حلول تمارين المتتاليات العددية- بكالوريا

2018-2008

+

ملخص شامل للوحدة

الشعبة : تسيير واقتصاد

الأستاذ: ياحي رشيد

rachid2011yahi@gmail.com

المتتاليات العددية

تسيير واقتصاد

الرجاء من كل قراء هذا العمل إن وجد أي خطا فيه مراسلتي بهدف تصحيحه.

السيرة الذاتية

1. المعلومات الشخصية:

اللقب والإسم: ياحي رشيد

تاريخ ومكان الميلاد:21/03/1989 ببوسعادة- المسيلة

الجنسية: جزائرية

الحالة الإجتماعية: متزوج

البريدالإلكتروني:rachid2011yahi@gmail.com

الفايسبوك: RachidYahiYahi

الهاتف: 0656836024

2:المؤهلات العلمية

شهادة البكالوريا 2007

شهادة الليسانس في الرياضيات 2010

شهادة الماستر في الرياضيات 2012

شهادة الدكتوراه في الرياضيات 2016

3:الخبرات العملية

استاذ تعليم ثانوي من 2012 إلى يومنا هذا

استاذ مؤقت بجامعة المسيلة من 2015 إلى 2018

4:اللغات

اللغة العربية: اللغة الأم.

اللغة الإنجليزية: قراءة – جيد، كتابة – جيد، محادثة – حسن.

اللغة الفرنسية: قراءة – جيد، كتابة – حسن، محادثة – حسن.

5:مهارات الإعلام الآلي

اتقان الوورد Word.

اتقان الكتابة بمعالج النصوص الرياضياتية والعلمية Workplace و Latex.

6:المنشورات والمداخلات العلمية

نشر اربع مقالات علمية في مجلات دولية محكمة

المشاركة في ثلاث ملتقيات وطنية

الوحدة 01:المتتاليات العددية

ملخص حول المتتاليات الحسابية والهندسية

	المتتالية الحسابية	المتتالية الهندسية
التعريف	(u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي r بحيث من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}-u_n=r$ أو $u_{n+1}=u_n+r$ ، يسمى r أساس المتتالية (u_n)	(u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي q بحيث من أجل كل عدد طبيعي n : $\frac{u_{n+1}}{u_n}=q$ أو $u_{n+1}=q\times u_n$ ، يسمى q أساس المتتالية (u_n)
عبارة الحد العام	p عدد طبيعي ، عبارة الحد العام u_n هي: $u_n=u_p+(n-p)r$	p عدد طبيعي ، عبارة الحد العام u_n هي: $u_n=u_p\times q^{n-p}$
مجموع حدود متتابعة	مجموع حدود متتابعة من متتالية حسابية يساوي: $\frac{\text{عدد الحدود}}{2}(\text{الحد الأول الوارد في المجموع}+\text{الحد الأخير})$	مجموع حدود متتابعة من متتالية هندسية أساسها $q\neq 1$ يساوي: $\text{الحد الأول الوارد في المجموع}\times\left(\frac{1-q^{\text{عدد الحدود}}}{1-q}\right)$
خاصية ثلاث حدود متتابعة	إذا كانت a ، b و c ثلاث حدود متتابعة من متتالية حسابية فإن: $a+c=2b$ أو $a+b+c=3b$	إذا كانت a ، b و c ثلاث حدود متتابعة من متتالية هندسية فإن: $a\times c=b^2$ أو $a\times b\times c=b^3$

ملاحظة عدد الحدود = دليل الحد الأخير − دليل الحد الأول الوارد في المجموع +1

البرهان بالتراجع

طريقة ومنهجية: للبرهان بالتراجع على صحة خاصية $P(n)$ متعلقة بعدد طبيعي n نتبع مايلي:

1) نتأكد من صحة الخاصية من أجل أصغر عدد طبيعي n_0 أي $P(n_0)$ محققة
2) نفرض أن $P(n)$ صحيحة من اجل عدد طبيعي n ونبرهن صحتها من اجل عدد طبيعي $n+1$ أي $P(n+1)$ صحيحة
3) وضع خلاصة

تطبيق 01

(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي $u_0=-1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n فإن: $u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+\frac{4}{3}$

1 برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n \leq 2$

حل

1 البرهان بالتراجع ان الخاصية من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n \leq 2$ صحيحة

- من أجل $n=0$ لدينا $u_0=-1\leq 2$ وبالتالي الخاصية محققة من أجل $n=0$.
- نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل عدد طبيعي n أي: $u_n \leq 2$ ونبرهن صحتها من أجل عدد طبيعي $n+1$ اي نبرهن أن: $u_{n+1}\leq 2$.

حسب الفرض لدينا: $u_n \leq 2$

نضرب الطرفين في العدد $\frac{1}{3}$ نجد: $\frac{1}{3}u_n \leq 2\times\frac{1}{3}$

نضيف للطرفين العدد $\frac{4}{3}$ نجد: $\frac{1}{3}u_n+\frac{4}{3} \leq 2\times\frac{1}{3}+\frac{4}{3}$

أي: $u_{n+1}\leq 2$

- خلاصة: حسب مبدأ الإستدلال بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \leq 2$

اتجاه تغير متتالية

نعتبر المتتالية (u_n)

1) المتتالية (u_n) متزايدة تماما تكافئ $u_{n+1}-u_n>0$ من أجل كل عدد طبيعي n .

2) المتتالية (u_n) متناقصة تماما تكافئ $u_{n+1}-u_n<0$ من أجل كل عدد طبيعي n .

3) المتتالية (u_n) ثابتة تكافئ $u_{n+1}-u_n=0$ من أجل كل عدد طبيعي n .

تطبيق 02

حدد اتجاه تغير المتتاليات العددية التالية المعرفة بحدها العام

1) $u_n=3n+2$ 2) $v_n=5\times 3^n$ 3) $w_n=4\times 3^n+9$

حل

1) دراسة إتجاه تغير المتتالية (u_n) حيث: $u_n=3n+2$.

نقوم بدراسة إشارة الفرق: $u_{n+1}-u_n$. من أجل كل عدد طبيعي n لدينا:

$$\begin{aligned} u_{n+1}-u_n &= 3(n+1)+2-(3n+2) \\ &= 3n+3+2-3n-2 \\ &= 3>0 \end{aligned}$$

وبالتالي المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

2) دراسة إتجاه تغير المتتالية (v_n) حيث: $v_n = 5 \times 3^n$.
نقوم بدراسة إشارة الفرق: $v_{n+1} - v_n$. من أجل كل عدد طبيعي n لدينا:

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= 5 \times 3^{n+1} - 5 \times 3^n \\ &= 5 \times 3^n \times 3 - 5 \times 3^n \\ &= 3^n (5 \times 3 - 5) \\ &= 3^n \times 10 > 0 \end{aligned}$$

وبالتالي المتتالية (v_n) متزايدة تماما.

3) دراسة إتجاه تغير المتتالية (w_n) حيث: $w_n = 4 \times 3^n + 9$.
نقوم بدراسة إشارة الفرق: $w_{n+1} - w_n$. من أجل كل عدد طبيعي n لدينا:

$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n &= 4 \times 3^{n+1} + 9 - (4 \times 3^n + 9) \\ &= 4 \times 3^n \times 3 + 9 - 4 \times 3^n - 9 \\ &= 3^n (4 \times 3 - 4) \\ &= 3^n \times 8 > 0 \end{aligned}$$

وبالتالي المتتالية (w_n) متزايدة تماما.

حالات خاصة (اتجاه تغير متتالية)

1) المتتالية الحسابية : تكون متتالية حسابية أساسها r
* متزايدة تماما إذا كان $r > 0$
* متناقصة تماما إذا كان $r < 0$
* ثابتة إذا كان $r = 0$

2) المتتالية من الشكل $u_{n+1} = au_n + b$: (u_0 هو الحد الأول للمتتالية (u_n)) هنا نميز حالتين:
* ادا كانت $a < 0$ فإن (u_n) ليست رتيبة (ليست متزايدة وليست متناقصة)
* ادا كانت $a > 0$ فإن (u_n) رتيبة (متزايدةأو متناقصة) لتحديد اتجاه تغيرها نحسب $u_1 - u_0$
ادا كان $u_1 - u_0 < 0$ فإن المتتالية (u_n) متناقصة تماما
اما اذا كان $u_1 - u_0 > 0$ فإن (u_n) متزايدة تماما

تطبيق 03

(u_n) متتالية حسابية أساسها $r = -3$
* استنتج اتجاه تغيرها

حل

لدينا: $r = -3 < 0$
وبالتالي (u_n) متناقصة تماما

تطبيق 04

(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي بـ :

$$\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1 \end{cases}$$

* حدد اتجاه تغيرها.

حل

* تعيين إتجاه تغير المتتالية (u_n)

المتتالية (u_n) من الشكل $u_{n+1} = au_n + b$ حيث $a = \frac{1}{2} > 0$ وبالتالي (u_n) رتيبة. ندرس إشارة الفرق: $u_1 - u_0$ لدينا: $u_1 = \frac{1}{2}u_0 + 1 = \frac{1}{2}(-2) + 1 = 0$ ومنه: $u_1 - u_0 = 0 - (-2) = 2 > 0$ وبالتالي المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

تطبيق 05

(u_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $u_{n+1} = 2u_n + 3$

1) حدد قيمة u_0 حتى تكون (u_n) متتالية ثابتة.

حل

1) (u_n) ثابتة تكافئ أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $u_{n+1} = u_n = u_0$ نعوض قيمتي u_{n+1} و u_n بـ u_0 نجد $u_0 = 2u_0 + 3$ ومنه: $u_0 - 2u_0 = 3$ وبالتالي $u_0 = -3$

ملاحظات حول المتتاليات من الشكل $u_{n+1} = au_n + b$

1) (u_n) حسابية تكافئ $a = 1$ أساسها في هذه الحالة هو $r = b$

2) (u_n) هندسية تكافئ $b = 0$ أساسها في هذه الحالة هو $q = a$

تطبيق 06

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = 3$ و من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1} = \frac{2\alpha + 1}{3}u_n - \frac{2\alpha + 4}{3}$$

1) حدد قيمة α حتى تكون (u_n) حسابية

2) حدد قيمة α حتى تكون (u_n) هندسية

حل

1) (u_n) حسابية تكافئ: $\frac{2\alpha + 1}{3} = 1$ أي: $2\alpha + 1 = 3$ ومنه: $2\alpha = 2$ وبالتالي $\alpha = 1$.

2) (u_n) هندسية تكافئ: $\frac{2\alpha + 4}{3} = 0$ أي: $2\alpha + 4 = 0$ ومنه: $\alpha = -2$.

نهاية متتالية أو مجموع حدود متعاقبة من متتالية

a عدد حقيقي

1) إذا كان $a > 1$ فإنَ $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = +\infty$

2) إذا كان $-1 < a < 1$ فإنَ $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = 0$

تطبيق 07

احسب النهايات التالية

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n$

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n + 2$

3) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{-1}{2}\right)^n + 3$

حل

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n + 2 = 2$ لأن: $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$

3) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{-1}{2}\right)^n + 3 = 3$ لأن: $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{-1}{2}\right)^n = 0$

المتتاليات المتقاربة

المتتالية (u_n) متقاربة تعني أنَ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ حيث l عدد حقيقي

تطبيق 08

هل المتتاليات التالية متقاربة؟

1) $u_n = 3^n$

2) $u_n = \left(\frac{-3}{4}\right)^n + 7$

3) $u_n = \frac{5}{3}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n + 8\right)$

حل

1) لدينا $u_n = 3^n$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$$

وبالتالي (u_n) ليست متقاربة (متباعدة).

2) لدينا $u_n = \left(\frac{-3}{4}\right)^n + 7$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{-3}{4}\right)^n + 7 = 7$$

وبالتالي (u_n) متقاربة نحو 7.

3) $u_n = \frac{5}{3}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n + 8\right)$
لدينا

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{5}{3}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n + 8\right) = \frac{5}{3} \times 8 = \frac{40}{8}$$

وبالتالي (u_n) متقاربة نحو $\frac{40}{8}$.

المتتاليات المحدودة

1) المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى اذا وجد عدد حقيقي A حيث $u_n < A$ من أجل كل عدد طبيعي n

2) المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل اذا وجد عدد حقيقي B حيث $u_n > B$ من أجل كل عدد طبيعي n

مبرهنة

1) كل متتالية متناقصة ومحدودة من الأسفل متقاربة

2) كل متتالية متزايد ومحدودة من الأعلى متقاربة

تطبيق 09

(u_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي $u_0 = -1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n فإن: $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$

أ) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n < 6$.

ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) (يطلب إستعمال ثلاث طرق مختلفة)

ج) استنتج أن (u_n) متقاربة

حل

أ) البرهان بالتراجع ان الخاصية من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n < 6$ صحيحة

- من أجل $n = 0$ لدينا $u_0 = -1 < 6$ وبالتالي الخاصية محققة من أجل $n = 0$.
- نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل عدد طبيعي n أي: $u_n < 6$ ونبرهن صحتها من أجل عدد طبيعي $n+1$ اي نبرهن أن: $u_{n+1} < 6$

حسب الفرض لدينا: $u_n < 6$

نضرب الطرفين في العدد $\frac{1}{2}$ نجد: $\frac{1}{2}u_n < \frac{1}{2} \times 6$

نضيف للطرفين العدد 3 نجد: $\frac{1}{2}u_n + 3 < \frac{1}{2} \times 6 + 3$

أي: $u_{n+1} < 6$

- خلاصة: حسب مبدأ الإستدلال بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n < 6$

ب) دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n)

طريقة 01 المتتالية (u_n) من الشكل $u_{n+1} = au_n + b$ حيث $a = \frac{1}{2} > 0$ وبالتالي (u_n) رتيبة.
ندرس إشارة الفرق: $u_1 - u_0$ لدينا: $u_1 = \frac{1}{2}u_0 + 3 = \frac{1}{2}(-1) + 3 = \frac{5}{2}$ ومنه:
$u_1 - u_0 = \frac{5}{2} - (-1) = \frac{7}{2} > 0$ وبالتالي المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

طريقة 02 نقوم بدراسة إشارة الفرق: $u_{n+1} - u_n$. من أجل كل عدد طبيعي n لدينا:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{2}u_n + 3 - u_n \\ &= -\frac{1}{2}u_n + 3 \\ &= \frac{1}{2}(6 - u_n) \end{aligned}$$

من السؤال 1 .أ) لدينا $u_n < 6$ من أجل كل عدد طبيعي n ومنه: $6 - u_n > 0$ أي $u_{n+1} - u_n > 0$ من أجل كل عدد طبيعي n وبالتالي المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

طريقة 03 نستعمل البرهان بالتارجع للبرهان على أن الخاصية

$$u_n < u_{n+1}$$

صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n

- من أجل $n = 0$ لدينا $u_0 = -1$ و $u_1 = \frac{5}{2}$ ومنه $u_0 < u_1$ وبالتالي الخاصية محققة من أجل $n = 0$.
- نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل عدد طبيعي n أي: $u_n < u_{n+1}$ ونبرهن صحتها من أجل عدد طبيعي $n+1$ اي نبرهن أن: $u_{n+1} < u_{n+2}$

حسب الفرض لدينا: $u_n < u_{n+1}$

نضرب الطرفين في العدد $\frac{1}{2}$ نجد: $\frac{1}{2}u_n < \frac{1}{2}u_{n+1}$

نضيف للطرفين العدد 3 نجد: $\frac{1}{2}u_n + 3 < \frac{1}{2}u_{n+1} + 3$

أي: $u_{n+1} < u_{n+2}$

- خلاصة: حسب مبدأ الإستدلال بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} < u_{n+2}$ وبالتالي المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

ج) بما أن (u_n) متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى بالعدد 6 فإنها متقاربة نحو 6 .

التمرين01-بكالوريا 2008 الموضوع الأول

(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي:

$$\begin{cases} u_0 &= \alpha; \quad (\alpha \in \mathbb{R}) \\ u_{n+1} &= \dfrac{2}{3}u_n - \dfrac{8}{9}; \quad (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

1 برهن بالتراجع أنه في حالة $\alpha = -\frac{8}{3}$ تكون المتتالية (u_n) ثابتة.

2 في كل مايلي $\alpha = 2$ ، ونعرف المتتالية العددية (v_n) كمايلي : $v_n = u_n + \frac{8}{3}$.

أ) احسب الحدود u_1 ، u_2 .

ب) اثبت أن (v_n) متتاليةهندسية يطلب تعيين أساسها q وحدها الأول v_0.

جـ) اكتب عبارة u_n بدلالة n . واحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

التمرين02-بكالوريا 2008 الموضوع الثاني

(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي: $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n فإن: $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 1$

1 احسب الحدود u_1 ، u_2 و u_3 .

2 أ) أثبت بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geq -2$.

ب) حدد اتجاه تغير المتتالية (u_n) . ماذا تستنتج؟

3 (v_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كمايلي: $v_n = u_n + 2$.

أ) بين أن المتتالية (v_n) هندسية.

ب) عبر بدلالة nعن الحد العام v_n ثم u_n .

جـ) احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

د) احسب، بدلالة n ، المجموع S_n حيث:

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$$

التمرين03-بكالوريا 2009 الموضوع الأول

(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي $u_0 = -1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n فإن: $3u_{n+1} = u_n + 4$

1 أ) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n \leq 2$.

ب) بين أن المتتالية (u_n) متزايدة.

جـ) استنتج مع التبرير أن المتتالية (u_n) متقاربة.

2 نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n - 2$.

أ) بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تحديد حدها الأول و أساسها .

ب) أكتب الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج الحد العام u_n بدلالة n .

جـ) احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

د) احسب، بدلالة n المجموع S_n حيث:

$$S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$$

التمرين04-بكالوريا 2009 الموضوع الثاني

(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي $u_0 = -1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n فإن: $u_{n+1} = 3u_n - 2$

1 احسب u_1 ، u_2 .

2 (v_n) المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = u_n - 1$.

أ) أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدها الأول v_0 .

ب) اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n .

3 بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_{n+1} - u_n = (-4) \times 3^n$ ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

4 عين قيمة العدد الطبيعي n بحيث يكون $u_0 + u_1 + ... + u_n = n - 79$

التمرين05-بكالوريا 2010 الموضوع الأول

1 n عدد طبيعي، أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = 1 + e + e^2 + ... + e^n$ (S_n مجموع حدود متتالية هندسية أساسها e وحدها الأول 1 ; و e يرمز إلى أساس اللوغاريتم النيبيري).

2 لتكن المتتالية العددية (w_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $w_n = 2n + 4 + e^n$

- بين أن:

$$w_n = u_n + v_n$$

حيث (u_n) متتالية حسابية و (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين الحد الأول والأساس لكل منهما.

3 أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن:

$$4 + 6 + 8 + ... + (2n + 4) = (n + 1)(n + 4)$$

4 استنتج المجموع S بدلالة n حيث:

$$S = w_0 + w_1 + ... + w_n$$

التمرين06-بكالوريا 2010 الموضوع الثاني

(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n فإن: $u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 2}{4}$

1 احسب الحدود u_1 ، u_2 و u_3 .

2 أ) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n < 2$.

ب) بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

جـ) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة.

3 (v_n) المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = u_n - 2$.

أ) بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدها الأول v_0

ب) عبر بدلالة nعن الحد العام v_n ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن

$$u_n = 2 - \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

جـ) ماهي نهاية المتتالية (u_n) ؟

د) احسب، بدلالة n المجموع S_n حيث $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$ واستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_0 + u_1 + ... + u_n = 3\left(\dfrac{3}{4}\right)^n + 2n - 2$

التمرين 07 - بكالوريا 2011 الموضوع الثاني

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ : $u_0 = \dfrac{1}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \dfrac{2}{5}u_n + \dfrac{1}{5}$

1 احسب u_1 و u_2 .

2 بين انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n > \dfrac{1}{3}$.

3 بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما ثم استنتج أنها متقاربة.

4 لتكن المتتالية العددية (v_n) حيث من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = u_n - \dfrac{1}{3}$.

أ) بين أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها وحدها الأول.

ب) اكتب كلا من v_n و u_n بدلالة n .

جـ) احسب نهاية المتتالية (u_n) .

التمرين 08 - بكالوريا 2012 الموضوع الأول

لتكن (u_n) المتتالية المعرفة بـ : $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{3u_n + 4}{9}u_n$.

1 أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > \frac{2}{3}$.

ب) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة.

2 نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = u_n - \frac{2}{3}$.

أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية، يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب) اكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$u_n = \frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^n + 2\right].$$

جـ) ما هي نهاية المتتالية (u_n) ؟

3 احسب، بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$.

التمرين 09 - بكالوريا 2012 الموضوع الثاني

في بداية جانفي 2008 وضع شخص مبلغ من المال قدره $50000DA$ في صندوق التوفير والإحتياط. يقدم الصندوق فائدة قدرها 5% سنويا. يسحب هذا الشخص نهاية كل سنة مبلغا قدره $5000DA$ (بعد حساب الفوائد) . يرمز u_n إلى المبلغ الذي يملكه هذا الشخص في حسابه بداية جانفي من السنة $2008 + n$.

1 أ) أحسب كلا من u_0 ، u_1 و u_2 .

ب) هل المتتالية (u_n) هندسية؟ هل هي حسابية؟ بر إجابتك.

جـ) بين لماذا من اجل كل عدد طبيعي n لدينا: $u_{n+1} = 1,05u_n - 5000$

2 نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = u_n - 100000$.

أ) بين أنَ المتتالية (v_n) هندسية، حدد أساسها وحدها الأول.

ب) اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n،

$$u_n = -50000(1,05)^n + 100000$$

3 أ) ماهو المبلغ الذي يكون في حساب هذا الشخص نهاية عام 2015؟

ب) ابتداءا من أي سنة لا تسمح إداة الصندوق لهذا الشخص بسحب المبلغ المعتاذ على سحبه في نهاية كل سنة؟

التمرين 10 - بكالوريا 2013 الموضوع الأول

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ : $u_0 = 3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1} = \frac{2\alpha + 1}{3} u_n - \frac{2\alpha + 4}{3}$$

حيث α وسيط حقيقي.

1 عين قيمة α التي من أجلها تكون المتتالية (u_n) ثابتة.

2 نفرض $\alpha \neq \frac{5}{2}$ ، عين قيمة α حتى تكون المتتالية (u_n) حسابية، ثم احسب عندئذ u_n ومجموع n حدا الأولى من المتتالية.

3 عين قيمة α حتى تكون المتتالية (u_n) هندسية، ثم عين في هذه الحالة كلا من u_{50} ومجموع 50 حدا الأولى منها .

4 نفرض $\alpha = 4$. برهن بالتراجع أنه، من أجل كل عدد طبيعي n ، فإن: $u_n = 3^n + 2$ ثم بين أن:

$$u_0 + u_1 + ... + u_n = \frac{1}{2}\left(3^{n+1} + 4n + 3\right).$$

التمرين 11 - بكالوريا 2013 الموضوع الثاني

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ : $u_0 = 6$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + 6$

1 أ) أحسب الحدود: u_1 ، u_2 ، u_3 و u_4.

ب) هل المتتالية (u_n) رتيبة على $\mathbb{N}$ ؟ برر إجابتك.

2 أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = -\frac{1}{2}(u_n - 4)$

ب) استنتج أن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = u_n - 4$ هندسية، يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

جـ) اكتب v_n ، ثم u_n بدلالة n .

د) بين أن: (u_n) متقاربة.

3 باستعمال عبارة u_n ، تأكد ثانية من نتيجة السؤال 1) ب.

التمرين 12 - بكالوريا 2014 الموضوع الأول

أجب بصحيح أو خطا مع التبرير، في كل حالة من الحالات الآتية:

1 (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ حدودها موجبة تماما و (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = lnu_n$.

أ) إذا كانت (u_n) متقاربة فإن (v_n) متقاربة.

ب) إذا كانت (u_n) متناقصة فإن (v_n) متناقصة.

جـ) إذا كانت (u_n) هندسية فإن (v_n) حسابية.

التمرين13 - بكالوريا 2014 الموضوع الثاني

المتتالية العددي (u_n) معرفة كمايلي: $u_0 = 3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - 1$

1 أ) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n > -3$.

ب) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

جـ) استنتج ان المتتالية (u_n) متقاربة .

2 لتكن (v_n) متتالية هندسية متقاربة أساسها q حيث $v_0 = 6$ و $\lim\limits_{x \to +\infty}(v_0 + v_1 + ... + v_n) = 18$

أ) بين أن $\lim\limits_{x \to +\infty}(v_0 + v_1 + ... + v_n) = \frac{v_0}{1-q}$

ب) احسب الأساس q ثم اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n .

جـ) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = v_n - 3$ واستنتج عبارة u_n بدلالة n .

التمرين 14 -بكالوريا 2015 الموضوع الأول:

اختر الإقتراح الصحيح الوحيد من بين الإقتراحات الثلاثة مع التبرير في كل حالة من الحالات الآتية:

1 نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بحدها العام: $u_n = 5 \times 2^n \times 3^{n-1}$

أ) (u_n) حسابية، ب) (u_n) هندسية، جـ) (u_n) ليست هندسية ولاحسابية.

2 (v_n) متتالية حسابية حدها الأول $v_0 = 1$ و أساسها 4، قيمة n التي من أجلها يكون

$$v_1 + v_2 + ... + v_n = 2015$$

هي:

أ) $n=31$ ، ب) $n=32$ ، جـ) $n=33$.

التمرين15 -بكالوريا 2015 الموضوع الثاني:

بينت دراسة احصائية أن 5% من عمال احدى القطاعات الصناعية يُحالون على التقاعد سنويا وبالمقابل يُوظف 3000 عامل جديد سنويا. علما أنه في سنة 2012 كان عدد العمال 50000.
نعتبر الألف هو الوحدة ونرمز بـ u_n لعدد العمال سنة $2012+n$ أي $u_0=50$.

1. أحسب u_1 و u_2 .
2. أ) بين أنه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=0.95u_n+3$.

   ب) بين أنَ المتتالية (u_n) ليست حسابية وليست هندسية.
3. نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n=60-u_n$

   أ) بين أنَ المتتالية (v_n) هندسية يطلب تحديد أساسها وحدها الأول.

   ب) اكتب v_n بدلالة n ، ثم استنتج u_n بدلالة n .

   جـ) قدر عدد العمال سنة 2017.

   د) حدد اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

   ه) احسب نهاية المتتالية (u_n) ، هل يمكن أن يصل عدد العمال إلى 60000 عامل؟

التمرين 16 -بكالوريا 2016 الموضوع الأول:

(v_n) متتالية هندسية حدودها موجبة ومعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $v_0=18$ و $v_0+v_1+v_2=38$

1. بين انَ أساس المتتالية (v_n) هو $q=\frac{3}{2}$.
2. أ) اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n .

