القسمـــة في مجموعـــة الأعداد الصحيحـــة

الأستاذ:بوخلاط محمد — الكفاءات المستهدفة

1) إثبات أن عدد صحيح يقسم عددا صحيحا أخر.
2) استعمال خواص قابلية القسمة في مجموعة الاعداد الصحيحة .
3) استعمال خوارزمية إقليدس لتعيين القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين .
4) استعمال خوارزمية إقليدس لتعيين القواسم المشتركة لعددين طبيعيين .
5) حل مشكلات بتوظيف خواص القاسم المشترك الأكبر

قابلية القسمة في مجموعة الاعداد الصحيحة :

1) **تعريف :** a و b عددان صحيحان و b غير معدوم . القول أن العدد a يقسم العدد b يعني وجود عدد صحيح k حيث : $b=ka$. نقول كذلك a قاسم للعدد b أو نقول كذلك b مضاعف للعدد a . نكتب $a|b$ ونقرأ a يقسم b.

أمثلة :

1) $3|36$
2) $(-3)|36$
3) $5|(-55)$
4) $(-11)|(-66)$

ملاحظة : في Z للعددين a و $(-a)$ نفس القواسم .

2) **خواص :**

خاصية 1: a، b و c ثلاثة أعداد صحيحة غير معدومة .
إذا كان a يقسم b و b يقسم c فإن a يقسم c .

البرهان :
إذا كان $a|b$ و $b|c$ فإن $b=ka$ و $c=k'b$ حيث k و k' أعداد صحيحة و بالتالي $c=(kk')a$ وبما أن (kk') عدد صحيح فإن a يقسم c .

خاصية 2 : a و b عددان صحيحان و a غير معدوم .
إذا كان a يقسم b فإنه من أجل كل عدد صحيح m ، a يقسم mb .

البرهان :
إذا كان $a|b$ فإن $b=ka$ حيث k عدد صحيح وبالتالي $mb=m(ka)=k(ma)$ وبما أن ma عدد صحيح فإن a يقسم mb.

خاصية 3 : a و b عددان صحيحان و a غير معدوم .
إذا كان a يقسم b فإنه من أجل كل عدد صحيح غير معدوم m ، ma يقسم mb .

البرهان :
إذا كان $a|b$ فإن $b=ka$ حيث k عدد صحيح وبالتالي $mb=m(ka)=k(ma)$ وبما أن k عدد صحيح فإن ma يقسم mb.

طرائـــــق

تـمريـن 1 :

عين الأعداد الصحيحة n حيث : 13يقسم $(n+7)$.

الـحـل : $13|(n+7)$ يوجد عدد صحيح k حيث $n+7=13k$ إذن $n=13k-7$.

الأعداد الصحيحة n والتي تحقق 13يقسم $(n+7)$: هي الأعداد الصحيحة من الشكل $n=13k-7$ حيث k صحيح .

تـمريـن 2 :

عين الأعداد الطبيعية n حيث : $(2n-9)$ يقسم 6 .

الـحـل : مجموعة القواسم الصحيحة للعدد 6 هي $\{-6;-3;-2;-1;1;2;3;6\}$.

$(2n-9)$يقسم 6 معناه $(2n-9)=-6$ أو $(2n-9)=-3$ أو $(2n-9)=-2$ أو $(2n-9)=-1$ أو $(2n-9)=1$ أو $(2n-9)=2$ أو $(2n-9)=3$ أو $(2n-9)=6$. معناه $2n=3$ أو $2n=6$ أو $2n=7$ أو $2n=8$ أو $2n=10$ أو $2n=11$ أو $2n=12$ أو $2n=15$. معناه $n=3$ أو $n=4$ أو $n=5$ أو $n=6$.

معناه $n\in\{3;4;5;6\}$.

تـمريـن 3 :

عين الأعداد الصحيحة nحيث :

$(4n+7)$ يقسم $(n+4)$.

الـحـل :

n عدد صحيح حيث : $(4n+7)$ يقسم $(4n+7)$ لأن $(4n+7)=1(4n+7)..........(1)$ ومن جهة أخرى $(4n+7)$ يقسم $(n+4)$ إذن $(4n+7)$ يقسم $4(n+4)$وعليه يوجد عدد صحيح kبحيث :

$(4n+16)=k(4n+7).........(2)$ وبطرح (1)من (2) نجد :

$(4n+16)-(4n+7)=k(4n+7)-(4n+7)$ معناه $9=(k-1)(4n+7)$ أي $(4n+7)$ يقسم 9 .

