

# الأعداد الأولية

الكفاءات المستهدفة

الأستاذ: بوخلاق محمد

- 1) التعرف على أولية عدد طبيعي .
- 2) استعمال تحليل عدد طبيعي الى جداء عوامل أولية لتعيين مضاعفات عدد طبيعي وقاسمه .
- 3) استعمال تحليل عدد طبيعي الى جداء عوامل أولية لتعيين المضاعف المشترك الأصغر والقاسم المشترك الأكبر .
- 4) استعمال العلاقة بين المضاعف المشترك الأصغر والقاسم المشترك الأكبر .
- 5) استعمال خواص المضاعف المشترك الأصغر .
- 6) استعمال مبرهنة بيزو .
- 7) استعمال مبرهنة غوص ونتائجها .

**تعريف :** القول ان العدد الطبيعي  $n$  عدد اولي معناه أن  $n$  يقبل قاسمين بالضبط في  $Z$  : 1 و  $n$  نفسه

## ملاحظات :

- 1) العدد 0 غير أولي لأنه يقبل عدد غير منته من القواسم .
- 2) العدد 1 غير أولي لأنه يقبل قاسم واحد هو نفسه .
- 3) العدد 2 هو العدد الاولي الزوجي الوحيد .

## خواص :

**خاصية 1 :** كل عدد طبيعي  $n$  أكبر تماما من 1 ( $n \geq 2$ ) يقبل على الأقل قاسما أوليا .

**البرهان :** ليكن  $n$  عددا طبيعيا أكبر تماما من 1 .

(\* إذا كان  $n$  أوليا فإن  $n$  يقسم  $n$  وبالتالي الخاصية محققة .

(\* إذا كان  $n$  غير أولي فإن  $n$  يقبل على الأقل قاسما يختلف عن 1 وعن  $n$  . ليكن  $p$  أصغر قاسم للعدد  $n$  يختلف عن 1 وعن  $n$  . نفرض أن  $p$  غير أولي ومنه يوجد عدد طبيعي  $d$  يقسم  $p$  حيث  $1 < d < p$  وبالتالي  $d$  يقسم  $n$  وهذا تناقض ( لأن  $d < p$  و  $p$  أصغر قاسم للعدد  $n$  ) ومنه  $p$  عدد أولي وعليه الخاصية محققة .

## خاصية 2 :

كل عدد طبيعي  $n$  غير أولي أكبر تماما من 1 ( $n \geq 2$ ) يقبل قاسما أوليا  $a$  حيث  $a \leq \sqrt{n}$

**البرهان :** ليكن  $n$  عددا طبيعيا غير أولي أكبر تماما من 1 .

$n$  يقبل قاسما  $d$  يختلف عن 1 وعن  $n$  ومنه  $n = d \times d'$  حيث  $d'$  عدد طبيعي غير معدوم . ( لأن إذا كان  $d' = 1$  فإن  $d = n$  وهذا تناقض )

نفرض  $d \leq d'$  ومنه  $d^2 \leq d \times d' = n$  أي أن  $d^2 \leq n$  وبالتالي  $d \leq \sqrt{n}$  .

حسب الخاصية 1 :  $d$  يقبل على الأقل قاسما أوليا  $a$  وهو كذلك قاسم أولي للعدد  $n$  .

بما أن لدينا  $a \leq d$  و  $d \leq \sqrt{n}$  نستنتج أن :  $a \leq \sqrt{n}$  .

### خاصية 3: مجموعة الأعداد الأولية غير منتهية .

#### البرهان :

- نستعمل البرهان بالخلف
- نفرض أن مجموعة الأعداد الأولية منتهية . ليكن  $p$  أكبر عدد من مجموعة الأعداد الأولية .
- ليكن  $N$  جداء كل الأعداد الأولية من 2 الى  $p$  . أي  $N = 2 \times 3 \times 5 \times \dots \times p$  .
- ليكن  $N'$  العدد الطبيعي حيث أن :  $N' = N + 1$  باقي قسمة  $N'$  على 2, 3, 5, ..... او  $p$  تعطي الباقي دوما 1 . إذن  $N'$  غير قابل للقسمة على 2, 3, 5, ..... او  $p$  .
- إذا كان  $N'$  أوليا فإن  $N' > p$  وهذا تناقض .
  - إذا كان  $N'$  غير أولي فإن  $N'$  يقبل قاسما أوليا أكبر من  $p$  ( حسب الخاصية 1) وهذا تناقض .
- إذن مجموعة الأعداد الأولية غير منتهية .