   ب) أدرس إتجاه تغير المتتالية (v_n).

   جـ) أحسب نهاية (v_n) .
3. نضع: $S_n=v_0+v_1+...+v_{n-1}$

   أ) أحسب S_n بدلالة n ثم استنتج نهاية S_n عندما يؤول n إلى $+\infty$.

   ب) جد العدد الطبيعي n بحيث: $S_n=\frac{3510}{81}$

التمرين 17 -بكالوريا 2016 الموضوع الثاني:

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = 5$ و $u_{n+1} = \frac{4}{7}u_n + \frac{3}{7}$

1 احسب الحدين u_1 و u_2 .

2 أ) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 1$.

ب) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

جـ) ماذا تستنتج بالنسبة لتقارب المتتالية (u_n) ؟

3 لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = u_n - 1$.

أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب) اكتب v_n بدلالة n ثم استنتج أنه من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 1 + 4\left(\frac{4}{7}\right)^n$.

جـ) احسب نهاية المتتالية (u_n)

التمرين 18 -بكالوريا 2017 - الموضوع الأول

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدها الأول $u_0 = -1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$

1 أ) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n < 3$.

ب) بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ثم استنتج أنها متقاربة.

2 (v_n) المتتالية المعرفة بـ: من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = 3 - u_n$.

أ) بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{3}$ ثم عين حدها الأول.

ب) نضع من اجل كل عدد طبيعي n :

$$S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$$

- بين أنه من اجل كل عدد طبيعي n:

$$S_n = 3(n-1) + 2\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

التمرين 19 - بكالوريا 2017 -الموضوع الثاني

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدها الاول $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 3u_n - 2$

1 أحسب u_1 ، u_2 ، u_3 ثم خمن اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

2 نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = u_{n+1} - u_n$.

أ) بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها 3 يطلب تعيين حدها الأول.

ب) عين v_n بدلالة n ثم استنتج أن المتتالية (u_n) متزايدة.

3 نضع من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_{n-1}$

أ) أحسب S_n بدلالة n.

ب) بين أن: من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = S_n + u_0$ واستنتج عبارة u_n بدلالة n .

التمرين 20 -بكالوريا 2017 - الدورة الإستثنائية- الموضوع الأول:

لتكن (u_n) المتتالية المعرفة بحدها الأول $u_0 = -2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$.

1 أ) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n < 2$.

ب) عين اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة.

2 لتكن المتتالية العددية (v_n) المعرفة كمايلي: من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = 2u_n - 4$

أ) أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدها الأول v_0 .

ب) جد عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

3 احسبب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$.

التمرين 21 -بكالوريا 2017 -الدورة الإستثنائية- الموضوع الثاني:

نعتبر المتتالية الهندسية (v_n) ذات الأساس e^2 والحد الأول v_0 حيث: $v_n = 1$. (e يرمز إلى أساس اللوغاريتم النيبيري) .

1 احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$.

2 نعتبر المتتاليتين (u_n) و (w_n) المعرفتين كمايلي: من أجل كل عدد طبيعي n :

$w_n = 2n + 4 + e^{2n}$ و $u_n = w_n - v_n$.

- بين أن: المتتالية (u_n) حسابية ، حدد أساسها r وحدها الأول u_0 .

3 أثبت أن: من أجل كل عدد طبيعي n فإن:

$$4+6+8+...+(2n+4)=(n+1)(n+4)$$

4 استنتج المجموع T_n بدلالة n حيث:

$$T_n=w_0+w_1+...+w_n$$

التمرين22 -بكالوريا 2018 -الموضوع الأول

I) لتكن المتتاليتان العدديتان (u_n) و (v_n) المعرفتان كمايلي: $u_0=50$ و من أجل عدد طبيعي n :
$u_{n+1}=0,7u_n+6$ و $v_n=u_n-20$

1 برهن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $0,7$ يطلب تعيين حدها الأول v_0 ، وكتابة عبارة v_n بدلالة n .

2 أ) أكتب بدلالة n عبارة الحد العام u_n .

ب) عين إتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

II) تملك جريدة يومية 5000 مشترك في سنة 2016 . بعد كل سنة تفقد %30 من المشتركين وتكتسب 600 مشترك جديد.
نعتبر المئة هي الوحدة و نرمز بـ: u_n لعدد المشتركين في سنة $2006+n$ أي $u_0=50$.

1 ماهو عدد المشتركين في سنة 2017 ؟ ثم في سنة 2018 ؟

2 أ) برر العبارة: $u_{n+1}=0,7u_n+6$.

ب) ابتداءا من اي سنة يصبح عدد المشتركين أقل من 2400 مشترك؟

التمرين 23 -بكالوريا 2018 -الموضوع الثاني

(u_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي $u_0=-1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n فإن: $2u_{n+1}=u_n+6$

1 أ) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n<6$.

ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) واستنتج أنها متقاربة.

2 نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=u_n-6$.

أ) بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ يطلب حساب حدها الأول v_0 .

ب) أكتب v_n بدلالة n ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

3 احسب، بدلالة n مايلي: $S_n=u_0+u_1+u_3+...+u_n$ و $P_n=v_0\times v_1\times v_2\times...\times v_n$

الـحـلـــــول

التمرين01-بكالوريا 2008 الموضوع الأول

(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = \alpha; \quad (\alpha \in \mathbb{R}) \\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - \frac{8}{9}; \quad (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

1 البرهان بالتراجع أنه في حالة $\alpha = -\frac{8}{3}$ تكون المتتالية (u_n) ثابتة.

المتتالية (u_n) مثابتة تعني أن $u_n = u_0$ من أجل كل عدد طبيعي n أي نبرهن ان الخاصية

$$u_n = -\frac{8}{3}$$

صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n.

- من أجل $n = 0$ لدينا $u_0 = \alpha = -\frac{8}{3}$ وبالتالي الخاصية محققة .
- نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل عدد طبيعي n أي: $u_n = -\frac{8}{3}$ ونبرهن صحتها من أجل عدد طبيعي $n+1$ اي نبرهن أن $u_{n+1} = -\frac{8}{3}$

حسب الفرض لدينا: $u_n = -\frac{8}{3}$

نضرب الطرفين في العدد $\frac{2}{3}$ نجد: $\frac{2}{3}u_n = -\frac{16}{9}$

نضيف للطرفين العدد $-\frac{8}{9}$ نجد: $\frac{2}{3}u_n - \frac{8}{9} = -\frac{16}{9} - \frac{8}{9}$

أي: $u_{n+1} = -\frac{8}{3}$

- خلاصة: حسب مبدأ الإستدلال بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = -\frac{8}{3}$ أي أنه في حالة $\alpha = -\frac{8}{3}$ تكون المتتالية (u_n) ثابتة.

2 في كل مايلي نأخذ $\alpha = 2$ ونعرف المتتالية (v_n) كمايلي : $v_n = u_n + \frac{8}{3}$

أ) حساب الحدود u_1 ، u_2

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{2}{3}u_0 - \frac{8}{9} \\ &= \frac{2}{3} \times 2 - \frac{8}{9} \\ &= \frac{4}{9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_2 &= \frac{2}{3}u_1 - \frac{8}{9} \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{4}{9} - \frac{8}{9} \\ &= -\frac{16}{27} \end{aligned}$$

..

ب) اثبات أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدها الأول v_0.

(v_n) متتالية هندسية أساسها q تعني أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون $q = \frac{v_{n+1}}{v_n}$

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا:

$$\begin{aligned}
\frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{u_{n+1}+\frac{8}{3}}{u_n+\frac{8}{3}} \\
&= \frac{\frac{2}{3}u_n-\frac{8}{9}+\frac{8}{3}}{u_n+\frac{8}{3}} \\
&= \frac{\frac{2}{3}u_n+\frac{16}{9}}{u_n+\frac{8}{3}} \\
&= \frac{\frac{2}{3}\cancel{\left(u_n+\frac{8}{3}\right)}}{\cancel{u_n+\frac{8}{3}}} \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{2}{3}$ وحدها الأول: $v_0 = u_0+\frac{8}{3} = 2+\frac{8}{3} = \frac{14}{3}$

ج) كتابة عبارة u_n بدلالة n .

لدينا:

$$v_n = v_0 \times q^n = \frac{14}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

من جهة أخرى

$$v_n = u_n+\frac{8}{3}$$

ومنه

$$u_n = v_n-\frac{8}{3} = \frac{14}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^n-\frac{8}{3}$$

- حساب $\lim_{n\to+\infty} u_n$:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{14}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^n-\frac{8}{3} = -\frac{8}{3}$$

لأن: $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$

حل التمرين02-بكالوريا 2008 الموضوع الثاني

(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي: $u_0=1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n فإن: $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n-1$

1 حساب الحدود u_1 ، u_2 و u_3

$$u_1 = \frac{1}{2}u_0 - 1 = \frac{1}{2}\times 1 - 1 = -\frac{1}{2}$$

$$u_2 = \frac{1}{2}u_1 - 1 = \frac{1}{2}\times(-\frac{1}{2}) - 1 = -\frac{5}{4}$$

$$u_3 = \frac{1}{2}u_2 - 1 = \frac{1}{2}\times(-\frac{5}{4}) - 1 = -\frac{13}{8}$$

..

2 أ) البرهان بالتراجع ان الخاصية من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geq -2$ صحيحة

- من أجل $n = 0$ لدينا $u_0 = 1 \geq -2$ وبالتالي الخاصية محققة من أجل $n = 0$.
- نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل عدد طبيعي n أي: $u_n \geq -2$ ونبرهن صحتها من أجل عدد طبيعي $n+1$ اي نبرهن أن: $u_{n+1} \geq -2$

حسب الفرض لدينا: $u_n \geq -2$

نضرب الطرفين في العدد $\frac{1}{2}$ نجد: $\frac{1}{2}u_n \geq -2 \times \frac{1}{2}$

نضيف للطرفين العدد -1 نجد: $\frac{1}{2}u_n - 1 \geq -1 - 1$

أي: $u_{n+1} \geq -2$

- خلاصة: حسب مبدأ الإستدلال بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} \geq -2$

ب) تحديد اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

المتتالية (u_n) من الشكل $u_{n+1} = au_n + b$ حيث $a = \frac{1}{2} > 0$ وبالتالي (u_n) رتيبة، من جهة أخرى لدينا: $u_1 - u_0 = -\frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2} < 0$ وبالتالي المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

- الإستنتاج: بما أن (u_n) متناقصة تماما ومحدودة من السفل بالعدد -2 فإنها متقاربة نحو -2

3 (v_n) المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = u_n + 2$.

أ) تبيان أن (v_n) متتالية هندسية .

(v_n) متتالية هندسية أساسها q تعني أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون $\frac{v_{n+1}}{v_n} = q$

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا:

$$\begin{aligned}\frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{u_{n+1}+2}{u_n+2}\\ &= \frac{\frac{1}{2}u_n-1+2}{u_n+2}\\ &= \frac{\frac{1}{2}u_n+1}{u_n+2}\\ &= \frac{\frac{1}{2}\cancel{(u_n+2)}}{\cancel{u_n+2}}\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$ وحدها الأول: $v_0=u_0+2=1+2=3$

ب) التعبير بدلالة n عن الحد العام v_n ثم u_n.

لدينا: $v_n=v_0\times q^n=3\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$

من جهة أخرى $v_n=u_n+2$

ومنه $u_n=v_n-2=3\times\left(\frac{1}{2}\right)^n-2$

- حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$:

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}3\times\left(\frac{1}{2}\right)^n-2=-2$$

لأن: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$

جـ) حسب، بدلالة n المجموع S_n :

$$\begin{aligned}S_n &= u_0+u_1+...+u_n\\ &= (v_0-2)+(v_1-2)+...+(v_n-2)\\ &= (v_0+v_1...+v_n)-2(n+1)\\ &= v_0\times\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)-2(n+1)\\ &= 3\times\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}\right)-2(n+1)\\ &= 6\times\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)-2(n+1)\\ &= 4-2n-6\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\end{aligned}$$

حل التمرين03-بكالوريا 2009 الموضوع الأول

(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي $u_0=-1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n فإن: $3u_{n+1}=u_n+4$
أي أن: $u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+\frac{4}{3}$

1 أ) البرهان بالتراجع ان الخاصية من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n \leq 2$ صحيحة

- من أجل $n=0$ لدينا $u_0=-1\leq 2$ وبالتالي الخاصية محققة من أجل $n=0$.
- نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل عدد طبيعي n أي: $u_n\leq 2$ ونبرهن صحتها من أجل عدد طبيعي $n+1$ اي نبرهن أن: $u_{n+1}\leq 2$.

حسب الفرض لدينا: $u_n \leq 2$

نضرب الطرفين في العدد $\frac{1}{3}$ نجد: $\frac{1}{3}u_n \leq 2\times\frac{1}{3}$

نضيف للطرفين العدد $\frac{4}{3}$ نجد: $\frac{1}{3}u_n+\frac{4}{3} \leq 2\times\frac{1}{3}+\frac{4}{3}$

أي: $u_{n+1}\leq 2$

- خلاصة: حسب مبدأ الإستدلال بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n\leq 2$

ب) تبيان أن المتتالية (u_n) متزايدة.
المتتالية (u_n) من الشكل $u_{n+1}=au_n+b$ حيث $a=\frac{1}{3}>0$ وبالتالي (u_n) رتيبة. ندرس إشارة الفرق: u_1-u_0 لدينا: $u_1=\frac{1}{3}u_0+\frac{4}{3}=1$ ومنه: $u_1-u_0=1-(-1)=2>0$
وبالتالي المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

جـ) الإستنتاج: بما أن (u_n) متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى بالعدد 2 فإنها متقاربة نحو 2 .