مجموعة قواسم صحيحة للعدد 9 هي $\{-9;-3;-1;1;3;9\}$.

اذن $(4n+7)\in\{-9;-3;-1;1;3;9\}$.معناه $4n\in\{-16;-10;-8;-6;-4;2\}$ معناه $n\in\{-4;-2;-1\}$.

$(4n+7)$ يقسم $(n+4)$ إذا وفقط إذا كانت $n\in\{-4;-2;-1\}$.

خاصية 4 : a ، b وc ثلاثة أعداد صحيحة و a غير معدوم .

إذا كان a يقسم العددين b وc فإنه من اجل كل عددين صحيحين m و n . العدد a يقسم $mb+nc$.

البرهان :

إذا كان $a|b$ و $a|c$ فإن $b=ka$ و $c=k'a$ حيث k و k'عددان صحيحان وعليه :

$mb+nc=mka+nk'a=(mk+nk')a$.

بما أن $(mk+nk')$ عدد صحيح فإن a يقسم $(mb+nc)$.

القسمة الإقليدية في مجموعة الأعداد الصحيحة

1) القسمة الإقليدية في مجموعة الاعداد الصحيحة:

مبرهنة : a عدد صحيح و b عدد طبيعي غير معدوم . توجد ثنائية وحيدة $(q;r)$ من الأعداد الصحيحة حيث $a=bq+r$ و $0\le r \prec b$.
تسمى عملية البحث عن الثنائية $(q;r)$ بالقسمة الإقليدية للعدد a على العدد b . يسمى q و r بهذا الترتيب حاصل وباقي القسمة الإقليدية للعدد a على العدد b .

البرهان :
العدد a إما مضاعف لـــ b وإما محصور بين مضاعفين متتابعين لـ b أي يوجد q عدد صحيح وحيد حيث $qb\le a\prec (q+1)b$ وبالتالي نستنتج من هذا أن $0\le a-qb\prec b$.
نضع $r=a-qb$ إذن $a=bq+r$ مع $0\le r\prec b$.

ملاحظة : يمكن تمديد مفهوم القسمة الإقليدية لعدد صحيح a على عدد صحيح b غير معدوم . نجد : $a=bq+r$ و $0\le r\prec |b|$.

2) القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين :

تعريف : a و b عددان طبيعيان غير معدومين . D_a و D_b مجموعتا قواسم a و b على الترتيب .
$D_a \cap D_b$ هي مجموعة القواسم المشتركة للعددين a و b .
يسمى أكبر عنصر من المجموعة $D_a\cap D_b$ بالقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b. ونرمز له بالرمز $PGCD(a;b)$ **(Plus Grand Commun Diviseur).**

ملاحظات :
1) مجموعة قواسم 0 هي الاعداد الصحيحة غير معدومة .
2) $PGCD(a;a)=a$ و $PGCD(1;a)=1$ و $PGCD(0;a)=a$ (غير معدوم)

مثال : $D_9=\{1;3;9\}$ و $D_{12}=\{1;2;3;4;6;12\}$. وبالتالي $PGCD(9;12)=3$.

طرائـــــق

تـمريـن 1 :
a و b عددان صحيحان .
أثبت أن إذا كان 2 يقسم a^2+b^2 فإن 2 يقسم $(a+b)^2$.

الـحـل :
2 يقسم a^2+b^2 معناه يوجد عدد صحيح k بحيث : $a^2+b^2=2k$.
لدينا : $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab=2k+2ab=2(k+ab)$. بما أن $(k+ab)$ عدد صحيح فإن 2 يقسم $(a+b)^2$.

تـمريـن 2 :
عين الأعداد الصحيحة a و b حيث أن : $5ab-b^2=49$.

الحل :

لدينا : $5ab-b^2=49$ تكافيء $b(5a-b)=49$. (b و $(5a-b)$ قواسم للعدد 49) تكافيء(
$(b=49)$ و $(5a-b)=1$) أو ($b=1$ و $(5a-b)=49$) أو($(b=7)$ و $(5a-b)=7$) أو(
($(b=-1)$ و $(5a-b)=-49$) أو($(b=-7)$ و $(5a-b)=-7$) أو ($(b=-49)$ و $(5a-b)=-1$
) . تكافيء ($(b=49)$ و $(a=10)$) أو($(b=1)$ و $(a=10)$) أو($(b=7)$ و $\left(a=\frac{14}{5}\right)$) او
($(b=-1)$ و $(a=-10)$) أو ($(b=-7)$ و $\left(a=\frac{-14}{5}\right)$) أو ($(b=-49)$ و $(a=-10)$) .

