

التمرين الأول:

- I / 1. ادرس، حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 10.
 2. استنتج باقي قسمة العدد 3^{2015} على 10.
 3. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون العدد $7^{4n+1} + 2011^n + 2009^{2n} + 1$ مضاعف للعدد 10.
 4. جد مجموعة الأعداد الطبيعية n بحيث: $13^{4n+1} + 3n \equiv 0 [10]$.
 II / 1. حل المعادلة التفاضلية التالية: $y' = (\ln 3)y$
 2. نسمي f الحل الخاص لهذه المعادلة والذي يحقق $f(0) = 1$ ؛ بين أن $f(x) = 3^x$.
 3. ادرس تغيرات الدالة f وشكل جدول تغيراتها.
 4. ماهو رقم أحاد العدد $f(2011) + f(1432)$
 5. نعتبر المجموع S_n ؛ حيث $S_n = f(0) + f(1) + \dots + f(n)$
 - احسب S_n ، ثم جد مجموعة الأعداد الطبيعية n التي يكون من أجلها $2S_n$ يقبل القسمة على 10.

التمرين الثاني:

- في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر النقطتين:
 $A(12; 7; -13)$ و $B(3; 1; 2)$ والمستويان (P_1) و (P_2) اللذين معادلتيهما على الترتيب:
 $(P_1): 3x + 2y - 5z - 1 = 0$ و $(P_2): x + y - 2z = 0$
 1. بين أن المستويين (P_1) و (P_2) متقاطعان وفق مستقيم (Δ) يطلب تعيين تمثيل وسيطي له.
 2. أثبت أن النقطة B هي المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (P_1) .
 3. ليكن (Q) المستوي المعين بالنقطة $C(6; 5; -6)$ والشعاعين $\vec{u}(2; 2; 2)$ و $\vec{v}(-2; 3; 0)$.
 أ - اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستوي (Q) .
 ب - بين أن المستويين (P_1) و (Q) متوازيان.
 ج - تحقق أن $3x + 2y - 5z - 58 = 0$ معادلة ديكرتية للمستوي (Q) .
 د - تحقق أن النقطة I منتصف $[AB]$ تنتمي إلى (Q) واستنتج أن (Q) هو المستوي المحوري للقطعة $[AB]$.
 4. لتكن (S) مجموعة النقط M من الفضاء والتي تحقق: $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$.
 أ - بين أن (S) هي سطح كرة يطلب تعيين عناصرها المميزة.
 ب - استنتج أن المستوي (Q) يقطع سطح الكرة (S) وفق دائرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

التمرين الثالث:

- نعتبر المثلث القائم و المتساوي الساقين ABC حيث $(\overline{AB}; \overline{AC}) = \frac{\pi}{2}$.
 لتكن D نظيرة A بالنسبة إلى C ، و S التشابه المباشر الذي يحول D إلى C و C إلى B .
 1. عين نسبة وزاوية التشابه المباشر S .
 2. نسمي Ω مركز التشابه المباشر S .
 أ - باستعمال العلاقة $\overline{DC} = \overline{\Omega C} - \overline{\Omega D}$ ، بين أن: $DC^2 = \Omega D^2$.
 ب - استنتج طبيعة المثلث ΩDC .
 3. نضع $T = S \circ S$.
 أ - ما طبيعة التحويل T ؟ عين عناصره المميزة.

ب - عيّن صورة النقطة D بالتحويل T .
4. بيّن أنّ الرباعي $AD\Omega B$ مستطيل.

التمرين الرابع:

I - الدالة g معرفة على \mathbb{R} كما يلي: $g(x) = (x-1)e^x$.

1- ادرس تغيّرات الدالة g .

2- بيّن أنّه، من أجل كل عدد حقيقي x : $1+(x-1)e^x \geq 0$.

II - الدالة f معرفة على $[0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}; x > 0$
 $f(0) = 1$

1- أ - بيّن أنّ f مستمرة على $[0; +\infty[$.

ب - احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2- أ - تحقق أنّه، من أجل كل عدد حقيقي x من $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{1+(x-1)e^x}{x^2}$.

ب - استنتج اتجاه تغيّر الدالة f ، ثم شكّل جدول تغيّراتها.