2 (v_n) المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n=u_n-2$

أ) تبيان أن (v_n) متتالية هندسية .
(v_n) متتالية هندسية أساسها q تعني أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون $\frac{v_{n+1}}{v_n}=q$.

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا:

$$\begin{aligned}\frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{u_{n+1}-2}{u_n-2}\\ &= \frac{\frac{1}{3}u_n+\frac{4}{3}-2}{u_n-2}\\ &= \frac{\frac{1}{3}u_n-\frac{2}{3}}{u_n-2}\\ &= \frac{\frac{1}{3}\cancel{(u_n-2)}}{\cancel{u_n-2}}\\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{3}$ وحدها الأول: $v_0=u_0-2=-1-2=-3$.

ب) التعبير بدلالة n عن الحد العام v_n ثم استنتاج الحد العام u_n.

لدينا: $v_n=v_0\times q^n=-3\times\left(\frac{1}{3}\right)^n$ من جهة أخرى $v_n=u_n-2$ ومنه

$$u_n=v_n+2=-3\times\left(\frac{1}{3}\right)^n+2$$

جـ) حساب : $\lim_{n\to+\infty}u_n$

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}-3\times\left(\frac{1}{3}\right)^n+2=2$$

لأن: $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=0$

د) حساب بدلالة n المجموع S_n :

$$\begin{aligned}
S_n &= u_0 + u_1 + ... + u_n \\
&= (v_0+2) + (v_1+2) + ... + (v_n+2) \\
&= (v_0 + v_1 ... + v_n) + 2(n+1) \\
&= v_0 \times \left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right) + 2(n+1) \\
&= -3 \times \left(\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}\right) + 2(n+1) \\
&= -\frac{9}{2} \times \left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) + 2(n+1) \\
&= \frac{9}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - \frac{5}{2} + 2n
\end{aligned}$$

حل التمرين04-بكالوريا 2009 الموضوع الثاني

(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي $u_0 = -1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n فإن: $u_{n+1} = 3u_n - 2$

1 حساب الحدود u_1 ، u_2

$$\begin{aligned}
u_1 &= 3u_0 - 2 \\
&= 3 \times (-1) - 2 \\
&= -5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_2 &= 3u_1 - 2 \\
&= 3 \times (-5) - 2 \\
&= -17
\end{aligned}$$

..

2 (v_n) المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = u_n - 1$

أ) تبيان أن (v_n) متتالية هندسية .

(v_n) متتالية هندسية أساسها q تعني أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون $q = \frac{v_{n+1}}{v_n}$.

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا:

$$\begin{aligned}
\frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{u_{n+1}-1}{u_n-1} \\
&= \frac{3u_n-2-1}{u_n-1} \\
&= \frac{3u_n-3}{u_n-1} \\
&= \frac{\cancel{(u_n-1)}}{\cancel{u_n-1}} \\
&= 3
\end{aligned}$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=3$ وحدها الأول: $v_0 = u_0 - 1 = -1 - 1 = -2$.

ب) التعبير بدلالة n عن الحد العام v_n .

$$v_n = v_0 \times q^n = -2 \times (3)^n$$

- تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_{n+1} - u_n = (-4) \times 3^n$

من أجل كل عدد طبيعي n فإن:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (v_{n+1}+1) - (v_n+1) \\ &= 3v_n + 1 - v_n - 1 \\ &= 2v_n \\ &= 2 \times (-2 \times (3)^n) \\ &= (-4) \times (3)^n \end{aligned}$$

بماأن: $u_{n+1} - u_n < 0$ من أجل كل عدد طبيعي n فإن المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

- تعيين قيمة العدد الطبيعي n بحيث يكون $u_0 + u_1 + ... + u_n = n - 79$

أولا نقوم بحساب $u_0 + u_1 + ... + u_n$ من أجل كل عدد طبيعي n لدينا.

$$\begin{aligned} u_0 + u_1 + ... + u_n &= (v_0+1) + (v_1+1) + ... + (v_n+1) \\ &= (v_0 + v_1 ... + v_n) + (n+1) \\ &= v_0 \times \left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right) + (n+1) \\ &= -2 \times \left(\frac{1-(3)^{n+1}}{1-(3)}\right) + (n+1) \\ &= 1 - (3)^{n+1} + n + 1 \\ &= 2 - (3)^{n+1} + n \end{aligned}$$

$u_0 + u_1 + ... + u_n = n - 79$ تكافئ: $2 - (3)^{n+1} + n = n - 79$ أي: $3^{n+1} = 81$ ومنه

$ln(3^{n+1}) = ln(81)$ أي: $n + 1 = \dfrac{ln(81)}{ln(3)} = 4$ وبالتالي: $n = 3$

حل التمرين05-بكالوريا 2010 الموضوع الأول

1 حساب بدلالة n المجموع S_n حيث :

$$S_n = 1 + e + e^2 + ... + e^n$$

واضح ان S_n مجموع حدود متتالية هندسية أساسها e وحدها لأول 1 وبالتالي

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + e + e^2 + ... + e^n \\ &= 1 \times \frac{1-e^{n+1}}{1-e} \\ &= \frac{1-e^{n+1}}{1-e} \end{aligned}$$

2 لتكن المتتالية العددية (w_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $w_n = 2n + 4 + e^n$

- تبيان أن:

$$w_n = u_n + v_n$$

حيث (u_n) متتالية حسابية و (v_n) متتالية هندسية.

نعرف المتتاليتين (u_n) و (v_n) من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $u_n = 2n+4$ و $v_n = e^n$ إذا يكفي إثبات أن: (u_n) متتالية حسابية و (v_n) متتالية هندسية.

- من أجل كل عدد طبيعي n لدينا:

$$u_{n+1} - u_n = 2(n+1) + 4 - (2n+4) = 2n + 6 - 2n - 4 = 2$$

وبالتالي (u_n) متتالية حسابية أساسها: $r = 2$ وحدها الأول $u_0 = 2(0) + 4 = 4$

- من أجل كل عدد طبيعي n لدينا:

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{e^{n+1}}{e^n} = e^{n+1-n} = e$$

وبالتالي (v_n) متتالية هندسية أساسها: $q = e$ وحدها الأول $v_0 = e^0 = 1$

3 إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن:

$$4 + 6 + 8 + ... + (2n+4) = (n+1)(n+4)$$

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا:

$$\begin{aligned}
4 + 6 + 8 + ... + (2n+4) &= u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n \\
&= \frac{n+1}{2}(u_0 + u_n) \\
&= \frac{n+1}{2}(8 + 2n) \\
&= \frac{n+1}{\cancel{2}} \times \cancel{2}(4+n) \\
&= (n+1)(n+4)
\end{aligned}$$

4 استنتاج المجموع S بدلالة n حيث:

$$S = w_0 + w_1 + ... + w_n$$

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا:

$$\begin{aligned}
S_n &= w_0 + w_1 + ... + w_n \\
&= (u_0 + v_0) + (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + ... + (u_n + v_n) \\
&= (u_0 + u_1 ... + u_n) + (v_0 + v_1 ... + v_n) \\
&= (n+1)(n+4) + \frac{1 - e^{n+1}}{1 - e}
\end{aligned}$$

التمرين06-بكالوريا 2010 الموضوع الثاني

(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n فإن: $u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{4}$

أي أن: $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{2}$

1 حساب الحدود u_1 ، u_2 و u_3

$$u_1 = \frac{3}{4}u_0 + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}(1) + \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$$

$$u_1 = \frac{3}{4}u_1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \times \frac{5}{4} + \frac{1}{2} = \frac{23}{16}$$

$$u_3 = \frac{3}{4}u_2 + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \times \frac{23}{16} + \frac{1}{2} = \frac{101}{64}$$

2 أ) البرهان بالتراجع ان الخاصية من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n < 2$ صحيحة

- من أجل $n = 0$ لدينا $u_0 = 1 < 2$ وبالتالي الخاصية محققة من أجل $n = 0$.
- نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل عدد طبيعي n أي: $u_n < 2$ ونبرهن صحتها من أجل عدد طبيعي $n+1$ اي نبرهن أن: $u_{n+1} < 2$

حسب الفرض لدينا: $u_n < 2$

نضرب الطرفين في العدد $\frac{3}{4}$ نجد: $\frac{3}{4}u_n < 2 \times \frac{3}{4}$

نضيف للطرفين العدد $\frac{1}{2}$ نجد: $\frac{3}{4}u_n + \frac{1}{2} < 2 \times \frac{3}{4} + \frac{1}{2}$

أي: $u_{n+1} < 2$

- خلاصة: حسب مبدأ الإستدلال بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n < 2$

ب) تبيان أن المتتالية (u_n) متزايدة.

المتتالية (u_n) من الشكل $u_{n+1} = au_n + b$ حيث $a = \frac{3}{4} > 0$ وبالتالي (u_n) رتيبة. ندرس إشارة الفرق: $u_1 - u_0$ لدينا: $u_1 - u_0 = \frac{5}{4} - 1 = \frac{1}{4} > 0$ وبالتالي المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

جـ) الإستنتاج: بما أن (u_n) متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى بالعدد 2 فإنها متقاربة نحو 2 .

(v_n) المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = u_n - 2$

أ) تبيان أن (v_n) متتالية هندسية .

(v_n) متتالية هندسية أساسها q تعني أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون $\frac{v_{n+1}}{v_n} = q$.

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا:

$$\begin{aligned}
\frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{u_{n+1}-2}{u_n-2} \\
&= \frac{\frac{3}{4}u_n+\frac{1}{2}-2}{u_n-2} \\
&= \frac{\frac{3}{4}u_n-\frac{3}{2}}{u_n-2} \\
&= \frac{\frac{3}{4}\cancel{(u_n-2)}}{\cancel{u_n-2}} \\
&= \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{3}{4}$ وحدها الأول: $v_0=u_0-2=1-2=-1$.

ب) التعبير بدلالة n عن الحد العام v_n.

لدينا: $v_n=v_0\times q^n=-1\times\left(\frac{3}{4}\right)^n$ من جهة أخرى $v_n=u_n-2$ ومنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن

$$u_n=v_n+2=2-\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

جـ) حساب : $\lim_{n\to+\infty}u_n$

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}2-\left(\frac{3}{4}\right)^n=2$$

لأن: $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n=0$

د) حساب بدلالة n المجموع S_n :

$$\begin{aligned}
S_n &= v_0+v_1++...+v_n \\
&= v_0\times\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right) \\
&= -1\times\left(\frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{3}{4}}\right) \\
&= -4\times\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right) \\
&= -4+4\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}
\end{aligned}$$

- استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_0+u_1+...+u_n=3\left(\frac{3}{4}\right)^n+2n-2$

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا:

$$\begin{aligned}
u_0+u_1+...+u_n &= (v_0+2)+(v_1+2)+...+(v_n+2)\\
&= (v_0+v_1...+v_n)+2(n+1)\\
&= -4+4\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}+2n+2\\
&= \cancel{4}\times\left(\frac{3}{\cancel{4}}\right)\times\left(\frac{3}{4}\right)^n+2n-2\\
&= 3\left(\frac{3}{4}\right)^n+2n-2
\end{aligned}$$

حل التمرين 07 - بكالوريا 2011 الموضوع الثاني

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_0=\frac{1}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\frac{2}{5}u_n+\frac{1}{5}$

1 حسب الحدين u_1 و u_2

$$\begin{aligned}
u_1 &= \frac{2}{5}u_0+\frac{1}{5}\\
&= \frac{2}{5}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\\
&= \frac{2}{5}
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
u_2 &= \frac{2}{5}u_1+\frac{1}{5}\\
&= \frac{2}{5}\times\frac{2}{5}+\frac{1}{5}\\
&= \frac{9}{25}
\end{aligned}$$

2 تبيان انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n>\frac{1}{3}$ نستعمل البرهان بالتراجع للببرهان على أن الخاصية من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n>\frac{1}{3}$ صحيحة

- من أجل $n=0$ لدينا $u_0=\frac{1}{2}>\frac{1}{3}$ وبالتالي الخاصية محققة من أجل $n=0$.
- نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل عدد طبيعي n أي: $u_n>\frac{1}{3}$ ونبرهن صحتها من أجل عدد طبيعي $n+1$ اي نبرهن أن: $u_{n+1}>\frac{1}{3}$

حسب الفرض لدينا: $u_n>\frac{1}{3}$

نضرب الطرفين في العدد $\frac{2}{5}$ نجد: $\frac{2}{5}u_n>\frac{2}{5}\times\frac{1}{3}$

نضيف للطرفين العدد $\frac{1}{5}$ نجد: $\frac{2}{5}u_n+\frac{1}{5}>\frac{2}{5}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{5}$

أي: $u_{n+1}>\frac{1}{3}$

- خلاصة: حسب مبدأ الإستدلال بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n>\frac{1}{3}$

3 تبيان أن المتتالية (u_n) متناقصة.

