الأستاذ عبد الحميد بوقطوف

05 56 24 69 06

تخطيط .. التزام .. نجاح

﴾ هذه التمارين مقترحة من دورات البكالوريا من 2008 إلى 2015 ﴿

التمرين 1: ﴾ دورة جوان 2008 – الموضوع الأول ﴿

1) **نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $I = [1\,;2]$ بالعبارة:** $f(x) = \frac{x+2}{-x+4}$

أ- بين أن الدالة f متزايدة تماما على I.

ب- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال I، $f(x)$ تنتمي إلى I.

2) **(u_n) هي المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يأتي:** $u_0 = \frac{3}{2}$ و $u_{n+1} = f(u_n)$

أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : u_n تنتمي إلى I.

ب- أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)، ثم استنتج أنها متقاربة.

3) **أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n :** $u_n = 1 + \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1}$

ب- عين النهاية: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$

التمرين 2: ﴾ دورة جوان 2008 – الموضوع الثاني ﴿

(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي:

$u_0 = \frac{5}{2}$ **ومن أجل كل عدد طبيعي n :** $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 2$

1) **أ- أرسم في معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$، المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$ والمنحنى (d) الممثل للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:** $f(x) = \frac{2}{3}x + 2$

ب- باستعمال الرسم السابق مثل على حامل محور الفواصل وبدون حساب الحدود u_0، u_1، u_2، u_3 و u_4

جـ- ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u) وتقاربها.

2) **أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n :** $u_n \leq 6$

ب- تحقق أن (u_n) متزايدة.

جـ- هل (u_n) متقاربة؟ برر إجابتك.

3) **نضع من أجل كل عدد طبيعي n :** $v_n = u_n - 6$

أ- أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب- أكتب عبارة u_n بدلالة n ثم استنتج $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$

التمرين 3: ﴾ دورة جوان 2009 – الموضوع الأول ﴿

(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_{n+2} = \frac{4}{3}u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n$ و $u_1 = 2$ و $u_0 = 1$

المتتالية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n = u_{n+1} - u_n$

1) **أحسب v_0 و v_1.**

2) **برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها.**

3) **أ- أحسب بدلالة n المجموع S_n:** $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}$

ب- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \frac{3}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right] + 1$

جـ- بين أن (u_n) متقاربة.

التمرين 4: « دورة جوان 2009 – الموضوع الثاني »

(u_n) متتالية متزايدة هندسية تماما، حدها الأول u_1 وأساسها q حيث:

$$\begin{cases} u_1 + 2u_2 + u_3 = 32 \\ u_1 \times u_2 \times u_3 = 216 \end{cases}$$

1) أ- أحسب u_2 والأساس q لهذه المتتالية، واستنتج الحد الأول u_1.

ب- أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

جـ- أحسب S_n حيث: $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ بدلالة n، ثم عين العدد الطبيعي n بحيث يكون: $S_n = 728$

2) (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n كما يلي: $v_1 = 2$ و $v_{n+1} = \frac{3}{2}v_n + u_n$

أ- أحسب v_2 و v_3.

ب- نضع من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $w_n = \frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3}$

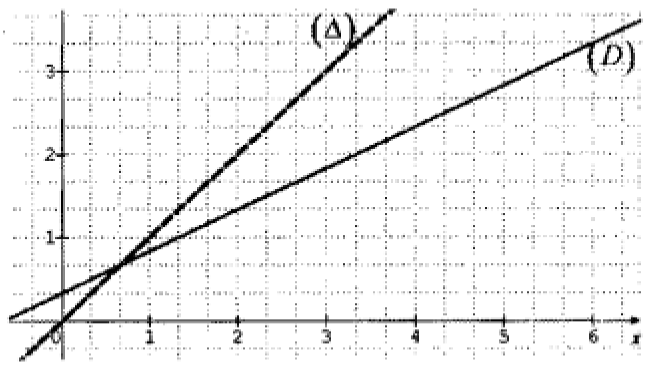
- بين أن (w_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

جـ- أكتب w_n بدلالة n ثم استنتج v_n بدلالة n.