### طرائق

#### تمرين :

في كل حالة من الحالات التالية أذكر إن كان العدد أوليا :

1023 (ج)

341 (ب)

251 (ا)

#### الحل :

- (ا)  $\sqrt{251} \approx 15.84$  الأعداد الأولية الأصغر من هي 2, 3, 5, 7, 11, 13 .
- العدد 251 لا يقبل القسمة على 2 وعلى 3 وعلى 5 وكذلك  $251 = 7 \times 35 + 6$  و  $251 = 11 \times 22 + 9$  و  $251 = 13 \times 19 + 4$  وبالتالي العدد 251 أولي .
- (ب)  $\sqrt{341} \approx 18.46$  الأعداد الأولية الأصغر من 18 هي 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 .
- العدد 341 لا يقبل القسمة على 2 وعلى 3 وعلى 5 وعلى 7 لكن يقبل القسمة على 11 وبالتالي 341 غير أولي .
- (ج)  $\sqrt{1023} \approx 31.98$  الأعداد الأولية الأصغر من 31 هي 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 .
- العدد 1023 لا يقبل القسمة على 2 لكن يقبل القسمة على 3 وبالتالي 341 غير أولي .

#### 2) تحليل عدد الى جداء عوامل أولية :

**مبرهنة :** كل عدد طبيعي غير أولي  $n$  حيث يمكن تحليله الى جداء عوامل أولية

#### البرهان:

- ليكن  $n$  عددا طبيعيا أكبر من 1 .
- $n$  عددا طبيعيا غير أولي فإن يقبل القسمة على عدد أولي  $p_1$  ( $p_1 \geq 2$ ) على الأقل وبالتالي :
- $n = p_1 \times n_1$  حيث  $1 < n_1 < n$  .
- إذا كان  $n$  أوليا فإن المبرهنة محققة .
- إذا كان  $n$  غير أولي فإن  $n$  يقبل القسمة على عدد أولي  $p_1$  ( $p_1 \geq 2$ ) على الأقل وبالتالي :
- $n_1 = p_1 \times n_2$  حيث  $1 < n_2 < n_1$  . نواصل العملية بنفس الطريقة حتى الحصول

على  $n_i = 1$  ( عدد طبيعي ) . وعليه نحصل  $n = p_1 \times p_2 \times \dots \times p_k$  (  $k$  عدد طبيعي )  
 يمكن للأعداد  $p_1, p_2, p_3, \dots, p_k$  . أن تتكرر في التحليل .  
 وعليه نحصل على  $n = p_1^{d_1} \times p_2^{d_2} \times p_3^{d_3} \times \dots \times p_k^{d_k}$  حيث  $d_1, d_2, d_3, \dots, d_k$   
 أعداد طبيعية .

**خاصية :**  $a$  و  $b$  عدنان طبيعيان كلاهما أكبر تماما من 1 .  
 يكون العدد  $b$  قاسما للعدد  $a$  إذا وفقط إذا كان كل عامل أولي في تحليل  $b$  موجودا في تحليل  $a$   
 وبأس إما مساو وإما أصغر من أسه في تحليل  $a$  .

**البرهان :**  $n$  عدد طبيعي أكبر تماما من 1 تحليله الى جداء عوامل أولية

$$n = p_1^{d_1} \times p_2^{d_2} \times p_3^{d_3} \times \dots \times p_k^{d_k}$$

- إذا كان  $l$  قاسما للعدد  $n$  فإن  $n = l \times l'$  حيث  $l'$  عدد طبيعي . إذن كل قاسم أولي للعدد  $l$  هو قاسم أولي للعدد  $n$  وبالتالي لا يوجد أي قاسم أولي للعدد  $l$  يختلف عن العوامل الأولية الموجودة في تحليل  $n$ ، وكل عامل أولي في تحليل  $l$  موجود في تحليل  $n$  بأس إما مساو و إما أصغر من أسه في تحليل  $n$  .