الأعداد الصحيحة a و b التي تحقق المعادلة $5ab-b^2=49$. هي الثنائيات $(10;49)$ ، $(10;1)$، $(-10;-49)$، $(-10;-1)$.

تمرين 3 :

a عدد صحيح . باقي قسمة a على 12 هو 9 .

1) ماهو باقي قسمة العدد a على 6 ؟
2) ماهو باقي قسمة العدد a على 3 ؟

الحل :

باقي قسمة a على 12 هو 9 معناه يوجد عدد صحيح k بحيث : $a=12k+9$.

1) باقي قسمة العدد a على 6 :

لدينا : $a=12k+9=2\times 6k+6+3=6(2k+1)+3=6k'+3$.حيث $k'=(2k+1)$.عدد صحيح وبالتالي باقي قسمة العدد a على 6 هو 3 .

2) باقي قسمة العدد a على 3 :

لدينا : $a=12k+9=3\times 4k+3\times 3=3(4k+3)=3k''+0$.حيث $k''=(4k+3)$ عدد صحيح وبالتالي باقي قسمة العدد a على 3 هو 0 .

تمرين 4:

n و m عددان طبيعيان باقي قسمتهما على 17 هما على الترتيب 8 و 12 . عين بواقي القسمة الإقليدية لكل من الاعداد $(n+m)$ ، nm، و m^2 على 17 .

3) خواص القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعين :

خاصية 1 : a و b عددان طبيعيان غير معدومين حيث $a \geq b$. r باقي قسمة a على b . $PGCD(a;b) = PGCD(b;r)$.

البرهان :

نضع $PGCD(a;b) = d$ و $PGCD(b;r) = d'$.

نعلم أن $a = bq + r$ حيث q عدد طبيعي إذن $r = a - bq$.

لدينا d يقسم b وبالتالي d يقسم bq و d يقسم a إذن d يقسم $(a - bq)$ أي d يقسم r.إذن نجد d قاسم مشترك للعددين b و r .

ومن جهة أخرى d' يقسم b وبالتالي d' يقسم bq و d' يقسم r إذن d' يقسم $(bq + r)$ أي d' يقسم a . إذن نجد d' قاسم مشترك للعددين a و b .

إذن مجموعة القواسم المشتركة للعددين a و b هي نفسها مجموعة القواسم المشتركة للعددين b و r وبالتالي $d = d'$ أي $PGCD(a;b) = PGCD(b;r)$.

خوارزمية إقليدس :

a و b عددان طبيعيان غير معدومين حيث $a \succ b$ بقسمة a على b نحصل على $a = bq_1 + r_1$ مع $0 \leq r_1 \prec b$ حيث b_1 و q_1 عددان طبيعيان .

*) إذا كان $r_1 = 0$ (أي b يقسم a) فإن $PGCD(a;b) = b$.

*) إذا كان $r_1 \neq 0$ فإن $PGCD(a;b) = PGCD(b;r_1)$. نقسم b على r_1 نحصل على $b = r_1q_2 + r_2$ و $0 \leq r_2 \prec r_1$ حيث q_2 و r_2 عدد طبيعيان .

*) إذا كان $r_2 = 0$ (أي r_1 يقسم b) فإن $PGCD(a;b) = PGCD(b;r_1) = r_1$.

*) إذا كان $r_2 \neq 0$ فإن $PGCD(a;b) = PGCD(b;r_1) = PGCD(r_1;r_2)$. نقسم r_1 على r_2 نحصل على $r_1 = r_2q_3 + r_3$ و $0 \leq r_3 \prec r_2$ حيث q_3 و r_3 عدد طبيعيان .

*)نواصل هكذا حتى نجد باقيا معدوما . نسمي r_n أخر باقي غير معدوم وعليه :

$PGCD(a;b) = PGCD(b;r_1) = PGCD(r_1;r_2) = ... = PGCD(r_n;0) = r_n$.

تسمى هذه الطريقة لإيجاد القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعين بطريقة خوارزمية إقليدس .

خاصية 2 : القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعين غير معدومين a و b هو أخر باقي غير معدوم في سلسلة قسمات خوارزمية إقليدس .

طرائـــــق

تـمريـن 1 :

1) عين $PGCD(182;126)$.