التمرين 5: « دورة جوان 2010 – الموضوع الثاني »

في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس مثلنا المستقيمين (Δ) و (d) معادلتيهما على الترتيب:

$y = x$ و $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$



1) لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = 6$ ومن أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{3}$$

أ- أنقل الشكل ثم مثل على محور الفواصل الحدود التالية: u_0، u_1، u_2، u_3، و u_4، دون حسابها مبرزا خطوط الرسم.

ب- عين إحداثيي نقطة تقاطع المستقيمين (Δ) و (d).

جـ- أعط تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n).

2) أ- باستعمال الإستدلال بالتراجع، أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > \frac{2}{3}$

ب- استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n).

3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة: $v_n = u_n - \frac{2}{3}$

أ- بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تحديد أساسها وحدها الأول.

ب- أكتب بدلالة n عبارة الحد العام v_n، واستنتج عبارة u_n بدلالة n.

جـ- أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث:

$$S_n = v_0 + v_1 + \cdots v_n$$

- استنتج المجموع S'_n حيث:

$$S'_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$

التمرين 6: « دورة جوان 2011 – الموضوع الأول »

(u_n) **المتتالية العددية المعرفة بـ:** $u_0=-1$ **ومن أجل كل عدد طبيعي** n **:** $u_{n+1}=u_n+1$

(v_n) **المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي** n **بـ:** $v_n=u_n+\frac{1}{2}$

في كل حالة من الحالات الثلاث الآتية، أقترحت ثلاث إجابات، إجابة واحدة فقط منها صحيحة، حددها مع التعليل.

1) **المتتالية** (v_n):

أ- حسابية   **ب- هندسية**   **جـ- لا حسابية ولا هندسية**

2) **نهاية المتتالية** (u_n) **هي:**

أ- $+\infty$ **ب-** $-\frac{1}{2}$ **جـ-** $-\infty$

3) **نضع من أجل كل عدد طبيعي** n **:** $S_n=-\frac{1}{2}[1+e^{ln3}+e^{2ln3}+e^{3ln3}+\cdots+e^{nln3}]$

أ- $S_n=\frac{3^{n+1}-1}{2}$ **ب-** $S_n=\frac{1-3^n}{4}$ **جـ-** $S_n=\frac{1-3^{n+1}}{4}$

التمرين 7: « دورة جوان 2011 – الموضوع الثاني »

α **عدد حقيقي موجب تماما ويختلف عن** 1.

(u_n) **متتالية عددية معرفة على** $\mathbb{N}$ **بـ:** $u_0=6$ **ومن أجل كل عدد طبيعي** n **:** $u_{n+1}=\alpha u_n+1$

(v_n) **متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي** n **بـ:** $v_n=u_n+\frac{1}{\alpha-1}$

1) **أ- بين أن** (v_n) **متتالية هندسية أساسها** α.

ب- أكتب بدلالة n **و** α**، عبارة** v_n **ثم استنتج بدلالة** n **و** α**، عبارة** u_n.

جـ- عين قيم العدد الحقيقي α **التي تكون من أجلها المتتالية** (u_n) **متقاربة.**

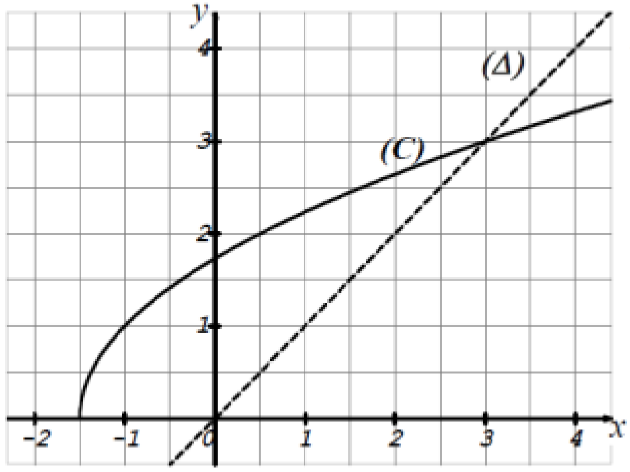
2) **نضع:** $\alpha=\frac{3}{2}$

- أحسب بدلالة n**، المجموعين** S_n **و** T_n **حيث:** $S_n=v_0+v_1+\cdots+v_n$ **و** $T_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$

التمرين 8: « دورة جوان 2012 – الموضوع الأول »