إذن قواسم العدد  $n$  هي الأعداد الطبيعية من الشكل  $p_1^{d'_1} \times p_2^{d'_2} \times p_3^{d'_3} \times \dots \times p_k^{d'_k}$  حيث :

$$0 \leq d'_1 \leq d_1, \quad 0 \leq d'_2 \leq d_2, \quad \dots, \quad 0 \leq d'_k \leq d_k$$

- عكسيا  $l$  ليكن عددا طبيعيا مكتوبا على الشكل  $p_1^{d'_1} \times p_2^{d'_2} \times p_3^{d'_3} \times \dots \times p_k^{d'_k}$  يمكننا أن

$$n = l \left( p_1^{d_1 - d'_1} \times p_2^{d_2 - d'_2} \times p_3^{d_3 - d'_3} \times \dots \times p_k^{d_k - d'_k} \right) \text{ نكتب :}$$

لأن

$$\left( p_1^{d_1 - d'_1} \times p_2^{d_2 - d'_2} \times p_3^{d_3 - d'_3} \times \dots \times p_k^{d_k - d'_k} \right) \left( p_1^{d'_1} \times p_2^{d'_2} \times p_3^{d'_3} \times \dots \times p_k^{d'_k} \right) = p_1^{d_1} \times p_2^{d_2} \times p_3^{d_3} \times \dots \times p_k^{d_k}$$

ومنه  $l$  يقسم  $n$

## طرائق

### تمرين :

- (1) حل العدد 725 الى جداء عوامل اولية .
- (2) عين كل القواسم الموجبة للعدد 725 .
- (3) عين كل الثنائيات  $(x; y)$  من الأعداد الطبيعية التي تحقق  $x^2 - y^2 = 725$  .

### الحل :

- (1) تحليل العدد 725 .  
 $725 = 5^2 \times 29$
- (2) قواسم العدد 725 .  
 عدد قواسم العدد 725 هو  $(2+1)(1+1) = 6$

للحصول على قواسم العدد 725 نتبع مايلي : كل قواسم العدد 725 هي من الشكل  $5^\alpha \times 29^\beta$  حيث  $0 \leq \alpha \leq 2$  و  $0 \leq \beta \leq 1$ .

$5^0$	$29^0$	$5^0 \times 29^0 = 1$
	$29^1$	$5^0 \times 29^1 = 29$
$5^1$	$29^0$	$5^1 \times 29^0 = 5$
	$29^1$	$5^1 \times 29^1 = 145$
$5^2$	$29^0$	$5^2 \times 29^0 = 25$
	$29^1$	$5^2 \times 29^1 = 725$

(3) تعين كل الثنائيات  $(x; y)$  من الأعداد الطبيعية التي تحقق  $x^2 - y^2 = 725$  :

لدينا  $x^2 - y^2 = 725$  تكافئ  $(x-y)(x+y) = 725$  تكافئ  $\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=725 \end{cases}$  أو  $\begin{cases} x+y=29 \\ x-y=25 \end{cases}$

أو  $\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=145 \end{cases}$  يكافئ  $\begin{cases} x=363 \\ y=-362 \end{cases}$  أو  $\begin{cases} x=27 \\ y=2 \end{cases}$  أو  $\begin{cases} x=75 \\ y=-70 \end{cases}$ . الثنائية الوحيدة التي تحقق  $x^2 - y^2 = 725$  هي  $(27; 2)$ .

### المضاعف المشترك الأصغر لعددين :

$a$  عدد طبيعي غير معدوم . نرسم بـ  $M_a$  الى مجموعة مضاعفات العدد  $a$ .