III - n عدد طبيعي حيث $n \geq 1$ ؛ f_n الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$: $f_n(x) = \frac{e^x - 1}{x} + n \ln x$

و (C_n) منحناها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1- ادرس اتجاه تغيّر الدالة f_n على $]0; +\infty[$.

2- احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x)$.

3- ادرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_n) و (C_{n+1}) .

4- بيّن أنّ جميع المنحنيات تمر من نقطة ثابتة B يطلب تعيين إحداثياتها.

5- أ - بيّن أنّه، يوجد عدد حقيقي وحيد α_1 من $]0,3; 0,4[$ بحيث $f_1(\alpha_1) = 0$.

ب - بيّن أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq 1$ فإن: $f_n(\alpha_1) < 0$ ، ثم برهن أنّه يوجد عدد حقيقي

وحيد α_n من $]\alpha_1; 1[$ بحيث $f_n(\alpha_n) = 0$.

6- أ - بالاعتماد على الجزء II - ؛ بيّن أنّه، من أجل كل x من $]0; 1[$: $\frac{e^x - 1}{x} \leq e - 1$.

ب - استنتج أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq 1$: $\ln(\alpha_n) \geq \frac{1-e}{n}$ ، ثم $\alpha_n \geq e^{\frac{1-e}{n}}$.

ج - جد نهاية المتتالية (α_n) .

التمرين الأول:

1. /I دراسة، حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 10. لدينا $3^0 \equiv 1[10]$ ، $3^1 \equiv 3[10]$ ، $3^2 \equiv 9[10]$ ، $3^3 \equiv 27[10] \equiv -1[10]$ ومنه $3^4 \equiv 1[10]$ وعليه من أجل كل عدد طبيعي k لدينا $3^{4k} \equiv 1[10]$ ، $3^{4k+1} \equiv 3[10]$ ، $3^{4k+2} \equiv 9[10]$ ، $3^{4k+3} \equiv 27[10] \equiv -1[10]$.

n	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$
باقي قسمة 3^n على 10.	1	3	9	7

2. استنتاج باقي قسمة العدد 3^{2015} على 10.

لدينا $2015 = 4 \times 503 + 3$ إذن $3^{2015} \equiv 7[10]$

3. تبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون العدد $7^{4n+1} + 2011^n + 2009^{2n} + 1$ مضاعف للعدد 10.

لدينا $7 \equiv -3[10]$ ومنه $7^{4n+1} \equiv (-3)^{4n+1}[10]$ أي $7^{4n+1} \equiv -3^{4n+1}[10]$ وعليه $7^{4n+1} \equiv -3[10]$

ولدينا $2011 \equiv 1[10]$ ومنه $2011^n \equiv 1^n[10]$ أي $2011^n \equiv 1[10]$

ولدينا $2009 \equiv -1[10]$ ومنه $2009^{2n} \equiv (-1)^{2n}[10]$ أي $2009^{2n} \equiv 1[10]$

إذن $7^{4n+1} + 2011^n + 2009^{2n} + 1 \equiv -3 + 1 + 1 + 1[10] \equiv 0[10]$ أي $7^{4n+1} + 2011^n + 2009^{2n} + 1 \equiv 0[10]$

وبالتالي من أجل كل عدد طبيعي n العدد $7^{4n+1} + 2011^n + 2009^{2n} + 1$ مضاعف للعدد 10.

4. إيجاد مجموعة الأعداد الطبيعية n بحيث: $13^{4n+1} + 3n \equiv 0[10]$.

$13^{4n+1} + 3n \equiv 0[10]$ معناه $3^{4n+1} + 3n \equiv 0[10]$ ومنه $3 + 3n \equiv 0[10]$ أي $3(1+n) \equiv 0[10]$

لدينا العددان 3 و 10 أوليان فيما بينهما إذن حسب مبرهنة غوص $1+n \equiv 0[10]$ يكافئ $n \equiv -1[10]$

أي $n \equiv 9[10]$ وعليه $n \equiv 10k + 9$ حيث $k \in \mathbb{N}$.

II /1 حل المعادلة التفاضلية التالية: (1) $y' = (\ln 3)y$ (1)

المعادلة (1) من الشكل $y' = ay$ حلها هي دوال من الشكل $x \mapsto ce^{ax}$

ومنه $y = ce^{x \ln 3}$ أي $y = c \times 3^x$ حيث $c \in \mathbb{R}$.