نعتبر المتتالية العددية (u_n) **المعرفة بحدها الأول** $u_0=1$ **ومن أجل كل عدد طبيعي** n **:** $u_{n+1}=\sqrt{2u_n+3}$

1) **لتكن الدالة** h **المعرفة على المجال** $\left[-\frac{3}{2};+\infty\right[$ **كما يلي:** $h(x)=\sqrt{2x+3}$**، و** (C) **تمثيلها البياني و** (Δ) **المستقيم ذو المعادلة** $y=x$ **في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس. (أنظر الشكل).**



أ- أعد رسم الشكل ثم مثل على محور الفواصل الحدود u_0**،** u_1**،** u_2**، و** u_3**. (دون حسابها وموضحا خطوط الإنشاء).**

ب- ضع تخمينا حول اتجاه تغير (u_n) **وتقاربها.**

2) **برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي** n **:** $0<u_n<3$

3) **أ- أدرس اتجاه تغير المتتالية** (u_n).

ب- استنتج أن المتتالية (u_n) **متقاربة، ثم أحسب:** $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

تخطيط.. إلتزام.. نجاح

التمرين 9: « دورة جوان 2012 – الموضوع الثاني »

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدها الأول $u_0 = \frac{13}{4}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 3 + \sqrt{u_n - 3}$

1) **برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n :** $3 < u_n < 4$

2) **بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n :** $u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n^2+7u_n-12}{\sqrt{u_n-3}+u_n-3}$

- استنتج أن (u_n) متزايدة تماما.

3) **برر لماذا (u_n) متقاربة.**

4) **(v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ:** $v_n = \ln(u_n - 3)$

أ- برهن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$، ثم احسب حدها الأول.

ب- أكتب كلا من (v_n) و (u_n) بدلالة n، ثم احسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$

جـ- نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $P_n = (u_0 - 3)(u_1 - 3)(u_2 - 3) \times \ldots \times (u_n - 3)$

أكتب P_n بدلالة n، ثم بين أن: $\lim_{n\to+\infty} P_n = \frac{1}{16}$

التمرين 10: « دورة جوان 2013 – الموضوع الأول »

I) المتتالية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \frac{5^{n+1}}{6^n}$

1) **بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها وحدها الأول.**

2) **أحسب** $\lim_{n\to+\infty} v_n$

II) المتتالية (u_n) معرفة بـ: $u_0 = 1$، ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \sqrt{5u_n + 6}$

1) **برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n :** $1 \le u_n \le 6$

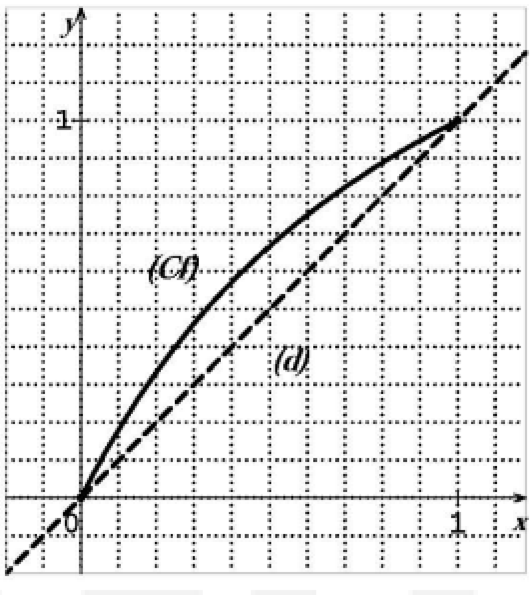
2) **أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n).**

3) **أ- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n :** $6 - u_{n+1} \le \frac{5}{6}(6 - u_n)$

ب- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \le 6 - u_n \le v_n$ استنتج $\lim_{n\to+\infty} u_n$

التمرين 11: « دورة جوان 2013 – الموضوع الثاني »

في الشكل أدناه، (C_f) هو التمثيل البياني للدالة f المعرفة على المجال $[0\,;1]$ بالعلاقة $f(x) = \frac{2x}{x+1}$، و (d) المستقيم ذو المعادلة $y = x$



1) **(u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول: $u_0 = \frac{1}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n :** $u_{n+1} = f(u_n)$

أ- أعد رسم الشكل، ثم مثل الحدود u_0، u_1، u_2، و u_3. على محور الفواصل دون حسابها، مبرزا خطوط التمثيل.