2) باستعمال خوارزمية إقليدس أوجد عددين صحيحين α و β حيث $182\alpha+126\beta=14$.

الـحـل :

1) تعين $PGCD(182;126)$.

الحاصل		1	2	14
المقسوم والقاسم	182	126	56	4
الباقي		56	4	0

إذن $PGCD(182;126)=14$.

2) باستعمال خوارزمية إقليدس نبحث عن عددين صحيحين α و β حيث $182\alpha+126\beta=14$.

لدينا $126\times1-56\times2=14$ إذن $126\times1-(182-126)\times2=14$ وبالتالي $182(-2)+126(3)=14$ إذن $(\alpha;\beta)=(-2;3)$.

خاصية 3: a و b عددان طبيعيان غير معدومين k عدد طبيعي غير معدوم . $PGCD(ka;kb)=k\times PGCD(a;b)$.

البرهان :

نضع $PGCD(a;b)=d$ و $PGCD(ka;kb)=d'$. d و d' عددان طبيعيان غير معدومين .

لدينا d يقسم a ومنه kd يقسم ka ولدينا كذلك d يقسم b ومنه kd يقسم kb وبالتالي kd قاسم مشترك للعددين ka و kb إذن kd يقسم القاسم المشترك الأكبر للعددين ka و kb أي kd يقسم d' ومنه يمكن كتابة $d'=k'(kd)$ حيث k' عدد طبيعي .

كذلك d' يقسم ka و kb ومنه $d'=k'(kd)$ يقسم ka و kb وبالتالي $k'd$ يقسم a و b

وبالتالي $k'd$ يقسم القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b وبالتالي $k'=1$ ومنه $d'=kd$.

نتيجة : $PGCD(ka;kb)=k\times PGCD(a;b)$.

تعريف : a و b عددان طبيعيان غير معدومين .
يكون العددان a و b أوليين فيما بينهما إذا وفقط إذا كان قاسمهما المشترك الأكبر يساوي 1 .

خاصية 4 : a و b عددان طبيعيان غير معدومين . d قاسم مشترك للعددين a و b نضع $a=da'$ و $b=db'$. يكون d القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b إذا وفقط إذا كان العددان الطبيعيان a' و b' أوليين فيما بينهما .

البرهان : a و b عددان طبيعيان غير معدومين . d قاسمهما المشترك الأكبر .

*) نضع $a=da'$ و $b=db'$.

وعليه $d=PGCD(a;b)=PGCD(da';db')=d\times PGCD(a';b')$.

بما أن d غير معدوم فإن : $PGCD(a';b')=1$.

*) عكسيا : نعتبر $PGCD(a';b')=1$. وبالتالي $PGCD(a;b)=k\times PGCD(a';b')=d$.

3) تمديد القاسم المشترك الأكبر لعددين صحيحين :

تعريف : a و b عددان صحيحان غير معدومين .
القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b هو العدد الطبيعي الوحيد d حيث :
$d = PGCD(|a|;|b|)$.

خاصية : a و b عددان صحيحان غير معدومين و k عدد صحيح غير معدوم .
$PGCD(ka;kb) = |k| \times PGCD(a;b)$.

ملاحظة : a و b عددان صحيحان غير معدومين .
إذا كان b يقسم a فإن $PGCD(a;b) = |b|$.

طرائــــق

تـمـريـن 1 :

عين $PGCD(54;82)$ ثم استنتج $PGCD(5400;8200)$.

الـحـل :

1) $PGCD(54;82) = 2$.

2) $PGCD(5400;8200) = PGCD(54\times100;82\times100) = 100\times PGCD(54;82) = 100\times2 = 200$

تـمـريـن 2 :

عين كل الثنائيات $(a;b)$ من الأعداد الطبيعية حيث $\begin{cases} a+b=72 \\ PGCD(a;b)=9 \end{cases}$.

الـحـل :

بما أن $PGCD(a;b)=9$ إذن $a=9a'$ و $a=9b'$ حيث a' و b' عددان أوليان فيما بينهما .
$a+b=72$ معناه $9a'+9b'=72$ وبالتالي $a'+b'=8$.
وعليه $(a';b') \in \{(1;7),(3;5),(5;3),(7;1)\}$.

خلاصة : مجموعة الثنائيات $(a;b)$ التي تحقق الجملة : $\{(9;63),(27;45),(45;27),(63;9)\}$

ملاحظة : هناك ثنائيات $(a';b')$ تحقق $a'+b'=8$ لكن a' و b' ليست أولية فيما بينها .
مثلا $(4;4)$.