المتتالية (u_n) من الشكل $u_{n+1}=au_n+b$ حيث $a=\frac{2}{5}>0$ وبالتالي (u_n) رتيبة. ندرس إشارة

الفرق: $u_1 - u_0$ لدينا: $u_1 - u_0 = \frac{2}{5} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{10} < 0$ وبالتالي المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

• الإستنتاج: بما أن (u_n) متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل بالعدد $\frac{1}{3}$ فإنها متقاربة نحو $\frac{1}{3}$.

4 (v_n) المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = u_n - \frac{1}{3}$

أ) تبيان أن (v_n) متتالية هندسية .

(v_n) متتالية هندسية أساسها q تعني أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون $\frac{v_{n+1}}{v_n} = q$.

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا:

$$\begin{aligned}
\frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{u_{n+1} - \frac{1}{3}}{u_n - \frac{1}{3}} \\
&= \frac{\frac{2}{5}u_n + \frac{1}{5} - \frac{1}{3}}{u_n - \frac{1}{3}} \\
&= \frac{\frac{2}{5}u_n - \frac{2}{15}}{u_n - \frac{1}{3}} \\
&= \frac{\frac{2}{5}\cancel{\left(u_n - \frac{1}{3}\right)}}{\cancel{u_n - \frac{1}{3}}} \\
&= \frac{2}{5}
\end{aligned}$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{2}{5}$ وحدها الأول: $v_0 = u_0 - \frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.

ب) كتابة كلا من v_n و u_n بدلالة n

لدينا: $v_n = v_0 \times q^n = \frac{1}{6} \times \left(\frac{2}{5}\right)^n$ من جهة أخرى $v_n = u_n - \frac{1}{3}$ ومنه

$$u_n = v_n + \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \times \left(\frac{2}{5}\right)^n + \frac{1}{3}$$

جـ) حساب : $\lim_{n\to+\infty} u_n$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{6} \times \left(\frac{2}{5}\right)^n + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

لأن: $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$

حل التمرين08-بكالوريا 2012 الموضوع الأول

(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n فإن: $u_{n+1} = \frac{3u_n + 4}{9}$
أي أن: $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{4}{9}$

1 أ) البرهان بالتراجع ان الخاصية من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n > \frac{2}{3}$ صحيحة.

- من أجل $n = 0$ لدينا $u_0 = 1 > \frac{2}{3}$ وبالتالي الخاصية محققة من أجل $n = 0$.
- نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل عدد طبيعي n أي: $u_n > \frac{2}{3}$ ونبرهن صحتها من أجل عدد طبيعي $n+1$ اي نبرهن أن: $u_{n+1} > \frac{2}{3}$

حسب الفرض لدينا: $u_n > \frac{2}{3}$

نضرب الطرفين في العدد $\frac{1}{3}$ نجد: $\frac{1}{3}u_n > \frac{2}{3} \times \frac{1}{3}$

نضيف للطرفين العدد $\frac{4}{9}$ نجد: $\frac{1}{3}u_n + \frac{4}{9} > \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{4}{9}$

أي: $u_{n+1} > \frac{2}{3}$

- خلاصة: حسب مبدأ الإستدلال بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > \frac{2}{3}$

ب) تبيان أن المتتالية (u_n) متزايدة.

المتتالية (u_n) من الشكل $u_{n+1} = au_n + b$ حيث $a = \frac{1}{3} > 0$ وبالتالي (u_n) رتيبة. ندرس إشارة الفرق: $u_1 - u_0$ لدينا: $u_1 = \frac{1}{3}u_0 + \frac{4}{9} = \frac{1}{3}(1) + \frac{4}{9} = \frac{7}{9}$ ومنه:
$u_1 - u_0 = \frac{7}{9} - 1 = -\frac{2}{9} < 0$ وبالتالي المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

2 (v_n) المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = u_n - \frac{2}{3}$

أ) تبيان أن (v_n) متتالية هندسية .

(v_n) متتالية هندسية أساسها q تعني أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون $\frac{v_{n+1}}{v_n} = q$.

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا:

$$\begin{aligned}
\frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{u_{n+1}-\frac{2}{3}}{u_n-\frac{2}{3}} \\
&= \frac{\frac{1}{3}u_n+\frac{4}{9}-\frac{2}{3}}{u_n-\frac{2}{3}} \\
&= \frac{\frac{1}{3}u_n-\frac{2}{9}}{u_n-\frac{2}{3}} \\
&= \frac{\frac{1}{3}\cancel{\left(u_n-\frac{2}{3}\right)}}{\cancel{u_n-\frac{2}{3}}} \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{3}$ وحدها الأول: $v_0=u_0-\frac{2}{3}=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$.

ب) كتابة عبارة v_n بدلالة n :

لدينا: $v_n=v_0\times q^n=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^n$ من جهة أخرى $v_n=u_n-\frac{2}{3}$ ومنه

$$u_n=v_n+\frac{2}{3}=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{2}{3}=\frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^n+2\right]$$

جـ) حساب $\lim_{n\to+\infty}u_n$:

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^n+2\right]=\frac{2}{3}$$

لأن: $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=0$

3 حساب بدلالة n المجموع S_n :

$$\begin{aligned}
S_n &= u_0+u_1+...+u_n\\
&= (v_0+\frac{2}{3})+(v_1+\frac{2}{3})+...+(v_n+\frac{2}{3})\\
&= (v_0+v_1...+v_n)+\frac{2}{3}(n+1)\\
&= v_0\times\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)+\frac{2}{3}(n+1)\\
&= \frac{1}{3}\times\left(\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}\right)+\frac{2}{3}(n+1))\\
&= \frac{1}{2}\times\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)+\frac{2}{3}(n+1)
\end{aligned}$$

حل التمرين 09 - بكالوريا 2012 الموضوع الثاني

يرمز u_n إلى المبلغ الذي يملكه هذا الشخص في حسابه بداية من جانفي من السنة $2008+n$.

1 أ) حساب كلا من u_0 ، u_1 و u_2 .

u_0 المبلغ الذي يملكه هذا الشخص في حسابه بداية من جانفي من السنة $2008+0=2008$.

أي: $u_0=50000$

u_1 المبلغ الذي يملكه هذا الشخص في حسابه بداية من جانفي من السنة 2009

أي: $u_1=\left(1+\frac{5}{100}\right)u_0-50000=1,05\times50000-5000=47500$

u_2 إلى المبلغ الذي يملكه هذا الشخص في حسابه بداية من جانفي من السنة 2010 أي:

$u_2=\left(1+\frac{5}{100}\right)u_1-50000=1,05\times47500-5000=44875$

ب) هل المتتالية (u_n) هندسية؟ هل هي حسابية؟

لدينا: $u_0\times u_2=2243750000$ و $u_1^2=2256250000$ أي $u_0\times u_2\neq u_1^2$ وبالتالي: (u_n) ليست هندسية.

لدينا: $u_0+u_2=94875$ و $2u_1=95000$ أي $u_0+u_2\neq 2u_1$ وبالتالي: (u_n) ليست حسابية.

جـ) من اجل كل عدد طبيعي n لدينا: $u_{n+1}=\left(1+\frac{5}{100}\right)u_n-5000=1,05u_n-5000$

2 نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n=u_n-100000$.

أ) تبيان أنَ المتتالية (v_n) هندسية يطلب تحديد أساسها وحدها الأول v_0 .

(v_n) متتالية هندسية أساسها q تعني أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون $q=\frac{v_{n+1}}{v_n}$.

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا:

$$\begin{aligned}\frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{u_{n+1}-100000}{u_n-100000}\\ &= \frac{1,05u_n-5000-100000}{u_n-100000}\\ &= \frac{1,05u_n-105000}{u_n-100000}\\ &= \frac{1,05\left(\cancel{u_n-100000}\right)}{\cancel{u_n-100000}}\\ &= 1,05\end{aligned}$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=1,05$ وحدها الأول :
$v_0=u_0-100000=50000-100000=-50000$.

ب) كتابة عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_n=-50000(1,05)^n+100000$$

لدينا: $v_n=v_0\times q^n=-50000\times(1,05)^n$ من جهة أخرى $v_n=u_n-100000$ ومنه

$$u_n=v_n+100000=-50000\times(1,05)^n+100000$$

3 أ) المبلغ الذي يكون في حساب هذا الشخص نهاية عام 2015

نهاية عام 2015 تعني بداية جانفي 2016 ، وبالتالي: $2008+n=2016$ أي قيمة n هي 2016
وبالتالي المبلغ الذي يكون في حساب هذا الشخص نهاية عام 2015هو

$$u_8=-50000\times(1,05)^8+100000\approx 26127,23$$

ب) إدارة الصندوق لا تسمح لهذا الشخص بسحب المبلغ المعتاد على سحبه في نهاية كل سنة إذا كان: $u_n<5000$ وهذا يعني $-50000\times(1,05)^n+100000<5000$ ومنه:

$$-50000\times(1,05)^n<-95000$$

$$(1,05)^n>\frac{-95000}{-50000}=1,9$$

$$nln(1,05)>ln(1,9)$$

$n>\dfrac{ln(1,9)}{ln(1,05)}\approx 13,16$ وبالتالي $n=14$ أي إبتداءا من السنة $2008+14=2022$

حل التمرين 10 - بكالوريا 2013 الموضوع الأول

(u_n) المتتالية المعرفة بـ : $u_0=3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1}=\frac{3\alpha+1}{3}u_n-\frac{2\alpha+4}{3}$$

حيث α وسيط حقيقي.

1 تعيين قيمة α التي من أجلها تكون المتتالية (u_n) ثابتة.

(u_n) ثابتة تعني أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون: $u_{n+1} = u_n = u_0$ وبالتالي:

$$u_0 = \frac{2\alpha+1}{3}u_0 - \frac{2\alpha+4}{3}$$

نعوض قيمة u_0 نجد

$$3 = \frac{2\alpha+1}{3} \times 3 - \frac{2\alpha+4}{3}$$

أي

$$3 = \frac{6\alpha+3}{3} - \frac{2\alpha+4}{3}$$

ينتج:

$$3 = \frac{4\alpha-1}{3}$$

ومنه: $9 = 4\alpha - 1$ أي $\alpha = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$

2 نفرض $\alpha \neq \frac{5}{2}$

- تعين قيمة α حتى تكون المتتالية (u_n) حسابية

(u_n) حسابية تكافئ: $\frac{2\alpha+1}{3} = 1$ أي: $2\alpha + 1 = 3$ ومنه: $2\alpha = 2$ وبالتالي $\alpha = 1$.

- حساب u_n

من أجل $\alpha = 1$ لدينا $u_{n+1} = u_n - 2$ وبالتالي أساس المتتالية الحسابية $r = -2$ وعبارة u_n هي:

$$u_n = u_0 + rn = 3 - 2n$$

- مجموع n حدا الأولى من المتتالية (u_n) (أي عدد الحدود هو n) ، وبالتالي المجموع هو:

$$u_0 + u_1 + ... + u_{n-1} = \frac{n}{2}(u_0 + u_{n-1}) = \frac{n}{2}(-2+5-2n) = \frac{n}{2}(-2n+3)$$

3 تعين قيمة α حتى تكون المتتالية (u_n) هندسية

(u_n) هندسية تكافئ: $\frac{2\alpha+4}{3} = 0$ أي: $2\alpha + 4 = 0$ ومنه: $\alpha = -2$.

- حساب u_n

من أجل $\alpha = -2$ لدينا $u_{n+1} = -u_n$ وبالتالي أساس المتتالية الهندسية (u_n) هو $q = -1$ وعبارة u_n هي:

$$u_n = u_0 \times q^n = 3(-1)^n$$

- تعين كلا من ، u_{50} ومجموع 50 حدا الاولى من المتتالية (u_n) :

$$u_{50} = 3(-1)^{50} = 3$$

مجموع 50 حدا الأولى من المتتالية (u_n) (أي عدد الحدود هو 50) ، وبالتالي المجموع هو:

$$\begin{aligned} u_0+u_1+...+u_{49} &= u_0\times\left(\frac{1-q^{50}}{1-q}\right) \\ &= 3\times\left(\frac{1-(-1)^{50}}{1-(-1)}\right) \\ &= 3\times\frac{0}{2}=0 \end{aligned}$$

4 نفرض $\alpha=4$ ، وبالتالي $u_{n+1}=3u_n-4$

البرهان بالتراجع أنه، من أجل كل عدد طبيعي n ، الخاصية: $u_n=3^n+2$ صحيحة.