(1) تعريف :  $a$  و  $b$  عدنان طبيعيان غير معدومين .  $M_a$  مجموعة مضاعفات  $a$  و  $M_b$  مجموعة مضاعفات  $b$ .  $M_a \cap M_b$  هي مجموعة المضاعفات المشتركة للعددين  $a$  و  $b$  يسمى أصغر عنصر غير معدوم من المجموعة  $M_a \cap M_b$  المضاعف المشترك الأصغر للعددين  $a$  و  $b$  ونرمز له بـ  $PPCM(a; b)$ .

ملاحظات : (1)  $PPCM(a; a) = a$ .

(2)  $PPCM(a; 1) = a$ .

### مثال :

تعين  $PPCM(12; 26)$ .

$$M_{12} = \{0; 12; 24; 36; 48; 60; 72; 84; 96; 108; 120; 132; 144; 156; \dots\}$$

$$M_{26} = \{0; 26; 52; 78; 104; 130; 156; \dots\}$$

وبالتالي  $M_{12} \cap M_{26} = \{0; 156; \dots\}$  إذن  $PPCM(12; 26) = 156$ .

### تمديد المضاعف المشترك الأصغر لعددين صحيحين :

تعريف :  $a$  و  $b$  عدنان صحيحان غير معدومين .

المضاعف المشترك الأصغر للعددين  $a$  و  $b$  هو أصغر عدد طبيعي  $m$  غير معدوم حيث  

$$m = PPCM(|a|;|b|)$$

**خاصية للمضاعف المشترك الأصغر لعددين طبيعيين :**

**خاصية :**  $a$  و  $b$  عدنان طبيعيين غير معدومين .  $k$  عدد صحيح غير معدوم  

$$PPCM(ka;kb) = |k|PPCM(a;b)$$

## طرائق

**تمرين :**

$n$  عدد طبيعي أكبر من 3 .

نضع  $a = (6n^2 - 24)(n^2 - 9)$  و  $b = (3n^2 + 3n - 18)(n^2 - n - 6)$

(1) برهن أن  $PPCM(a;b) = (n^2 - 4)(n^2 - 9)PPCM(6;3)$

(2) عين  $PPCM(a;b)$

**الحل :**

(1) نبرهن أن  $PPCM(a;b) = (n^2 - 4)(n^2 - 9)PPCM(6;3)$

لدينا :

$$PPCM(a;b) = PPCM((6n^2 - 24)(n^2 - 9);(3n^2 + 3n - 18)(n^2 - n - 6))$$

$$PPCM(a;b) = PPCM(6(n^4 - 13n + 36);3(n^4 - 13n + 36))$$

$$PPCM(a;b) = (n^4 - 13n + 36)PPCM(3;6)$$

$$PPCM(a;b) = (n^2 - 4)(n^2 - 9)PPCM(3;6)$$

تعين  $PPCM(a;b)$

لدينا :  $PPCM(3;6) = 6$  . وبالتالي  $PPCM(a;b) = 6(n^2 - 4)(n^2 - 9)$

**حساب القاسم المشترك الأكبر باستعمال التحليل الى جداء عوامل أولية :**

**خاصية :** القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين  $a$  و  $b$  كلاهما أكبر تماما من 1 هو جداء العوامل الأولية المشتركة في تحليلي العددين  $a$  و  $b$  بحيث يؤخذ كل عامل من هذه العوامل مرة واحدة وبأصغر أس .

### حساب المضاعف المشترك الأصغر باستعمال التحليل الى جداء عوامل أولية :-

**خاصية 1:** المضاعف المشترك الأصغر لعددين طبيعيين  $a$  و  $b$  كلاهما أكبر تماماً من 1 هو جداء العوامل الأولية المشتركة وغير المشتركة في تحليلي العددين  $a$  و  $b$  بحيث يؤخذ كل عامل من هذه العوامل مرة واحدة وبأكبر أس .

### العلاقة بين المضاعف المشترك الأصغر والقاسم المشترك الأكبر :-

**خاصية 2:**  $a$  و  $b$  عدنان طبيعيين كلاهما أكبر من 1 :  $PGCD(a;b) \times PPCM(a;b) = a \times b$  .

## طرائق

### تمرين 1:

نضع  $a = 256$  و  $b = 5040$  باستعمال التحليل الى جداء عوامل أولية عين  $PGCD(a;b)$  و  $PPCM(a;b)$  .