2. نسمي f الحل الخاص لهذه المعادلة والذي يحقق $f(0) = 1$ ؛

تبيين أن $f(x) = 3^x$.

مع $f(0) = 1$ $f(x) = c \times 3^x$

$f(0) = 1$ معناه $c \times 3^0 = 1$ ومنه $c = 1$ وعليه $f(x) = 3^x$.

3. دراسة تغيرات الدالة f .

لدينا $f(x) = 3^x = e^{x \ln 3}$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x \ln 3} = \lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \ln 3} = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^t = +\infty$

الدالة f تقبل الاشتقاق على \mathbb{R} ولدينا: $f'(x) = (\ln 3)e^{x \ln 3}$

من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) > 0$ وبالتالي الدالة f متزايدة تماماً على \mathbb{R} .

جدول تغيرات الدالة f .

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	0	$+\infty$

4. رقم آحاد العدد $f(1432) + f(2011)$

$$f(1432) + f(2011) = 3^{1432} + 3^{2011}$$

لدينا $1432 = 3 \times 358$ إذن $3^{1432} \equiv 1[10]$ و $2011 = 3 \times 502 + 3$ إذن $3^{2011} \equiv 7[10]$

$$f(1432) + f(2011) \equiv 8[10] \text{ أي } 3^{1432} + 3^{2011} \equiv 1 + 7[10]$$

وبالتالي رقم آحاد العدد $f(1432) + f(2011)$ هو 8. رقم آحاد عدد طبيعي هو باقي قسمته على 10.5. نعتبر المجموع S_n ؛ حيث $S_n = f(0) + f(1) + \dots + f(n)$ - حساب S_n .

$$S_n = f(0) + f(1) + \dots + f(n) = 3^0 + 3^1 + \dots + 3^n$$

 S_n هو مجموع $(n+1)$ حدا من متتالية هندسية أساسها 3 وحدها الأول 1.

$$S_n = \frac{3^{n+1} - 1}{3 - 1} = \frac{3^{n+1} - 1}{2}$$

إيجاد مجموعة الأعداد الطبيعية n التي يكون من أجلها $2S_n$ يقبل القسمة على 10.

$$2S_n \equiv 0[10] \text{ تعني } 3^{n+1} - 1 \equiv 0[10] \text{ وتكافئ } 3^{n+1} \equiv 1[10] \text{ ومنه } n+1 = 4k \text{ أي } n = 4k - 1$$

حيث $k \in \mathbb{N}^*$.التمرين الثاني:في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر النقطتين: $A(12; 7; -13)$ و $B(3; 1; 2)$ والمستويان (P_1) و (P_2) اللذين معادلتيهما على الترتيب:

$$(P_1): 3x + 2y - 5z - 1 = 0 \text{ و } (P_2): x + y - 2z = 0$$

1. تبين أن المستويين (P_1) و (P_2) متقاطعان وفق مستقيم (Δ) يطلب تعيين تمثيل وسيطي له.لدينا $\vec{n}(3; 2; -5)$ شعاعا ناظما للمستوي (P_1) و $\vec{n}'(1; 1; -2)$ شعاعا ناظما للمستوي (P_2) و $\frac{3}{1} \neq \frac{2}{1}$ إذن الشعاعان \vec{n} و \vec{n}' غير مرتبطين خطيا ومنه (P_1) و (P_2) متقاطعان وفق مستقيم (Δ) .تعيين تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) .لتكن $M(x; y; z)$ نقطة من الفضاء.

$$\begin{cases} 3x + 2y - 5z - 1 = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \text{ إذا كانت } M \in (\Delta) \text{ فإن إحداثياتها تحقق الجملة}$$

$$\begin{cases} 3x + 2y - 5t - 1 = 0 \\ -2x - 2y + 4t = 0 \end{cases} \text{ تكافئ } \begin{cases} 3x + 2y - 5t - 1 = 0 \\ x + y - 2t = 0 \end{cases} \text{ وبوضع } z = t \text{ نحصل على}$$

وبجمع المعادلتين نجد $x - t - 1 = 0$ ومنه $x = t + 1$ وبالتعويض نجد $3(t + 1) + 2y - 5t - 1 = 0$ ومنه

$$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = t - 1; (t \in \mathbb{R}) \\ z = t \end{cases} \text{ هو تمثيل وسيطي للمستقيم } (\Delta).$$

2. إثبات أن النقطة B هي المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (P_1) .

$$\text{لدينا } B \in (P_1) \text{ ومنه } x_B + y_B - 2z_B = 3 + 1 - 2 \times 2 + 0$$

ولدينا $(-9; -6; 15)$ \overline{AB} ومنه $\overline{AB} = -3\vec{n}$ أي الشعاعان \vec{n} و \overline{AB} مرتبطان خطياً.