- من أجل $n=0$ لدينا $u_0=3=3^0+2$ وبالتالي الخاصية محققة من أجل $n=0$.
- نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل عدد طبيعي n أي: $u_n=3^n+2$ ونبرهن صحتها من أجل عدد طبيعي $n+1$ اي نبرهن أن: $u_{n+1}=3^{n+1}+2$

حسب الفرض لدينا: $u_n=3^n+2$

نضرب الطرفين في العدد 3 نجد: $3u_n=3(3^n+2)=3^{n+1}+6$

نضيف للطرفين العدد -4 نجد: $3u_n-4=3^{n+1}+2$

أي: $u_{n+1}=3^{n+1}+2$

- خلاصة: حسب مبدأ الإستدلال بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=3^n+2$
- تبيان أن:

$$u_0+u_1+...+u_n=\frac{1}{2}\left(3^{n+1}+4n+3\right).$$

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا:

$$\begin{aligned} u_0+u_1+...+u_n &= (3^0+2)+(3^1+2)+...+(3^n+2) \\ &= (3^0+3^1+...+3^n)+2(n+1) \\ &= 3^0\times\left(\frac{1-3^{n+1}}{1-3}\right)+2(n+1) \\ &= \frac{-1+3^{n+1}}{2}+2(n+1) \\ &= \frac{1}{2}\left(-1+3^{n+1}+2\times(2n+2)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(3^{n+1}+4n+3\right) \end{aligned}$$

التمرين 11 - بكالوريا 2013 الموضوع الثاني

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ : $u_0=6$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=-\frac{1}{2}u_n+6$

1 أ) حساب الحدود: u_1 ، u_2 ، u_3 و u_4.

$$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{1}{2}u_0 + 6 \\ &= -\frac{1}{2}(6) + 6 \\ &= 3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} u_2 &= -\frac{1}{2}u_1 + 6 \\ &= -\frac{1}{2}(3) + 6 \\ &= \frac{9}{2} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} u_3 &= -\frac{1}{2}u_2 + 6 \\ &= -\frac{1}{2} \times \frac{9}{2} + 6 \\ &= \frac{15}{4} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} u_4 &= -\frac{1}{2}u_3 + 6 \\ &= -\frac{1}{2} \times \frac{15}{4} + 6 \\ &= \frac{33}{8} \end{aligned}$$

ب) دراسة رتابة المتتالية (u_n) على $\mathbb{N}$: **نلاحظ مثلا أن** $u_0 > u_1$ **لكن** $u_1 < u_2$ **أي أن حدود** المتتالية (u_n) **ليست مرتبة على** $\mathbb{N}$ **وبالتالي المتتالية** (u_n) **ليست رتيبة على** $\mathbb{N}$.

2 أ) تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - 4 = -\frac{1}{2}(u_n - 4)$

من أجل كل عدد طبيعي n :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - 4 &= -\frac{1}{2}u_n + 6 - 4 \\ &= -\frac{1}{2}u_n + 2 \\ &= -\frac{1}{2}(u_n - 4) \end{aligned}$$

ب) استنتاج أن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = u_n - 4$ هندسية، يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا:

$$\begin{aligned} \frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{u_{n+1} - 4}{u_n - 4} \\ &= \frac{-\frac{1}{2}\cancel{(u_n - 4)}}{\cancel{u_n - 4}} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = -\frac{1}{2}$ وحدها الأول: $v_0 = u_0 - 4 = 6 - 4 = 2$

جـ) كتابة v_n ، بدلالة n .

لدينا: $v_n = v_0 \times q^n = 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ **من جهة أخرى** $v_n = u_n - 4$ **ومنه**

$$u_n = v_n + 4 = 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n + 4$$

د) تبيان أن: (u_n) متقاربة، نقوم بحساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ لدينا:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} 2\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n + 4 = 4$$

ومنه (u_n) متقاربة نحو العدد 4 .

3 باستعمال عبارة u_n ، التأكد ثانية من نتيجة السؤال 1) ب. أي ندرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) من أجل كل عدد طبيعي n لدينا:

$$u_{n+1}-u_n = -\frac{1}{2}u_n + 6 - u_n = -\frac{3}{2}u_n + 6 = -\frac{3}{2}\left(2\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}+4\right)+6 = -3\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

نلاحظ أن الفرق $u_{n+1}-u_n$ لا يحافظ على إشارة ثابتة وبالتالي (u_n) ليست رتيبة .

التمرين 12 - بكالوريا 2014 الموضوع الأول

الإجابة بصحيح أو خطا مع التبرير، في كل حالة من الحالات الآتية:

1 (u_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$ حدودها موجبة تماما و (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = lnu_n$.

أ) خطأ

التعليل نأخذ مثلا (u_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ $u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ واضح أن حدود المتتالية (u_n) موجبة تماما و ان المتتالية (u_n) متقاربة نحو 0 لأن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ لكن، $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} ln(u_n) = -\infty$ اذا (v_n) ليست متقاربة .

ب) صحيح

التعليل (u_n) متناقصة تعني أن $u_{n+1} < u_n$ من أجل كل عدد طبيعي n ومنه $ln(u_{n+1}) < ln(u_n$ أي $v_{n+1} < v_n$ وبالتالي (v_n) متناقصة.

جـ) صحيح

التعليل إذا كانت (u_n) هندسية فإنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون $\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$ حيث q هو أساس المتتالية (u_n) وبالتالي من أجل كل عدد طبيعي n فإن

$$v_{n+1}-v_n = ln(u_{n+1}) - ln(u_n) = ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = ln(q)$$

وبالتالي (v_n) حسابية أساسها $r = ln(q)$

حل التمرين 12 - بكالوريا 2014 الموضوع الأول

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = 3$ و $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - 1$

1 أ) البرهان بالتراجع ان الخاصية من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n > -3$ صحيحة

- من أجل $n = 0$ لدينا $u_0 = 3 > -3$ وبالتالي الخاصية محققة من أجل $n = 0$.
- نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل عدد طبيعي n أي: $u_n > -3$ ونبرهن صحتها من أجل عدد طبيعي $n + 1$ اي نبرهن أن: $u_{n+1} > -3$

حسب الفرض لدينا: $u_n > -3$

نضرب الطرفين في العدد $\frac{2}{3}$ نجد: $\frac{2}{3}u_n > -3 \times \frac{2}{3}$

نضيف للطرفين العدد -1 نجد: $\frac{2}{3}u_n - 1 > -2 - 1$

أي: $u_{n+1} > -3$ صحيحة

- خلاصة: حسب مبدأ الإستدلال بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > -3$

ب) تبيان أن المتتالية (u_n) متناقصة.

المتتالية (u_n) من الشكل $u_{n+1} = au_n + b$ حيث $a = \frac{2}{3} > 0$ وبالتالي (u_n) رتيبة. ندرس إشارة الفرق: $u_1 - u_0$ لدينا: $u_1 = \frac{2}{3}u_0 - 1 = 1$ ومنه: $u_1 - u_0 = 1 - 3 = -2 < 0$ وبالتالي المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

- الإستنتاج: بما أن (u_n) متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل بالعدد -3 فإنها متقاربة نحو -3 .

2 لتكن (v_n) متتالية هندسية متقاربة أساسها q حيث $v_0 = 6$ و $\lim_{x\to+\infty}(v_0 + v_1 + ... + v_n) = 18$

أ) تبيان أن $\lim_{x\to+\infty}(v_0 + v_1 + ... + v_n) = \frac{v_0}{1-q}$

لدينا:

$$v_0 + v_1 ... + v_n = v_0 \times \left(\frac{1 - q^{n+1}}{1-q}\right)$$

وبما أن المتتالية: (u_n) هندسية متقاربة فإن: $\lim_{x\to+\infty} q^{n+1} = 0$ ومنه:

$$\lim_{n\to+\infty}(v_0 + v_1 + ... + v_n) = \lim_{n\to+\infty} v_0 \times \left(\frac{1 - q^{n+1}}{1-q}\right) = \frac{v_0}{1-q}$$

ب) حساب الأساس q لدينا: $\frac{v_0}{1-q} = 18$ ومنه: $v_0 = 18 - 18q$ أي $18q = 12$ ومنه: $q = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$

ب) كتابة عبارة v_n بدلالة n :

$$v_n = v_0 \times q^n = 6 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

جـ) البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = v_n - 3$ نستعمل البرهان بالتراجع على أن الخاصية $u_n = v_n - 3$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n

- من أجل $n = 0$ لدينا $u_0 - 3 = 6 - 3 = 3 = v_0$ وبالتالي الخاصية محققة من أجل $n = 0$.
- نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل عدد طبيعي n أي: $u_n = v_n - 3$ ونبرهن صحتها من أجل عدد طبيعي $n + 1$ اي نبرهن أن: $u_{n+1} = v_{n+1} - 3$

حسب الفرض لدينا: $u_n = v_n - 3$

نضرب الطرفين في العدد $\frac{2}{3}$ نجد: $\frac{2}{3}u_n = \frac{2}{3}(v_n - 3) = \frac{2}{3}v_n - 2$

نضيف للطرفين العدد -1 نجد: $\frac{2}{3}u_n - 1 = \frac{2}{3}v_n - 2 - 1 = \frac{2}{3}v_n - 3$

(لاحظ أن $v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n$ لأن (v_n) هندسية) ومنه:

$$u_{n+1} = v_{n+1} - 3$$

- خلاصة: حسب مبدأ الإستدلال بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = v_n - 3$
- استنتاج عبارة u_n بدلالة n .

$$u_n = v_n - 3 = 6 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n - 3$$

حل التمرين 12 - بكالوريا 2015 الموضوع الأول:

اختيار الإقتراح الصحيح

1 نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بحدها العام: $u_n = 5 \times 2^n \times 3^{n-1}$

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا:

$$\begin{aligned}
\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{5 \times 2^{n+1} \times 3^{n-1+1}}{5 \times 2^n \times 3^{n-1}} \\
&= \frac{\cancel{5} \times \cancel{2^n} \times 2 \times \cancel{3^n}}{\cancel{5} \times \cancel{2^n} \times \cancel{3^n} \times 3^{-1}} \\
&= 2 \times 3 \\
&= 6
\end{aligned}$$

وبالتالي الإجابة الصحيحة هي :

ب) (u_n) هندسية أساسها 6

2 (v_n) متتالية حسابية حدها الأول $v_0 = 1$ و أساسها 4، لدينا: $v_1 = v_0 + 4 = 1 + 4 = 5$ و ومنه: $v_n = v_0 + 4n = 1 + 4n$

$$\begin{aligned} v_0 + v_1 ... + v_n &= \frac{n}{2}(v_1 + v_n) \\ &= \frac{n}{2}(5 + 1 + 4n) \\ &= \frac{n}{2}(6 + 4n) \end{aligned}$$

ومنه: $\frac{n}{2}(6 + 4n) = 2015$ أي $4n^2 + 6n - 3030 = 0$ وهي معادلة من الدرجة الثانية. مميزها $\Delta = 6^2 - 4 \times 4 \times (-4030) = 64516$ وبالتالي: المعادلة تقبل حلان هما:

$\frac{-6 - \sqrt{64516}}{2(4)} = \frac{-6 - 254}{8} = -32,5$ وهذا الحل مرفوض لأن n عدد طبيعي.

الحل الثاني هو: $\frac{-6 + \sqrt{64516}}{2(4)} = \frac{-6 + 254}{8} = 31$ وبالتالي الإجابة الصحيحة هي :

أ) $n = 31$

حل التمرين 09 - بكالوريا 2015 الموضوع الثاني

يرمز u_n إلى عدد العمال سنة $2012 + n$، أي $u_0 = 50$

1 أ) حساب كلا من u_1 و u_2 .

u_0 عدد العمال سنة 2012، أي $u_0 = 50$

u_1 عدد العمال سنة 2013 أي: $u_1 = \left(1 - \frac{5}{100}\right) u_0 + 3 = 0,95 \times 50 + 3 = 50,5$

u_2 عدد العمال سنة 2014 أي: $u_2 = \left(1 - \frac{5}{100}\right) u_1 + 3 = 0,95 \times 50,5 + 3 = 50,975$

ب) من اجل كل عدد طبيعي n لدينا: $u_{n+1} = \left(1 - \frac{5}{100}\right) u_n + 3 = 0,95u_n + 3$

جـ) هل المتتالية (u_n) هندسية؟ هل هي حسابية؟

لدينا: $u_0 \times u_2 = 2548,75$ و $u_1^2 = 2550,25$ أي $u_0 \times u_2 \neq u_1^2$ وبالتالي: (u_n) ليست هندسية.

لدينا: $u_0 + u_2 = 100,975$ و $2u_1 = 101,95$ ومنه: $u_0 + u_2 \neq 2u_1$ وبالتالي: (u_n) ليست حسابية.

2 نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = 60 - u_n$.

أ) تبيان أنَ المتتالية (v_n) هندسية يطلب تحديد أساسها وحدها الأول v_0 .

(v_n) متتالية هندسية أساسها q تعني أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون $q = \frac{v_{n+1}}{v_n}$.

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا:

$$\begin{aligned}
\frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{60-u_{n+1}}{60-u_n} \\
&= \frac{60-0,95u_n-3}{60-u_n} \\
&= \frac{57-0,95u_n}{60-u_n} \\
&= \frac{0,95\,\cancel{(60-u_n)}}{\cancel{60-u_n}} \\
&= 0,95
\end{aligned}$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=0,95$ وحدها الأول: $v_0=60-u_0=60-50=10$.

ب) كتابة عبارة v_n بدلالة n ثم استنتاج عبارة u_n .

لدينا: $v_n=v_0\times q^n=10\times(0,95)^n$ من جهة أخرى $v_n=60-u_n$ ومنه

$$u_n=60-v_n=60-10\times(0,95)^n$$

جـ) تقدير لعدد العمال سنة 2017

لدينا: $2012+n=2017$ تعني أن $n=5$ وبالتالي عدد العمال هو

$$u_5=60-10\,(0,95)^5\approx 52,262$$

أي عدد العمال سنة 2017 حوالي 52262 عامل.

د) تحديد اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

نقوم بدراسة إشارة الفرق: $u_{n+1}-u_n$ من أجل كل عدد طبيعي n لدينا:

$$\begin{aligned}
u_{n+1}-u_n &= 0,95u_n+3-u_n \\
&= -0,05u_n+3 \\
&= -0,05\,(60-10\,(0,95)^n)+3 \\
&= -3+0,5\,(0,95)^n+3 \\
&= 0,5\,(0,95)^n>0
\end{aligned}$$

وبالتالي المتتالية (u_n) متزايدة تماما

و) حساب نهاية المتتالية (u_n)

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}60-10\times(0,95)^n=60$$

وبالتالي لا يمكن أن يصل عدد العمال إلى 60000 عامل لأن نهاية المتتالية (u_n) لم تجاوز 60 .