**تمرين 2:** عين كل الثنائيات  $(a;b)$  من الأعداد الطبيعية التي تحقق الجملة :  $\begin{cases} a \times b = 12000 \\ PPCM(a;b) = 600 \end{cases}$  .

**تمرين 3:** عين كل الثنائيات  $(a;b)$  من الأعداد الطبيعية التي تحقق المعادلة :

$$PPCM(a;b) = 21 \times PGCD(a;b)$$

### الحل التمرين الاول :

تحليل كلا من  $a$  و  $b$  الى جداء عوامل أولية :  $a = 256 = 2^8$  ،  $b = 5040 = 2^4 \times 3^2 \times 5 \times 7$  ،  
اذن :  $PGCD(a;b) = 2^4 = 16$  و  $PPCM(a;b) = 2^8 \times 3^2 \times 5 \times 7 = 80640$  .

### الحل التمرين الثاني:

تعين كل الثنائيات  $(a;b)$  :  $\begin{cases} a \times b = 12000 \\ PPCM(a;b) = 600 \end{cases}$

لدينا :  $PGCD(a;b) \times PPCM(a;b) = a \times b$  وبالتالي  $PGCD(a;b) = \frac{a \times b}{PPCM(a;b)}$  أي

$$\begin{cases} a \times b = 12000 \\ PGCD(a;b) = 20 \end{cases} \text{ وعليه نجد } PGCD(a;b) = \frac{12000}{600} = 20$$

لدينا :  $PGCD(a;b) = 20$  معناه  $a = 20k$  و  $b = 20k'$  حيث  $k$  و  $k'$  عدنان صحيحان و  $PGCD(k;k') = 1$  . وعليه  $a \times b = 12000$  معناه  $20k \times 20k' = 12000$  أي  $k \times k' = 30$  . وبالتالي

ثنائيات  $(k;k')$  هي :  $(1;30)$  ،  $(3;10)$  ،  $(5;6)$  ،  $(6;5)$  ،  $(2;15)$  ،  $(15;2)$  ،  $(10;3)$  ،  $(3;10)$  .

إذن ثنائيات  $(a;b)$  :  $(20;600)$  ،  $(600;20)$  ،  $(100;120)$  ،  $(120;100)$  ،  $(40;300)$  ،  $(300;40)$  ،  $(60;100)$  ،  $(100;60)$  .

## مبرهنة بيزو :

مبرهنة : يكون عدنان صحيحان  $a$  و  $b$  أوليين فيما بينهما إذا فقط إذا وجد عدنان صحيحان  $u$  و  $v$  حيث :  $au + bv = 1$  .

ملاحظة : الثنائية  $(u;v)$  ليست وحيدة .

## خواص :

(1) إذا كان  $d$  القاسم المشترك الأكبر لعددين صحيحين  $a$  و  $b$  فإنه يوجد عدنان صحيحان  $u$  و  $v$  حيث :  $au + bv = d$  .

## البرهان :

$a$  و  $b$  عدنان صحيحان غير معدومين وليكن  $d$  قاسمهما المشترك الأكبر . نضع  $a = da'$  و  $b = db'$  حيث  $a'$  و  $b'$  عدنان صحيحان أوليان فيما بينهما . إذن حسب مبرهنة بيزو يوجد عدنان صحيحان  $u$  و  $v$  حيث  $a'u + b'v = 1$  بضرب الطرفين في  $d$  نحصل على  $da'u + db'v = 1$  أي  $au + bv = d$  .

(2) إذا كان  $a$  عددا أوليا فإن  $a$  أولي مع كل الأعداد التي لا يقسمها .

## البرهان :

ليكن  $p$  عددا أوليا و  $a$  عدد طبيعيا لا يقبل القسمة على  $p$  ، نضع  $PGCD(a;p) = d$  . بما أن  $p$  أولي فإن  $d = 1$  أو  $d = p$  و  $d$  لا يقسم  $a$  إذن  $d = 1$  ومنه  $p$  أولي مع  $a$  .  
(3) إذا كان  $a$  عددا أوليا مع عددين صحيحين  $b$  و  $c$  فإن  $a$  أولي مع جدانها  $b \times c$  .

