

(1) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  غير معدوم :  $0 < u_n < 2$ .

(2) بين باستعمال البرهان بالتراجع أن  $(u_n)$  متزايدة تماما.

(3) بين بدون استعمال البرهان بالتراجع أن  $(u_n)$  متزايدة تماما.

(4) استنتج تقارب  $(u_n)$  ثم أوجد  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ .

(5) بين أنه إذا كان  $n \geq 1$  فإن :  $2 - u_{n+1} < \frac{2 - u_n}{2}$ .

(6) استنتج أنه إذا كان  $n \geq 1$  فإن :  $0 < 2 - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ .

(7) استنتج  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ .

التمرين الرابع :

أثبت انه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_n \neq 3$  حيث  $(u_n)$  متتالية

عددية معرفة كما يلي :  $u_0 = 2$  و  $u_{n+1} = \frac{5u_n - 6}{6 - u_n}$

التمرين الخامس : نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة بـ :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2} \left( u_n + \frac{4}{u_n} \right) \quad \text{و} \quad u_0 = \frac{5}{2}$$

(1) احسب  $u_1, u_2$ .

(2) بين أن :  $u_n > 2$  من أجل كل عدد طبيعي  $n$ .

(3) بين أن المتتالية  $(u_n)$  متناقصة تماما ثم استنتج أن :  $u_n < \frac{5}{2}$ .

(4) استنتج تقارب  $(u_n)$ .

(5) أ - تأكد أن :  $u_{n+1} - 2 = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{2}{u_n} \right) (u_n - 2)$

ب - بين أن :  $0 < u_{n+1} - 2 \leq \frac{1}{10} (u_n - 2)$

ج - استنتج أن :  $0 < u_n - 2 \leq \left(\frac{1}{10}\right)^n \times \frac{1}{2}$

هـ - اوجد  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$  بطريقتين مختلفتين .

التمرين السادس :

لتكن  $(u_n)$  ،  $(v_n)$  متتاليتين عدديتين معرفتين بما يلي :

$$\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \frac{u_n + 4v_n}{5} \end{cases}, \quad \begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$$

ضع  $w_n = u_n - v_n$

(1) بين أن  $(w_n)$  متتالية هندسية ثم أوجد  $w_n$  بدلالة  $n$  و  $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n$

(2) ادرس رتبة كل من :  $(u_n)$  و  $(v_n)$ .

(3) بين أن :  $1 \leq v_n \leq u_n \leq 2$ .

(4) استنتج تقارب  $(u_n)$  و  $(v_n)$  وأن لهما نفس النهاية  $l$ .

(5) لتكن  $(t_n)$  متتالية حيث :  $t_n = 2u_n + 5v_n$

- بين أن  $(t_n)$  ثابتة محددًا قيمتها ثم استنتج قيمة العدد  $l$

التمرين السابع :

(1)  $f_1$  دالة عددية معرفة على  $[0; +\infty[$  بـ :

$$f_1(x) = 2x - 2 + \ln(x^2 + 1)$$

- ادرس تغيرات الدالة  $f$  مشكلا جدول تغيراتها.

(2) لتكن  $(f_n)_{n>0}$  متتالية الدوال المعرفة على  $[0; +\infty[$  بـ :

$$f_n(x) = 2x - 2 + \frac{\ln(x^2 + 1)}{n}$$

a. ادرس تغيرات الدوال  $(f_n)_{n>0}$  على المجال  $[0; +\infty[$ .

b. بين أن :  $f_n(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha_n$  حيث :  $\alpha_n \in ]0; 1[$ .

c. بين أن :  $f_n(\alpha_{n+1}) > 0$ .

d. بين أن : المتتالية  $(\alpha_n)$  متزايدة تماما. استنتج تقارب  $(\alpha_n)$ .

e. بين أن :  $\alpha_n = 1 - \frac{\ln(\alpha_n^2 + 1)}{2n}$

f. استنتج  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n$