إذن B هي المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (P_1) .

3. ليكن (Q) المستوي المعين بالنقطة $C(6; 5; -6)$ والشعاعين $\vec{u}(2; 2; 2)$ و $\vec{v}(-2; 3; 0)$.

أ - كتابة تمثيلاً وسيطياً للمستوي (Q) .

لتكن $M(x; y; z)$ نقطة من الفضاء.

$$\overline{CM} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \text{ بحيث } \alpha \text{ و } \beta \text{ عدنان حقيقيان}$$

$$\begin{cases} x = 2\alpha - 2\beta + 6 \\ y = 2\alpha + 3\beta + 5 \\ z = 2\alpha - 6 \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} x - 6 = 2\alpha - 2\beta \\ y - 5 = 2\alpha + 3\beta \\ z + 6 = 2\alpha \end{cases} \text{ ومنه}$$

ب - تبين أن المستويين (P_1) و (Q) متوازيان.

(P_1) و (Q) متوازيان معناه \vec{n} هو شعاع ناظمي لـ (Q) أي $\vec{n} \perp \vec{u}$ و $\vec{n} \perp \vec{v}$

لدينا $\vec{n}\vec{u} = 3 \times 2 + 2 \times 2 - 5 \times 2 = 0$ و $\vec{n}\vec{v} = 3 \times -2 + 2 \times 3 - 5 \times 0 = 0$ وهذا يعني $\vec{n} \perp \vec{u}$ و $\vec{n} \perp \vec{v}$ ومنه المستويان (P_1) و (Q) متوازيان.

ج - التحقق أن $3x + 2y - 5z - 58 = 0$ معادلة ديكارتية للمستوي (Q) .

بما أن $3(2\alpha - 2\beta + 6) + 2(2\alpha + 3\beta + 5) - 5(2\alpha - 6) - 58 = 0$ فإن $3x + 2y - 5z - 58 = 0$ معادلة ديكارتية للمستوي (Q) .

د - التحقق أن النقطة I منتصف $[AB]$ تنتمي إلى (Q)

$$\text{لدينا } I\left(\frac{15}{2}; 4; -\frac{11}{2}\right) \text{ و } 3x_I + 2y_I - 5z_I - 58 = \frac{45}{2} + 8 + \frac{55}{2} - 58 = 0 \text{ ومنه } I \in (Q)$$

استنتاج أن (Q) هو المستوي المحوري للقطعة $[AB]$

لدينا \vec{n} مرتبطان خطياً و \vec{n} شعاع ناظمي لـ (Q) إذن \overline{AB} شعاع ناظمي لـ (Q) و بما أن $I \in (Q)$ فإن (Q) هو المستوي المحوري للقطعة $[AB]$

4. لتكن (S) مجموعة النقط M من الفضاء والتي تحقق: $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = 0$.

أ - تبين أن (S) هي سطح كرة يطلب تعيين عناصرها المميزة.

$$\overline{MA} \cdot \overline{MB} = 0 \text{ تعني } (\overline{MI} + \overline{IA}) \cdot (\overline{MI} + \overline{IB}) = 0 \text{ وتكافئ } (\overline{MI} + \overline{IA}) \cdot (\overline{MI} - \overline{IA}) = 0$$

وتكافئ $MI^2 - IA^2 = 0$ أي $MI = IA$ إذن (S) هي سطح الكرة التي مركزها I ونصف قطرها

$$IA = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{81+36+225}}{2} = \frac{\sqrt{342}}{2} = \frac{3\sqrt{38}}{2}$$

ب - استنتاج أن المستوي (Q) يقطع سطح الكرة (S) وفق دائرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

$d(I; (Q)) = 0$ لأن $I \in (Q)$ ومنه (Q) يقطع (S) وفق دائرة كبيرة في الكرة (S) أي دائرة مركزها I

$$r = \frac{3\sqrt{38}}{2}$$

ونصف قطرها

نعتبر المثلث القائم والمتساوي الساقين ABC حيث $(\overline{AB}; \overline{AC}) = \frac{\pi}{2}$.