## البرهان :

ليكن  $a$  عددا أوليا مع عددين صحيحين  $b$  و  $c$  إذن حسب مبرهنة بيزو توجد أعداد صحيحة  $u$  ،  $v$  ،  $u'$  و  $v'$  حيث :  $au + bv = 1$  و  $au' + cv' = 1$  نضرب طرفا لطرف نحصل على :  
 $a(auu' + cuv' + bu'v) + bc(vv') = 1$  أي وبالتالي حسب مبرهنة بيزو و  $a$  و  $b \times c$  أوليان فيما بينهما .

## طرائق

### تمرين 1 :

$n$  عدد طبيعي أثبت أن العددين  $a$  و  $b$  أوليان فيما بينهما حيث :  $a = 2n + 3$  و  $b = 3n + 5$  .

### الحل التمرين الاول :

نسب  $-3a + 2b$  .

$$-3a + 2b = -3(2n + 3) + 2(3n + 5) = 1 \text{ . إذن } -3a + 2b = 1 \text{ وبالتالي حسب مبرهنة بيزو } a$$

و  $b$  أوليان فيما بينهما .

### تمرين 2 :

$n$  عدد طبيعي غير معدوم . نضع  $a = 2n^2 + 4n + 1$  و  $b = n + 2$  . باستعمال مبرهنة بيزو ، برهن أن العددين  $a$  و  $b$  أوليان فيما بينهما .

### الحل التمرين الثاني :

لدينا :  $a = 2n(n + 2) + 1$  أي  $a = 2nb + 1$  وبالتالي نجد  $a - 2nb = 1$  وعليه حسب مبرهنة بيزو

يوجد عدنان صحيحان  $1$  و  $-2n$  بحيث  $a - 2nb = 1$  وبالتالي  $a$  و  $b$  أوليان فيما بينهما .

## مبرهنة غوص :

**مبرهنة :**  $a, b, c$  ثلاثة أعداد صحيحة غير معدومة .  
إذا كان  $a$  يقسم الجداء  $bc$  وكان  $a$  أوليا مع  $b$  فإن  $a$  يقسم  $c$  .

**البرهان :** ليكن  $a$  و  $b$  عدنان صحيحان أوليين فيما بينهما غير معدومين ، حسب مبرهنة بيزو يوجد عددين صحيحان  $u$  و  $v$  حيث :  $au + bv = 1$  . ليكن  $c$  عددا صحيحا غير معدوم حيث يقسم الجداء  $bc$  . بضرب طرفي المساواة  $au + bv = 1$  في  $c$  نحصل على  $cau + cbv = c$  . وبما أن  $a$  يقسم الجداء  $bc$  إذن  $a$  يقسم الجداء  $bcv$  ولدينا  $a$  يقسم الجداء  $acu$  فإن  $a$  يقسم  $cau + cbv$  أي  $a$  يقسم  $c$  .

## خواص :

- (1)  $a$  و  $b$  عدنان طبيعيين غير معدومين و  $p$  عدد أولي .  
إذا كان  $p$  يقسم الجداء  $ab$  فإن  $p$  يقسم  $a$  أو  $p$  يقسم  $b$  .

## البرهان :

- $a$  و  $b$  عدنان طبيعيين غير معدومين و  $p$  عدد أولي حيث  $p$  يقسم الجداء  $ab$  .  
(\* ) إذا كان  $p$  يقسم  $a$  تكون الخاصية محققة .  
(\* ) إذا كان  $p$  لا يقسم  $a$  فإن  $\text{pgcd}(a, p) = 1$  لأن  $p$  عدد أولي وقاسميه هما  $1$  و  $p$  إذن  $a$  و  $p$  أوليان فيما بينهما .  
وبما أن  $p$  يقسم الجداء  $ab$  وهو أولي مع  $a$  وحسب مبرهنة غوص فإن  $p$  يقسم  $b$  .