ب- ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

2) أ- أثبت أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;1]$.
ب- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 1$
جـ- أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n).

3) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n}$
أ- برهن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$، يطلب حساب حدها الأول v_0.
ب- أحسب نهاية (u_n).

التمرين 12: ﴿ دورة جوان 2014 – الموضوع الأول ﴾

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي: $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - \frac{4}{3}$
و (v_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي: $v_n = u_n + 4$
1) بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.
2) أكتب كلا من v_n و u_n بدلالة n.
3) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) على $\mathbb{N}$.
4) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$
5) لتكن (w_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $w_n = 5\left(\frac{1}{v_n+5} - 1\right)$
أ- بين أن المتتالية (w_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.
ب- أحسب: $\lim_{n\to+\infty}(u_n - w_n)$

التمرين 13: ﴿ دورة جوان 2014 – الموضوع الثاني ﴾

I) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ بحدها العام: $u_n = e^{\frac{1}{2}-n}$
(e هو أساس اللوغاريتم النيبيري).

1) بين أن (u_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.
2) أحسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$ ، ماذا تستنتج؟
3) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$

II) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = ln(u_n)$ (ln يرمز إلى اللوغاريتم النيبيري).

1) عبر عن v_n بدلالة n ثم استنتج نوع المتتالية (v_n).
2) أ- أحسب بدلالة n العدد P_n حيث: $P_n = ln(u_0 \times u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_n)$
ب- عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n بحيث: $P_n + 4n > 0$

التمرين 14: ﴿ دورة جوان 2015 – الموضوع الأول ﴾

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = e^2 - 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = (1 + u_n)e^{-2} - 1$
1) أحسب u_1، u_2، و u_3.
2) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 + u_n > 0$
3) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة. هل هي متقاربة؟ علل.
4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = 3(1 + u_n)$
أ- أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.
ب- أكتب v_n و u_n بدلالة n، ثم أحسب: $\lim_{n\to+\infty} u_n$
جـ- بين أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $lnv_0 + lnv_1 + \cdots + lnv_n = (n+1)(-n + 2 + ln3)$

التمرين 15: « دورة جوان 2015 – الموضوع الثاني »

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

I) f **الدالة المعرفة على المجال** $[0\,;+\infty[$ **بـ:** $f(x)=\frac{4x+1}{x+1}$ **و** (C_f) **تمثيلها البياني.**

1) **عين اتجاه تغير الدالة** f **على المجال** $[0\,;+\infty[$.

2) **أدرس وضعية** (C_f) **بالنسبة للمستقيم** (D) **ذي المعادلة:** $y=x$

3) **مثل** (C_f) **و** (D) **على المجال** $[0\,;6]$.

II) نعتبر المتتاليتين (u_n) **و** (v_n) **المعرفتين على** $\mathbb{N}$ **كما يلي:** $\begin{cases}u_0=2\\u_{n+1}=f(u_n)\end{cases}$ **و** $\begin{cases}v_0=5\\v_{n+1}=f(v_n)\end{cases}$

1) **أ- أنشئ على حامل محور الفواصل الحدود:** u_0، u_1، u_2، **و** u_3، **والحدود:** v_0، v_1، v_2، **و** v_3، **دون حسابها.**

ب- خمن اتجاه تغير وتقارب كل من المتتاليتين (u_n) **و** (v_n).

2) **أ- أثبت أنه من أجل كل** n **من** $\mathbb{N}$ **:** $2\le u_n<\alpha$ **و** $\alpha<v_n\le 5$ **حيث:** $\alpha=\frac{3+\sqrt{13}}{2}$

ب- استنتج اتجاه تغير كل من المتتاليتين (u_n) **و** (v_n).

3) **أ- أثبت أنه من أجل كل** n **من** $\mathbb{N}$ **:** $v_{n+1}-u_{n+1}\le\frac{1}{3}(v_n-u_n)$

ب- بين أنه من أجل كل n **من** $\mathbb{N}$ **:** $0<v_n-u_n\le\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

جـ- استنتج أن: $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=0$ **، ثم حدد نهاية كل من** (u_n) **و** (v_n).

نجاح .. إلتزام .. تخطيط