لتكن D نظيرة A بالنسبة إلى C ، و S التشابه المباشر الذي يحول D إلى C و C إلى B

1. تعيين نسبة وزاوية التشابه المباشر S .

لدينا $S(C) = B$ و $S(D) = C$

إذن نسبة التشابه هي $k = \frac{BC}{CD}$ وزاويته هي $\theta = (\overline{CD}; \overline{BC})$

لدينا حسب نظرية فيثاغورس $BC^2 = AB^2 + AC^2$ لكن $AB = AC = CD$

إذن $BC^2 = CD^2 + CD^2 = 2CD^2$ ومنه $\frac{BC}{CD} = \sqrt{2}$ أي $\frac{BC^2}{CD^2} = 2$

وعليه نسبة التشابه S هي $k = \sqrt{2}$ ولدينا $(\overline{CD}; \overline{BC}) = (\overline{CA}; \overline{CB}) = \frac{\pi}{4}$ وعليه

زاوية التشابه المباشر S هي $\frac{\pi}{4}$.

2. نسمي Ω مركز التشابه المباشر S .

أ - باستعمال العلاقة $\overline{DC} = \overline{\Omega C} - \overline{\Omega D}$ ، تبين أن: $DC^2 = \Omega D^2$.

$$\overline{DC}^2 = (\overline{\Omega C} - \overline{\Omega D})^2 = \Omega C^2 + \Omega D^2 - 2\overline{\Omega C} \cdot \overline{\Omega D} = \Omega C^2 + \Omega D^2 - 2(\Omega C \times \Omega D \cdot \cos(\overline{\Omega D}; \overline{\Omega C}))$$

لدينا $S(D) = C$ معناه $\Omega C = \sqrt{2}\Omega D$ و $(\overline{\Omega D}; \overline{\Omega C}) = \frac{\pi}{4}$

$$DC^2 = 2\Omega D^2 + \Omega D^2 - 2\left(\sqrt{2}\Omega D \times \Omega D \times \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 3\Omega D^2 - 2\Omega D^2 = \Omega D^2$$

ب - استنتاج طبيعة المثلث ΩDC .

لدينا $DC^2 = \Omega D^2$ معناه $DC = \Omega D$ ومنه المثلث ΩDC متساوي الساقين رأسه الأساسي D .

زيادة على هذا لدينا $(\overline{\Omega D}; \overline{\Omega C}) = \frac{\pi}{4}$ إذن $(\overline{C\Omega}; \overline{CD}) = \frac{\pi}{4}$ وعليه $(\overline{DC}; \overline{D\Omega}) = \frac{\pi}{2}$

أي المثلث ΩDC قائم في D ومتساوي الساقين.

3. نضع $T = S \circ S$.

أ - طبيعة التحويل T و تعيين عناصره المميزة.

التحويل T هو تشابه مباشر نسبته $\sqrt{2}^2$ أي نسبته 2 وزاويته $2 \times \frac{\pi}{4}$ أي زاويته $\frac{\pi}{2}$ ومركزه Ω .

ب - تعيين صورة النقطة D بالتحويل T .

لدينا $S(C) = B$ و $S(D) = C$ ومنه $S(S(D)) = B$ أي $S(S(D)) = B$ إذن $T(D) = B$

4. تبين أن الرباعي $AD\Omega B$ مستطيل.

$$\text{لدينا } (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2} \text{ ؛ } (\overrightarrow{DC}; \overrightarrow{D\Omega}) = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{ولدينا } T(D) = B \text{ معناه } (\overrightarrow{\Omega D}; \overrightarrow{\Omega B}) = \frac{\pi}{2}$$

بما أن الرباعي $AD\Omega B$ فيه ثلاث زوايا قائمة فهو مستطيل.

التمرين الرابع:

I- الدالة g معرفة على \mathbb{R} كما يلي: $g(x) = (x-1)e^x$.