- (2)  $a, b, c$  أعداد طبيعية غير معدومة .  
إذا كان  $a$  مضاعفا للعددين  $b$  و  $c$  وكان  $c$  و  $b$  أوليين فيما بينهما فإن  $a$  مضاعفا للجداء  $bc$

## البرهان :

- $a$  مضاعفا للعددين  $b$  و  $c$  يوجد عددين طبيعيين  $k$  و  $k'$  حيث (1)  $a = kb$  و  $a = k'c$  .  
إذن  $kb = k'c$  .  
العدد  $c$  يقسم  $k'c$  إذن  $c$  يقسم  $kb$  وبما أن  $c$  أولي مع  $b$  وحسب مبرهنة غوص فإن  $c$  يقسم  $k$  .  
إذن يوجد عدد طبيعي  $k''$  حيث  $k = k''c$  وبالتعويض في (1) نجد  $a = k''cb$  وبالتالي  $a$  مضاعف للعدد  $cb$  .

## تمرين :

- (1) عين في المجموعة  $\mathbb{Z}^2$  مجموعة حلول المعادلة ذات المجهول  $(x, y)$  :  $7x - 24y = 0$  .  
(2) تأكد أن الثنائية  $(7, 2)$  حل للمعادلة ذات المجهول  $(x, y)$  :  $7x - 24y = 1$  .  
(3) استنتج في  $\mathbb{Z}^2$  مجموعة حلول المعادلة ذات المجهول  $(x, y)$  :  $7x - 24y = 1$  .

## الحل التمرين :

(1)  $7x - 24y = 0$  ومنه  $7x = 24y$  .

$24y$  يقسم  $24y$  و بالتالي  $24$  يقسم  $7x$  بما أن  $24$  أولي مع  $7$  فإن حسب مبرهنة غوص  $24$  يقسم  $x$  . نضع  $x = 24k$  حيث  $k$  عدد صحيح .

بالتعويض في المساواة  $7x = 24y$  نحصل على  $7(24k) = 24y$  و منه  $y = 7k$  .



الحلول هي الثنائيات من الشكل  $(24k; 7k)$  حيث  $k$  عدد صحيح .

(2)  $7x - 24y = 1$  و منه  $(7; 2)$  حل للمعادلة  $7x - 24y = 1$

(3) بطرح 1 من طرفي المعادلة  $7x - 24y = 1$  نحصل على  $7x - 24y - 1 = 0$

و نعلم أن  $7 \times 7 - 24 \times 2 = 1$  إذن  $7x - 24y - 7 \times 7 + 24 \times 2 = 0$  و منه  $7(x - 7) = 24(y - 2)$

24 يقسم  $24(y - 2)$  و بالتالي 24 يقسم  $7(x - 7)$  بما أن 24 أولي مع 7 فإن حسب مبرهنة غوص 24 يقسم  $(x - 7)$  نضع  $(x - 7) = 24k$  حيث  $k$  عدد صحيح أي  $x = 24k + 7$

بالتعويض في المساواة  $7(x - 7) = 24(y - 2)$  نحصل على  $7(24k) = 24(y - 2)$

ومنه  $y = 7k + 2$  . الحلول هي الثنائيات من الشكل  $(24k + 7; 7k + 2)$  حيث  $k$  عدد صحيح .

### ملاحظة :

يمكن الحصول على الثنائية  $(7; 2)$  باستعمال الطريقة التالية (الطريقة ليست وحيدة )

لدينا :  $7x - 24y = 1$  و بالتالي نجد :  $24y + 1 = 7x$  .

أذن نبحث عن العدد الصحيح  $y$  حيث  $24y + 1$  مضاعف للعدد 7 .

نأخذ  $y = 0$  و  $y = 1$  : نجد أن  $24y + 1$  ليس مضاعف للعدد 7 .

نأخذ  $y = 2$  نجد :  $24 \times 2 + 1 = 49 = 7 \times 7$  و بالتالي  $x = 7$  .

أذن  $(7; 2)$  حل للمعادلة  $7x - 24y = 1$  .