تـمـريـن 3 :

عين كل الثنائيات $(a;b)$ من الأعداد الطبيعية حيث $\begin{cases} a\times b=360 \\ PGCD(a;b)=6 \end{cases}$.

الحل :

بما أن $PGCD(a;b)=6$ إذن $a=6a'$ و $a=6b'$ حيث a' و b' عددان أوليان فيما بينهما

$a\times b=72$ معناه $(6a')\times(6b')=360$ وبالتالي $a'\times b'=10$.

وعليه $(a';b')\in\{(1;10),(2;5),(5;2),(10;1)\}$.

خلاصة : مجموعة الثنائيات $(a;b)$ التي تحقق الجملة هي :

$\{(6;60),(12;30),(30;12),(60;6)\}$.

تمرين bac 2008 :

n عدد طبيعي أكبر من 5 .

1) a و b عددان طبيعيان حيث $a=n-2$ و $b=2n+3$.

أ) ماهي القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b ؟

ب) بين أن العددين a و b من مضاعفات 7 إذا وفقط إذا كان $(n+5)$ مضاعفا للعدد 7

ت) عين قيم n التي يكون من أجلها $PGCD(a;b)=7$.

2) نعتبر العددين الطبيعيين p و q حيث :

$p=2n^2-7n-15$ و $q=n^2-7n+10$.

أ) بين أن كل من العددين p و q يقبل القسمة على $(n-5)$.

ب) عين تبعا لقيم n وبدلالة n ، $PGCD(p;q)$.

الحل :

1) أ) تعيين القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b:

لدينا : $a=n-2$ و $b=2n+3$. نلاحظ : $2n+3=2(n-2)+7$ أي $b=2a+7$ إذن $b-2a=7$.

نضع : $PGCD(a;b)=d$ وبالتالي d/b و d/a إذن d/b و $d/2a$ وبالتالي $d/(b-2a)$ أي $d/7$.

إذن القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b: هي قواسم العدد 7 أي $\{1;7\}$.

ب) نبين أن العددين a و b من مضاعفات 7 إذا وفقط إذا كان $(n+5)$ مضاعفا للعدد 7 .

- إذا كان $(n+5)$ من مضاعفات 7 معناه يوجد عدد طبيعي k حيث $(n+5)=7k$ أي $n=7k-5$

بالتعويض في a و b نجد : $a=n-2=7k-5-2=7(k-1)=7k'$ و

$b=2n+3=2(7k-5)+3=14k-7=7(2k-1)=7k''$ وبالتالي العددان a و b من مضاعفات 7 .

- إذا كان العددان a و b من مضاعفات 7 . فإن $(b-a)$ ومن مضاعفات العدد 7 وبملاحظة

$b-a=2n+3-(n-2)=n+5$ فإن $(n+5)$ مضاعفا للعدد 7 .

ت) تعين قيم n التي يكون من أجلها $PGCD(a;b)=7$.

$PGCD(a;b)=7$ هذا يعني a و b من مضاعفات العدد 7 معناه أن $(n+5)$ من مضاعفات العدد 7

وبالتالي قيم n هي من الشكل $n=7k-5$ حيث k عدد طبيعي أكبر من 5 .

2) أ) نبين أن كل من العددين p و q يقبل القسمة على $(n-5)$.

باستخدام طريقة هورنر .

معاملات $p(n)$		2	-7	-15
قيمة α جذر $p(n)$	5	0	10	15
معاملات هورنر		2	3	0

وبالتالي $p = 2n^2 - 7n - 15 = (n-5)(2n+3)$.

معاملات $q(n)$		1	-7	10
قيمة α جذر $p(n)$	5	0	5	10
معاملات هورنر		1	-2	0

. $q = 2n^2 - 7n - 15 = (n-5)(n-2)$

إذن العددان p و q يقبلان القسمة على $(n-5)$.

ب)تعين تبعا لقيم n وبدلالة n ، $PGCD(p;q)$.

$$PGCD(p;q) = PGCD((n-5)(2n+3);(n-5)(n-2))$$

$$PGCD(p;q) = (n-5)PGCD((2n+3);(n-2))$$.

$$PGCD(p;q) = (n-5)PGCD(a;b)$$

- إذا كان $PGCD(a;b) = 7$ فإن $PGCD(p;q) = 7(n-5)$.
- إذا كان $PGCD(a;b) = 1$ فإن $PGCD(p;q) = (n-5)$.