1- دراسة تغيرات الدالة g .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x-1)e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x - e^x = 0$$

$$\text{لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} x-1 = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \text{ ، } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1)e^x = +\infty$$

الدالة g تقبل الإشتقاق على \mathbb{R} ولدينا من أجل كل عدد حقيقي x :

$$g'(x) = e^x + e^x(x-1) = xe^x$$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x ، $e^x > 0$ ومنه إشارة $g'(x)$ هي نفس إشارة x على \mathbb{R} .

$$\text{من أجل } x \in]-\infty; 0[\text{ ، } g'(x) < 0$$

$$\text{من أجل } x \in]0; +\infty[\text{ ، } g'(x) > 0 \text{ و } g'(0) = 0$$

إذن الدالة g متناقصة تماما على المجال $]-\infty; 0]$ و متزايدة تماما على المجال $]0; +\infty[$.

جدول تغيرات الدالة g .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	0	-1	$+\infty$

2- تبين أنه، من أجل كل عدد حقيقي x : $1 + (x-1)e^x \geq 0$.

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x ، $g(x) \geq -1$ معناه $(x-1)e^x \geq -1$ أي $(x-1)e^x + 1 \geq 0$

$$\text{II- الدالة } f \text{ معرفة على }]0; +\infty[\text{ كما يلي: } \begin{cases} f(x) = \frac{e^x - 1}{x}; x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

1- أ- تبين أن f مستمرة على $]0; +\infty[$.

لدينا الدالة $e^x - 1 \mapsto x$ مستمرة على المجال $]0; +\infty[$ والدالة $x \mapsto x$ مستمرة على المجال $]0; +\infty[$

وهي لاتعتمد على هذا المجال إذن حاصل قسمتهما يكون دالة مستمرة على المجال $]0; +\infty[$ أي الدالة f

مستمرة على المجال $]0; +\infty[$.

ولدينا $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = 1 = f(0)$ ومنه الدالة f مستمرة على يمين 0. وبالتالي الدالة f مستمرة على $[0; +\infty[$.

ب - حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} - \frac{1}{x} = +\infty$$

2- أ - التحقق أنه، من أجل كل عدد حقيقي x من $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{1 + (x-1)e^x}{x^2}$.

ليكن $x \in]0; +\infty[$.

$$f'(x) = \frac{xe^x - (e^x - 1)}{x^2} = \frac{(x-1)e^x + 1}{x^2}$$

ب - استنتاج اتجاه تغير الدالة f .

لدينا من أجل كل $x \in]0; +\infty[$ ، $(x-1)e^x + 1 > 0$ و $x^2 > 0$ إذن من أجل كل $x \in]0; +\infty[$: $f'(x) > 0$ وبالتالي الدالة f متزايدة تماماً على المجال $]0; +\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f .

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	1	$+\infty$

III - n عدد طبيعي حيث $n \geq 1$ ؛ f_n الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$: $f_n(x) = \frac{e^x - 1}{x} + n \ln x$.

و (C_n) منحها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1- دراسة اتجاه تغير الدالة f_n على $]0; +\infty[$.

الدالة f_n هي مجموع دالتين متزايدتين تماماً على المجال $]0; +\infty[$ (الدالة f والدالة $x \mapsto n \ln x$) إذن الدالة f_n متزايدة تماماً على $]0; +\infty[$.

2- حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} n \ln x = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x} + n \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} n \ln x = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{x} = +\infty \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{x} + n \ln x = +\infty$$

3- دراسة الوضع النسبي للمنحنيين (C_n) و (C_{n+1}) .

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{e^x - 1}{x} + (n+1) \ln x - \left[\frac{e^x - 1}{x} + n \ln x \right] = n \ln x + \ln x - \ln x = \ln x$$

$$x = 1 \text{ أي } \ln x = 0 \text{ تعني } f_{n+1}(x) - f_n(x) = 0$$

$$x > 1 \text{ أي } \ln x > 0 \text{ تعني } f_{n+1}(x) - f_n(x) > 0$$

$$0 < x < 1 \text{ أي } \ln x < 0 \text{ تعني } f_{n+1}(x) - f_n(x) < 0$$

x	0	1	$+\infty$
$f_{n+1}(x) - f_n(x)$		0	+
الوضعية النسبية	(C _{n+1}) تحت (C _n)		(C _n) فوق (C _{n+1})

(C_n) و (C_{n+1}) يتقاطعان في النقطة ذات الإحداثيتين (1; e - 1).

