ملخص حول الهندسة في الفضاء

I الجداء السلمي: ليكن $\vec{v}(x',y',z');\vec{u}(x,y,z)$ شعاعان : $\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|cos(\vec{u},\vec{v})$

$\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'+zz'$

/1 $\vec{u}\perp\vec{v}$ يعني ان $\vec{u}.\vec{v}=0$

/2 $\vec{u}\parallel\vec{v}$ يعني ان $\vec{u}=\lambda\vec{v}$

II المستوي في الفضاء: 1 المعادلة الديكارتية لمستو:

كل مستوي (p), $\vec{n}(a,b,c)$ شعاع ناظمي له, يقبل معادلة من الشكل: $(p)\ : ax+by+cz+d=0$

2 المسافة بين نقطة ومستو: (p) مستو معادلته $ax+by+cz+d=0$ و $M(x_0,y_0,z_0)$ نقطة من الفضاء , $d(M,(p))=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

3 التمثيل الوسيطي للمستوي في الفضاء: (p) مستو معين بشعاعين $\vec{v}(\alpha',\beta',\gamma');\vec{u}(\alpha,\beta,\gamma)$ ونقطة $A(x_0,y_0,z_0)$, لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء

تكون M من المستو (p) اذاتحقق : $\overrightarrow{AM}=t\vec{u}+t'\vec{v}$

حيث t و t' اعداد حقيقية اذن: $\begin{cases}x=\alpha t+\alpha't'+x_0\\y=\beta t+\beta't'+y_0\\z=\gamma t+\gamma't'+z_0\end{cases}$

ولاستنتاج معادلة (p) نبحث عن علاقة بين x و y و z مستقلة عن t و t'

III- المستقيم في الفضاء:

1 التمثيل الوسيطي لمستقيم في الفضاء: (Δ) مستقيم في الفضاء يشمل النقطة $A(x_0,y_0,z_0)$ و شعاع $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$ توجيه له , لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء , تكون M من المستقيم (Δ) إذا تحقق: $\overrightarrow{AM}=t\vec{u}$ أي

حيث t عدد حقيقي اذن: $\begin{cases}x=\alpha t+x_0\\y=\beta t+y_0\\z=\gamma t+z_0\end{cases}$

ملاحظة: إذا كان t وحيد فإن M فعلا نقطة من (Δ)

IV- سطح كرة في الفضاء:

1 المعادلة الديكارتية لسطح كرة: مجموعة النقط $M(x,y,z)$ التي تحقق $\Omega M=R$ هي سطح كرة مركزها $\Omega(x_0,y_0,z_0)$ ونصف قطرها R ومعادلتها :

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$$

وتكتب ايضا:

$$x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$$

حيث : $d={x_0}^2+{y_0}^2+{z_0}^2-R^2$

2 دراسة مجموعة النقط: لتكن المجموعة (E) حيث :

$(E)=\{M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء $/\ x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0\}$

المعادلة:

$$x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$$

تكتب على الشكل

$$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2+\left(z+\frac{c}{2}\right)^2=\frac{a^2+b^2+c^2-4d}{4}$$

نضع: $K=\frac{a^2+b^2+c^2-4d}{4}$

1 إذا كان $K>0$ فإن المجموعة (E) هي سطح كرة مركزها $\Omega\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2},-\frac{c}{2}\right)$ ونصف قطرها $R=\sqrt{K}$

2 إذا كان $K=0$ فإن المجموعة (E) هي نقطة $\Omega\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2},-\frac{c}{2}\right)$

3 إذا كان $K<0$ فإن المجموعة (E) هي مجموعة خالية

V- المرجح في الفضاء:

/1 تكون النقطة G مرجح الجملة $\{(A_0,\alpha_0),(A_1,\alpha_1),(A_2,\alpha_2),\ldots\ldots.(A_n,\alpha_n)\}$

إذا تحقق : $\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+\ldots\ldots\ldots\ldots+\alpha_n\neq0$

إذن G هي نقطة وحيدة وتحقق العلاقة التالية:

$$\alpha_0\overrightarrow{GA_0}+\alpha_1\overrightarrow{GA_1}+\alpha_2\overrightarrow{GA_2}+\ldots.+\alpha_n\overrightarrow{GA_n}=\vec{0}$$

وبالتالي من اجل كل نقطة M من الفضاء لدينا

$$\alpha_0\overrightarrow{MA_0}+\alpha_1\overrightarrow{MA_1}+\alpha_2\overrightarrow{MA_2}+\ldots.+\alpha_n\overrightarrow{MA_n}=(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+\ldots\ldots+\alpha_n)\overrightarrow{MG}$$

/2 إذا كانت $\alpha_0=\alpha_1=\alpha_2=\ldots\ldots\ldots=\alpha_n$ فإن النقطة G هي مركز ثقل الجملة

/3 (خاصية التجميع) إذا كانت النقطة G مرجح للجملة $\{(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)\}$ وكانت النقطة D مرجح للجملة $\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$ فإن G مرجح للجملة $\{(D,\alpha+\beta),(C,\gamma)\}$

/4 إحداثيات مرجح:

لتكن النقطة G مرجح للجملة $\{(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)\}$ حيث: $A(x_A,y_A,z_A),B(x_B,y_B,z_B),C(x_C,y_C,z_C)$

إذن :

$$G\left(\frac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma},\frac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma},\frac{\alpha z_A+\beta z_B+\gamma z_C}{\alpha+\beta+\gamma}\right)$$