حل التمرين 13 -بكالوريا 2016 الموضوع الأول:

(v_n) متتالية هندسية حدودها موجبة ومعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $v_0 = 18$ و $v_0 + v_1 + v_2 = 38$

1 تبيانَ أن أساس المتتالية (v_n) هو $q = \dfrac{3}{2}$

المعادلة $v_0 + v_1 + v_2 = 38 ...(1)$ ذات ثلاث مجاهيل، إذا نحولها إلى معادلة ذات مجهول واحد.
لدينا: $v_0 = 18$; $v_1 = v_0 \times q = 18q$; $v_2 = v_0 \times q^2 = 18q^2$ ومنه المعادلة (1) تكافئ

$$18q^2 + 18q - 20 = 0$$

وهي معادلة من الدرجة الثانية. مميزها $\Delta = 18^2 - 4 \times 18 \times (-20) = 1764$ وبالتالي: المعادلة تقبل حلان هما:
$\dfrac{-18 - \sqrt{1764}sq}{2(18)} = \dfrac{-18 - 42}{36} = -\dfrac{60}{36}$ وهذا الحل مرفوض لأن حدود المتتالية (v_n) موجبة.
الحل الثاني هو: $\dfrac{-18 + \sqrt{1764}sq}{2(18)} = \dfrac{-18 + 42}{36} = \dfrac{24}{36} = \dfrac{2}{3}$ وبالتالي: $q = \dfrac{2}{3}$ وهو المطلوب.

2 أ) عبارة الحد العام v_n بدلالة n .

$$v_n = v_0 \times q^n = 18 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

ب) دراسة إتجاه تغير المتتالية (v_n).

نقوم بدراسة إشارة الفرق: $v_{n+1} - v_n$ من أجل كل عدد طبيعي n لدينا:

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= 18 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 18 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n \\ &= 18 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n \left(\frac{2}{3}\right) - 6 \left(\frac{2}{3}\right)^n \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^n \left(18 \times \frac{2}{3} - 18\right) \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^n (-6) < 0 \end{aligned}$$

وبالتالي المتتالية (v_n) متناقصة تماما.

جـ) حساب نهاية (v_n) .

$$\lim_{n \to +\infty} v_n = \lim_{n \to +\infty} 18 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$$

لأن:

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$$

3 نضع: $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$

أ) حساب S_n بدلالة n .

$$\begin{aligned} S_n &= v_0 + v_1 ... + v_n \\ &= v_0 \times \left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right) \\ &= 18 \times \left(\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}}\right) \\ &= 54 \times \left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) \end{aligned}$$

• استنتاج نهاية S_n عندما يؤول n إلى $+\infty$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} 54 \times \left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) = 54$$

لأن:

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} = 0$$

ب) إيجاد قيمة العدد الطبيعي n بحيث: $S_n = \frac{3510}{81}$

$S_n = \frac{3510}{81}$ تكافئ

$$54 \times \left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) = \frac{3510}{81}$$

وبالتالي

$$\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n}\right) = \frac{3510}{81} \times \frac{1}{54}$$

معناه

$$1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n} = \frac{65}{81}$$

وبالتالي

$$-\left(\frac{2}{3}\right)^{n} = \frac{65}{81} - 1 = -\frac{16}{81}$$

إدا

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{n} = \frac{16}{81}$$

ومنه

$$ln\left(\frac{2}{3}\right)^n = ln\left(\frac{16}{81}\right)$$

أي

$$nln\left(\frac{2}{3}\right) = ln\left(\frac{16}{81}\right)$$

ومنه

$$n = \frac{ln\left(\frac{16}{81}\right)}{ln\left(\frac{2}{3}\right)} = 4$$

التمرين 13 -بكالوريا 2016 الموضوع الثاني:

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = 5$ و $u_{n+1} = \frac{4}{7}u_n + \frac{3}{7}$

1 حساب الحدين u_1 و u_2

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{4}{7}u_0 + \frac{3}{7} \\ &= \frac{4}{7} \times 5 + \frac{3}{7} \\ &= \frac{23}{7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_2 &= \frac{4}{7}u_1 + \frac{3}{7} \\ &= \frac{4}{7} \times \frac{23}{7} + \frac{3}{7} \\ &= \frac{113}{49} \end{aligned}$$

..

2 أ) البرهان بالتراجع ان الخاصية من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 1$ صحيحة

- من أجل $n = 0$ لدينا $u_0 = 5 > 1$ وبالتالي الخاصية محققة من أجل $n = 0$.
- نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل عدد طبيعي n أي: $u_n > 1$ ونبرهن صحتها من أجل عدد طبيعي $n+1$ اي نبرهن أن: $u_{n+1} > 1$

حسب الفرض لدينا: $u_n > 1$

نضرب الطرفين في العدد $\frac{4}{7}$ نجد: $\frac{4}{7}u_n > \frac{4}{7} \times 1$

نضيف للطرفين العدد $\frac{3}{7}$ نجد: $\frac{4}{7}u_n + \frac{3}{7} > \frac{4}{7} + \frac{3}{7}$

أي: $u_{n+1} > 1$

- خلاصة: حسب مبدأ الإستدلال بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 1$

ب) تبيان أن المتتالية (u_n) متناقصة.

المتتالية (u_n) من الشكل $u_{n+1} = au_n + b$ حيث $a = \frac{4}{7} > 0$ وبالتالي (u_n) رتيبة. ندرس إشارة الفرق: لدينا: $u_1 - u_0 = \frac{113}{49} - \frac{23}{7} = -\frac{48}{49} < 0$ وبالتالي المتتالية (u_n)

متناقصة تماما.

جـ) بما أن (u_n) متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل بالعدد 1 فإنها متقاربة نحو 1 .

3 لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = u_n - 1$

أ) تبيان أن (v_n) متتالية هندسية .

(v_n) متتالية هندسية أساسها q تعني أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون $q = \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$.

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا:

$$\begin{aligned}
\frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{u_{n+1}-1}{u_n-1} \\
&= \frac{\frac{4}{7}u_n + \frac{3}{7} - 1}{u_n - 1} \\
&= \frac{\frac{4}{7}u_n - \frac{4}{7}}{u_n - 1} \\
&= \frac{\frac{4}{7}\cancel{(u_n - 1)}}{\cancel{u_n - 1}} \\
&= \frac{4}{7}
\end{aligned}$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \dfrac{4}{7}$ وحدها الأول: $v_0 = u_0 - 1 = 5 - 1 = 4$.

ب) كتابة v_n بدلالة n لدينا: $v_n = v_0 \times q^n = 4 \times \left(\dfrac{4}{7}\right)^n$ من جهة أخرى $v_n = u_n - 1$ ومنه

$$u_n = v_n + 1 = 1 + 4 \times \left(\frac{4}{7}\right)^n$$

جـ) حساب نهاية (u_n) .

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} 1 + 4 \times \left(\frac{4}{7}\right)^n = 1$$

لأن:

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{4}{7}\right)^n = 0$$

التمرين 14 -بكالوريا 2017 - الموضوع الأول

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدها الأول $u_0 = -1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + 2$

1 أ) البرهان بالتراجع ان الخاصية من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n < 3.$ صحيحة

- من أجل $n = 0$ لدينا $u_0 = -1 < 3$ وبالتالي الخاصية محققة من أجل $n = 0$.
- نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل عدد طبيعي n أي: $u_n < 3$ ونبرهن صحتها من أجل عدد طبيعي $n+1$ اي نبرهن أن: $u_{n+1} < 3$

حسب الفرض لدينا: $u_n < 3$

نضرب الطرفين في العدد $\frac{1}{3}$ نجد: $\frac{1}{3}u_n < \frac{1}{3} \times 3$

نضيف للطرفين العدد 2 نجد: $\frac{1}{3}u_n + 2 < \frac{1}{3} \times 3 + 2$

أي: $u_{n+1} < 3$

- خلاصة: حسب مبدأ الإستدلال بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n < 3.$:

ب) تبيان أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

المتتالية (u_n) من الشكل $u_{n+1} = au_n + b$ حيث $a = \frac{1}{3} > 0$ وبالتالي (u_n) رتيبة، ندرس إشارة الفرق: $u_1 - u_0$ لدينا: $u_1 = \frac{1}{3}u_0 + 2 = \frac{5}{3} > 0$ ومنه $u_1 - u_0 = \frac{5}{3} - 1 = \frac{2}{3} > 0$
وبالتالي المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

- بما أن (u_n) متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى بالعدد 3 فإنها متقاربة نحو 3 .

2 (v_n) المتتالية المعرفة بـ: من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = 3 - u_n$

أ) تبيان أن (v_n) متتالية هندسية .

(v_n) متتالية هندسية أساسها q تعني أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون $\frac{v_{n+1}}{v_n} = q$.

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا:

$$\begin{aligned}
\frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{3 - u_{n+1}}{3 - u_n} \\
&= \frac{3 - \frac{1}{3}u_n - 2}{3 - u_n} \\
&= \frac{1 - \frac{1}{3}u_n}{3 - u_n} \\
&= \frac{\frac{1}{3}\cancel{(3 - u_n)}}{\cancel{3 - u_n}} \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$ وحدها الأول: $v_0 = 3 - u_0 = 3 - (-1) = 4$.

ب) نضع من اجل كل عدد طبيعي n :

$$S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$$

- تبيان أنه من اجل كل عدد طبيعي n:

$$S_n = 3(n-1) + 2\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

من اجل كل عدد طبيعي n: لدينا:

$$\begin{array}{rcl} S_n &=& u_0 + u_1 + ... + u_n \\ &=& (3 - v_0) + (3 - v_1) + ... + (3 - v_n) \\ &=& 3(n+1) - (v_0 + v_1 ... + v_n) \\ &=& 3(n+1) - v_0 \times \left(\dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}\right) \\ &=& 3(n+1) - 4 \times \left(\dfrac{1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \dfrac{1}{3}}\right) \\ &=& 3(n+1) - 6 \times \left(1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}\right) \\ &=& 3n + 3 - 6 + 6\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1} \\ &=& 3n - 3 + 6\left(\dfrac{1}{3}\right)^n \times \dfrac{1}{3} \\ &=& 3(n-1) + 2\left(\dfrac{1}{3}\right)^n \end{array}$$

التمرين 14 -بكالوريا 2017 - الموضوع الثاني

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدها الاول $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 3u_n - 2$

1 حساب الحدود u_1 ، u_2 و u_3

$$\begin{array}{rcl} u_1 &=& 3u_0 - 2 \\ &=& 3 \times 2 - 2 \\ &=& 4 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} u_2 &=& 3u_1 - 2 \\ &=& 3 \times 4 - 2 \\ &=& 10 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} u_3 &=& 3u_2 - 2 \\ &=& 3 \times 10 - 2 \\ &=& 28 \end{array}$$

∴ تخمين اتجاه تغير المتتالية (u_n)

نلاحظ أن $u_2 > u_1 > u_0$ وبالتالي نخمن أن (u_n) متزايدة.

2 نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = u_{n+1} - u_n$. أي:

$$v_n = u_{n+1} - u_n = 3u_n - 2 - u_n = 2u_n - 2$$

أ) تبيان أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها 3 يطلب تعيين حدها الأول.
(v_n) متتالية هندسية أساسها 3 تعني أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون $\frac{v_{n+1}}{v_n} = 3$.
من أجل كل عدد طبيعي n لدينا:

$$\begin{aligned}\frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{2u_{n+1}-2}{2u_n-2}\\ &= \frac{2(3u_n-2)-2}{u_n-2}\\ &= \frac{6u_n-6}{2u_n-2}\\ &= \frac{3\,\cancel{(2u_n-2)}}{\cancel{2u_n-2}}\\ &= 3\end{aligned}$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = 3$ وحدها الأول: $v_0 = 2u_0 - 2 = 2\times 2 - 2 = 2$.

ب) تعيين v_n بدلالة n

$$v_n = v_0 \times q^n = 2\times(3)^n$$

- استنتاج أن المتتالية (u_n) متزايدة. من أجل كل عدد طبيعي n لدينا:

$$v_n = u_{n+1} - u_n = v_n = 2\times(3)^n > 0$$

وبالتالي المتتالية (u_n) متزايدة.

3 نضع من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_{n-1}$

أ) حساب S_n بدلالة n.

$$\begin{aligned}S_n &= v_0 + v_1 ... + v_{n-1}\\ &= v_0 \times \left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)\\ &= 2\times\left(\frac{1-(3)^n}{1-3}\right)\\ &= -1+(3)^n\end{aligned}$$

ب) تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = S_n + u_0$ أي نبين أن

$$u_n = S_n + u_0 = -1 + 3^n + 2 = 1 + 3^n$$

نستعمل مثلا البرهان بالتراجع على ان الخاصية من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 1+3^n$ صحيحة (يمكن إستعمال طرق أخرى)
- من أجل $n = 0$ لدينا $u_0 = 2 = 1 + 3^0$ وبالتالي الخاصية محققة من أجل $n = 0$.

- نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل عدد طبيعي n أي: $u_n = 1 + 3^n$ ونبرهن صحتها من أجل عدد طبيعي $n+1$ اي نبرهن أن: $u_{n+1} = 1 + 3^{n+1}$

حسب الفرض لدينا: $u_n = 1 + 3^n$

نضرب الطرفين في العدد 3 نجد: $3u_n = 3 \times (1 + 3^n) = 3 + 3^{n+1}$

نضيف للطرفين العدد -2 نجد: $3u_n - 2 = 1 + 3^{n+1}$

أي: $u_{n+1} = 1 + 3^{n+1}$

- خلاصة: حسب مبدأ الإستدلال بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 1+3^n$
- استنتاج عبارة u_n بدلالة n من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_n = 1 + 3^n$$

حل التمرين 14 -بكالوريا 2017 الموضوع الأول:-الدورة الإستثنائية

لتكن (u_n) المتتالية المعرفة بحدها الأول $u_0 = -2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$

1 أ) نستعمل البرهان بالتراجع لإثبات ان الخاصية من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n < 2$ صحيحة

- من أجل $n = 0$ لدينا $u_0 = -2 < 2$ وبالتالي الخاصية محققة من أجل $n = 0$.
- نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل عدد طبيعي n أي: $u_n < 2$ ونبرهن صحتها من أجل عدد طبيعي $n+1$ اي نبرهن أن: $u_{n+1} < 2$

حسب الفرض لدينا: $u_n < 2$

نضرب الطرفين في العدد $\frac{1}{2}$ نجد: $\frac{1}{2}u_n < \frac{1}{2} \times 2$

نضيف للطرفين العدد 1 نجد: $\frac{1}{2}u_n + 1 < \frac{1}{2} \times 2 + 1$

أي: $u_{n+1} < 2$

- خلاصة: حسب مبدأ الإستدلال بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_n < 2$$

ب) تعيين إتجاه تغير المتتالية (u_n)

المتتالية (u_n) من الشكل $u_{n+1} = au_n + b$ حيث $a = \frac{1}{2} > 0$ وبالتالي (u_n) رتيبة. ندرس إشارة الفرق: $u_1 - u_0$ لدينا: $u_1 = \frac{1}{2}u_0 + 1 = \frac{1}{2}(-2) + 1 = 0$ ومنه: $u_1 - u_0 = 0 - (-2) = 2 > 0$ وبالتالي المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

- الإستنتاج: بما أن (u_n) متزايدة تماما ومحدودة من السفل بالعدد 2 فإنها متقاربة نحو 2

2 لتكن المتتالية العددية (v_n) المعرفة كمايلي: من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = 2u_n - 4$

أ) تبيان أن (v_n) متتالية هندسية .

(v_n) متتالية هندسية أساسها q تعني أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون $\frac{v_{n+1}}{v_n} = q$.

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا:

$$\begin{aligned}
\frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{2u_{n+1} - 4}{2u_n - 4} \\
&= \frac{2\left(\frac{1}{2}u_n + 1\right) - 4}{2u_n - 4} \\
&= \frac{u_n - 2}{2u_n - 4} \\
&= \frac{\cancel{u_n - 2}}{2\left(\cancel{u_n - 2}\right)} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ وحدها الأول: $v_0 = 2u_0 - 4 = 2(-2) - 4 = -8$.

ب) كتابة عبارة v_n بدلالة n :

لدينا: $v_n = v_0 \times q^n = -8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$ من جهة أخرى $v_n = 2u_n - 4$ ومنه

$$u_n = \frac{1}{2}v_n + 2 = \frac{1}{2} \times (-8) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2 = -4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2$$

جـ) حساب بدلالة n المجموع S_n :

$$\begin{aligned}
S_n &= u_0 + u_1 + ... + u_n \\
&= (\frac{1}{2}v_0 + 2) + (\frac{1}{2}v_1 + 2) + ... + (\frac{1}{2}v_n + 2) \\
&= \frac{1}{2}(v_0 + v_1 ... + v_n) + 2(n+1) \\
&= \frac{1}{2}v_0 \times \left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}\right) + 2(n+1) \\
&= \frac{1}{2} \times (-8) \times \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}}\right) + 2(n+1)) \\
&= -8\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) + 2(n+1) \\
&= 8\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 2n - 6
\end{aligned}$$

حل التمرين17-بكالوريا 2017 -الدورة الإستثنائية -الموضوع الثاني

نعتبر المتتالية الهندسية (v_n) ذات الأساس e^2 والحد الأول $v_0 = 1$ حيث: $v_n = 1$ (e يرمز إلى أساس اللوغاريتم النيبيري).

1 حساب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = v_0 + v_1 ... + v_n$

$$\begin{aligned} S_n &= v_0 + v_1 ... + v_n \\ &= v_0 \times \left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right) \\ &= 1 \times \left(\frac{1-e^{2(n+1)}}{1-e^2}\right) \\ &= \frac{1-e^{2n+2}}{1-e^2} \end{aligned}$$

2 نعتبر المتتاليتين (u_n) و (w_n) المعرفتين كمايلي: من أجل كل عدد طبيعي

$w_n = 2n + 4 + e^n$ و $u_n = w_n - v_n$

- تبيان أن: المتتالية (u_n) حسابية ، و تحديد أساسها r وحدها الأول u_0

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا: $u_n = w_n - v_n = 2n + 4 + e^{2n} - e^{2n} = 2n + 4$ وبالتالي

$$u_{n+1} - u_n = 2(n+1) + 4 - (2n+4) = 2n + 6 - 2n - 4 = 2$$

وبالتالي (u_n) متتالية حسابية أساسها: $r = 2$ وحدها الأول $u_0 = 2(0) + 4 = 4$

3 إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن:

$$4 + 6 + 8 + ... + (2n+4) = (n+1)(n+4)$$

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا:

$$\begin{aligned} 4 + 6 + 8 + ... + (2n+4) &= u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n \\ &= \frac{n+1}{2}(u_0 + u_n) \\ &= \frac{n+1}{2}(8 + 2n) \\ &= \frac{n+1}{\cancel{2}} \times \cancel{2}(4+n) \\ &= (n+1)(n+4) \end{aligned}$$

4 استنتاج المجموع T_n بدلالة n حيث:

$$T_n = w_0 + w_1 + ... + w_n$$

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا:

$$\begin{aligned} T_n &= w_0 + w_1 + ... + w_n \\ &= (u_0 + v_0) + (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + ... + (u_n + v_n) \\ &= (u_0 + u_1 ... + u_n) + (v_0 + v_1 ... + v_n) \\ &= (n+1)(n+4) + \frac{1-e^{2n+2}}{1-e^2} \end{aligned}$$

التمرين 14 -بكالوريا 2018 -الموضوع الأول

$I)$ لتكن المتتاليتان العدديتان (u_n) و (v_n) المعرفتان كمايلي: $u_0 = 50$ و من أجل عدد طبيعي n :
$u_{n+1} = 0,7u_n + 6$ و $v_n = u_n - 20$

1 البرهان أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $0,7$ يطلب تعيين حدها الأول v_0
(v_n) متتالية هندسية أساسها $0,7$ تعني أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون $\frac{v_{n+1}}{v_n} = 0,7$.
من أجل كل عدد طبيعي n لدينا:

$$\begin{aligned}\frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{u_{n+1}-20}{u_n-20}\\ &= \frac{0,7u_n+6-20}{u_n-20}\\ &= \frac{0,7u_n-14}{u_n-20}\\ &= \frac{0,7\,\cancel{(u_n-20)}}{\cancel{u_n-20}}\\ &= 0,7\end{aligned}$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = 0,7$ وحدها الأول: $v_0 = u_0 - 20 = 50 - 20 = 30$.

- كتابة عبارة v_n بدلالة n

$$v_n = v_0 \times q^n = 30 \times (0,7)^n$$

.

2 أ) كتابة بدلالة n عبارة الحد العام u_n لدينا $v_n = u_n - 20$ ومنه

$$u_n = v_n + 20 = 30 \times (0,7)^n + 20$$

ب) تعيين إتجاه تغير المتتالية (u_n)
نقوم بدراسة إشارة الفرق: $u_{n+1} - u_n$ من أجل كل عدد طبيعي n لدينا:

$$\begin{aligned}u_{n+1} - u_n &= 0,7u_n + 6 - u_n\\ &= -0,3u_n + 6\\ &= -0,3\left(30 \times (0,7)^n + 20\right) + 6\\ &= -9\,(0,7)^n - 6 + 6\\ &= -9\,(0,7)^n < 0\end{aligned}$$

وبالتالي المتتالية (u_n) متناقصة تماما.(يمكن استعمال الطريقة المتبعة في أغلب التمارين)
- حساب نهاية (u_n) .

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} 30 \times (0,7)^n + 20 = 20$$

لأن:

$$\lim_{n\to+\infty}(0,7)^n=0$$

II) تملك جريدة يومية 5000 مشترك في سنة 2016 . بعد كل سنة تفقد 30% من المشتركين وتكتسب 600 مشترك جديد.

نعتبر المئة هي الوحدة و نرمز بـ: u_n لعدد المشتركين في سنة $2006+n$ أي $u_0=50$

1 عدد المشتركين في سنة 2017 هو 4100

$$u_1=\left(1-\frac{30}{100}\right)u_0+6=0,7\times 50+6=41$$

عدد المشتركين في سنة 2018 هو 3470

$$u_2=\left(1-\frac{30}{100}\right)u_1+6=0,7\times 41+6=34,7$$

2 أ) من أجل كل عدد طبيعي n لدينا: $u_{n+1}=\left(1-\frac{30}{100}\right)u_n+6=0,7u_n+6$.

ب) عدد المشتركين أقل من 2400 مشترك تعني أن: $u_n<24$ أي $30\times(0,7)^n+20<24$ ومنه: $0,7^n<\frac{4}{30}$ إذا $nln(0,7)<ln\left(\frac{4}{30}\right)$ نضرب طرفي المتباينة في العدد السالب $ln(0,7)$

نجد $n>\dfrac{\left(\frac{4}{30}\right)}{ln(0,7)}=6$

وبالتالي يكون عدد المشتركين أقل من 2400 بدءا من سنة $2016+6=2022$

التمرين 20 -بكالوريا 2018 -الموضوع الثاني

(u_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي $u_0=-1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n فإن: $2u_{n+1}=u_n+6$ أي

$$2u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+\frac{6}{2}=\frac{1}{2}u_n+3$$

1 أ) البرهان بالتراجع ان الخاصية من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n<6$ صحيحة

- من أجل $n=0$ لدينا $u_0=-1<6$ وبالتالي الخاصية محققة من أجل $n=0$.
- نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل عدد طبيعي n أي: $u_n<6$ ونبرهن صحتها من أجل عدد طبيعي $n+1$ اي نبرهن أن: $u_{n+1}<6$

حسب الفرض لدينا: $u_n<6$

نضرب الطرفين في العدد $\frac{1}{2}$ نجد: $\frac{1}{2}u_n<\frac{1}{2}\times 6$

نضيف للطرفين العدد 3 نجد: $\frac{1}{2}u_n+3<\frac{1}{2}\times 6+3$

أي: $u_{n+1}<6$

- خلاصة: حسب مبدأ الإستدلال بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n < 6$

ب) دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n)

المتتالية (u_n) من الشكل $u_{n+1} = au_n + b$ حيث $a = \frac{1}{2} > 0$ وبالتالي (u_n) رتيبة، ندرس إشارة الفرق: $u_1 - u_0$ لدينا: $u_1 = \frac{1}{2}u_0 + 3 = \frac{1}{2}(-1) + 3 = \frac{5}{2}$ ومنه:

$u_1 - u_0 = \frac{5}{2} - (-1) = \frac{7}{2} > 0$ وبالتالي المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

- بما أن (u_n) متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى بالعدد 6 فإنها متقاربة نحو 6 .

2 نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n - 6$

أ) تبيان أن (v_n) متتالية هندسية .

(v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ تعني أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون $\frac{v_{n+1}}{v_n} = q$.

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا:

$$\begin{aligned}\frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{u_{n+1} - 6}{u_n - 6}\\ &= \frac{\frac{1}{2}u_n + 3 - 6}{u_n - 6}\\ &= \frac{\frac{1}{2}\cancel{(u_n - 6)}}{\cancel{u_n - 6}}\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ وحدها الأول: $v_0 = u_0 - 6 = -1 - 6 = -7$.

ب) كتابة عبارة v_n بدلالة n :

لدينا: $v_n = v_0 \times q^n = -7 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$ من جهة أخرى $v_n = u_n - 6$ ومنه

$$u_n = v_n + 6 = -7 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 6$$

- حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} -7 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 6 = 6$$

لأن:

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

3 حساب، بدلالة n مايلي:

- حساب S_n

$$\begin{aligned}
S_n &= u_0 + u_1 + ... + u_n \\
&= (v_0+6)+(v_1+6)+...+(v_n+6) \\
&= (v_0+v_1...+v_n)+6(n+1) \\
&= v_0 \times \left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)+6(n+1) \\
&= -7 \times \left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}\right)+6(n+1)) \\
&= -14 \times \left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)+6n+6 \\
&= 14\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}+6n-8
\end{aligned}$$

- حساب P_n

$$\begin{aligned}
P_n &= v_0 \times v_1 \times ... \times v_n \\
&= (-7)\times\left(\frac{1}{2}\right)^0 \times (-7)\times\left(\frac{1}{2}\right)^1 \times ... \times (-7)\times\left(\frac{1}{2}\right)^n \\
&= (-7)^{n+1}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{0+1+...+n} \\
&= (-7)^{n+1}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}
\end{aligned}$$