4- تبين أن جميع المنحنيات تمر من نقطة ثابتة B يطلب تعيين إحداثيتها.

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $f_n(1) = e - 1$ وعليه $B(1; e - 1)$.

5- أ - تبين أنه، يوجد عدد حقيقي وحيد α_1 من $]0, 3; 0, 4[$ بحيث $f_1(\alpha_1) = 0$.

الدالة f_1 مستمرة و متزايدة تماماً على $]0; +\infty[$ وبالخصوص على المجال $]0, 3; 0, 4[$ و $f_1(0.3) \approx -0.03$ و $f_1(0.4) \approx 0.31$ ،

$f_1(0.4) \approx 0.31$ أي $f_1(0.3) \times f_1(0.4) < 0$ إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد

α_1 من المجال $]0, 3; 0, 4[$ بحيث $f_1(\alpha_1) = 0$.

ب - تبين أنه، من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq 1$ فإن: $f_n(\alpha_1) < 0$.

$$f_n(\alpha_1) - f_1(\alpha_1) = \frac{e^{\alpha_1} - 1}{\alpha_1} + n \ln \alpha_1 - \left[\frac{e^{\alpha_1} - 1}{\alpha_1} + \ln \alpha_1 \right] = n \ln \alpha_1 - \ln \alpha_1 = (n - 1) \ln \alpha_1$$

لكن $f_1(\alpha_1) = 0$ ومنه $f_n(\alpha_1) = (n - 1) \ln \alpha_1$

لدينا من أجل كل $n > 1$ ، $n - 1 > 0$ وبما أن $0 < \alpha_1 < 1$ فإن $\ln \alpha_1 < 0$ إذن $(n - 1) \ln \alpha_1 < 0$

أي $f_n(\alpha_1) < 0$. (يمكن استعمال عدة طرق).

تبين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α_n من $]\alpha_1; 1[$ بحيث $f_n(\alpha_n) = 0$.

الدالة f_n مستمرة و متزايدة تماماً على $]0; +\infty[$ وبالخصوص على $]\alpha_1; 1[$ و $f_n(1) = e - 1$

ولدينا $f_n(\alpha_1) < 0$ إذن $f_n(1) \times f_n(\alpha_1) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي

وحيد α_n من $]\alpha_1; 1[$ بحيث $f_n(\alpha_n) = 0$.

6- أ - تبين أنه، من أجل كل x من $]0; 1[$: $\frac{e^x - 1}{x} \leq e - 1$.

لدينا الدالة f متزايدة تماماً على المجال $]0; 1[$ إذن من أجل كل $x \in]0; 1[$ لدينا $f(x) \leq f(1)$

$$\text{ومنه } f(x) \leq e - 1 \text{ أي } \frac{e^x - 1}{x} \leq e - 1$$

ب - استنتاج أنه، من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq 1$: $\ln(\alpha_n) \geq \frac{1-e}{n}$ ، ثم $\alpha_n \geq e^{\frac{1-e}{n}}$.

$$\text{لدينا } \alpha_n \in]0; 1[\text{ ومنه } \frac{e^{\alpha_n} - 1}{\alpha_n} \leq e - 1$$

$$\frac{e^{\alpha_1} - 1}{\alpha_1} = -n \ln \alpha_1 \text{ ومنه } \frac{e^{\alpha_1} - 1}{\alpha_1} + n \ln \alpha_1 = 0 \text{ معناه } f_n(\alpha_n) = 0$$

$$\text{إذن } -n \ln \alpha_1 \leq e - 1 \text{ وتكافئ } \ln \alpha_1 \geq \frac{1-e}{n} \text{ وبالتالي } \alpha_n \geq e^{\frac{1-e}{n}}$$

جـ - إيجاد نهاية المتتالية (α_n) .

$$\text{لدينا } e^{\frac{1-e}{n}} \leq \alpha_n \leq 1 \text{ ولدينا } \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{1-e}{n}} = 1 \text{ إذن حسب النهايات بالمقارنة نستنتج } \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 1$$

aziz - mus1@hotmail.fr