VI حالات مجموعة النقط:

1/ المجموعة (E_1) حيث
$(E_1) = \{M/\Omega M = R$ نقطة من الفضاء $\}$ هي سطح كرة مركزها Ω ونصف قطرها R

2/ المجموعة (E_2) حيث
$(E_2) = \{M/MG = MH$ نقطة من الفضاء $\}$ هي المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[GH]$

3/ المجموعة (E_3) حيث
$(E_3) = \{M/\ \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC} = 0$ نقطة من الفضاء $\}$ هي مستوي يشمل A و $\overrightarrow{BC}$ شعاع ناظمي له

4/ المجموعة (E_4) حيث
$(E_4) = \{M/\ \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$ نقطة من الفضاء $\}$ هي سطح كرة نصف قطرها AB ومركزها منتصف القطعة $[AB]$

VII الاوضاع النسبية:

1 الوضع النسبي لمستقيمين: ليكن (Δ) و(Δ') مستقيمين في الفضاء, $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعي توجيه لهما على الترتيب:

1/ إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطيا فإن (Δ) و(Δ')
متوازيان ← توازي تام (منطبقان)
← أو توازي بانفصال

2/ إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطين خطيا فإن (Δ) و(Δ')
غير متوازيان ← متقاطعان في نقطة
← أو لا ينتميان إلى نفس المستوي

2 الوضع النسبي لمستقيم ومستوي:
(p) مستوي و $\vec{n}$ شعاع ناظمي له
(Δ)مستقيم و $\vec{u}$ شعاع توجيه له

1/ إذا كان $\vec{n}$ يعامد $\vec{u}$ فإن ← (Δ) يوازي (p)
← أو(Δ) محتوى في (p)

2/ إذا كان $\vec{n}$ لا يعامد $\vec{u}$ فإن (Δ) يقطع(p) في نقطة

3 الوضع النسبي لمستويين: ليكن (p) و(p') مستويين, $\vec{n}$ و $\overrightarrow{n'}$ أشعة ناظميه لهما على الترتيب:

1/ إذا كان $\vec{n}$ يوازي $\overrightarrow{n'}$ فإن (p) و (p')
متوازيان ← توازي تام (منطبقان)
← أو توازي بانفصال

2/ إذا كان $\vec{n}$ لا يوازي $\overrightarrow{n'}$ فإن(p) و (p') متقاطعان في مستقيم

4 الوضع النسبي لثلاث مستويات: ليكن (p) و (p')و(p'') ثلاث مستويات مختلفة مثنى مثنى
$\vec{n}$ و $\overrightarrow{n'}$ و $\overrightarrow{n''}$ أشعة ناظميه لها على الترتيب:

1/ إذا كان $\vec{n}$ يوازي $\overrightarrow{n'}$ ويوازي $\overrightarrow{n''}$ فإن:
(p) و (p') و (p'') ثلاث مستويات متوازية

2/ إذا كان $\vec{n}$ يوازي $\overrightarrow{n'}$ و لا يوازي $\overrightarrow{n''}$ فإن:
(p) و (p') متوازيان و(p'') قاطع لهما

3/ إذا كان $\vec{n}$ و $\overrightarrow{n'}$ و $\overrightarrow{n''}$ أشعة غير متوازية مثنى مثنى
فإن: ← (p) و(p') و (p'') تشترك في نقطة
← (p) و (p') و (p'') تشترك في مستقيم
← (p) و(p') و (p'') مختلفة (متقاطعة مثنى مثنى) (أو التقاطع بينها خال)

5 الوضع النسبي لمستوى وسطح كرة: (p) مستو معادلته $ax + by + cz = 0$ و(S) سطح كرة مركزها Ω ونصف قطرها R إذن:

1/ إذا كان $d(\Omega, (p)) > R$ فإن $(p) \cap (S) = \emptyset$

2/ إذا كان $d(\Omega, (p)) = R$ فإن $(p) \cap (S) = \{H\}$
حيث H هي المسقط العمودي لـ Ω على المستوي (p)

3/ إذا كان $d(\Omega, (p)) = R$ فإن $(p) \cap (S) = (C)$
حيث (C) هي دائرة مركزها H المسقط العمودي لـ Ω على المستوي (p) ونصف قطرها r حيث:
$R^2 = d^2(\Omega, (p)) + r^2$ ومنه نجد:

$$r = \sqrt{R^2 - d^2(\Omega, (p))}$$

6 الوضع النسبي لمستقيم وسطح كرة: لتكن (S) سطح كرة مركزها Ω ونصف قطرها R و (Δ)مستقيم معرف بتمثيله الوسيطي التالي:

$$(\Delta): \begin{cases} x = \alpha t + x_0 \\ y = \beta t + y_0 \\ z = \gamma t + z_0 \end{cases}$$

لدراسة الوضع النسبي لسطح كرة مع مستقيم تعوض قيم $x; y; z$ من التمثيل الوسيطي للمستقيم في معادلة سطح الكرة فنحصل على معادلة من الدرجة II مجهولها t

1/ إذا كان $\Delta < 0$ فإن $(S) \cap (\Delta) = \emptyset$

2/ إذا كان $\Delta = 0$ فإن $(S) \cap (\Delta) = \{H\}$

3/ إذا كان $\Delta > 0$ فإن $(S) \cap (\Delta) = \{H, H'\}$

الأستاذة : بلة باسي