الهندسة الفضائية

1- التمثيلات الوسيطية

أ- التمثيل الوسيطي لمستقيم:

$\overrightarrow{u}(a;b;c)$ شعاع توجيه لمستقيم (D) يشمل نقطة معلومة $A(x_A;y_A;z_A)$ و $M(x;y;z)$ نقطة كيفية منه، فإن:

$$(D):\begin{cases} x=x_A+at \\ y=y_A+bt \quad /t\in\mathbb{R} \\ z=z_A+ct \end{cases}$$

ب- التمثيل الوسيطي لمستو:

$\overrightarrow{u}(a;b;c)$ و $\overrightarrow{v}(a';b';c')$ شعاعان مستقلان خطيا من مستو (P) يشمل نقطة معلومة $A(x_A;y_A;z_A)$ و $M(x;y;z)$ نقطة كيفية منه، فإن:

$$(P):\begin{cases} x=x_A+at+a'\lambda \\ y=y_A+bt+b'\lambda \quad /t,\lambda\in\mathbb{R} \\ z=z_A+ct+c'\lambda \end{cases}$$

2- الجداء السلمي في الفضاء

أ- العبارة التحليلية للجداء السلمي:

$\overrightarrow{u}(a;b;c)$ و $\overrightarrow{v}(a';b';c')$ شعاعان من الفضاء ، فإن:

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}=aa'+bb'+cc'$$

ب- تعامد شعاعين:

$\overrightarrow{u}\perp\overrightarrow{v}$ يكافئ $aa'+bb'+cc'=0$

ج- ملاحظة:

من تعريف الجداء السلمي لدينا:

$$\cos(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})=\frac{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{u}\|.\|\overrightarrow{u}\|}$$

3- المعادلات الديكارتية

أ- المعادلة الديكارتية لمستو:

$\overrightarrow{n}(a;b;c)$ شعاع ناظمي لمستو (P) يشمل نقطة معلومة $A(x_A;y_A;z_A)$ و $M(x;y;z)$ نقطة كيفية منه، فإن: $\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{AM}$ أي: $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AM}=0$ ومنه:

$$(P): ax+by+cz+d=0$$

* يمكن وضع هذه المعادلة مباشرة دون حساب الجداء السلمي حيث a, b, c هي إحداثيات الشعاع الناظمي وللحصول على قيمة d نعوض x, y, z بإحداثيات النقطة A

ب- المعادلة الديكارتية لسطح كرة:

(S) سطح كرة مركزها $\Omega(x_0;y_0;z_0)$ ونصف قطرها r $(r\in\mathbb{R}_+^*)$ و $M(x;y;z)$ نقطة كيفية من (S) فإن:

$$(S): (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$$

بعد النشروالتبسيط ، تصبح هذه المعادلة من الشكل التالي:

$$(S): x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$$

ج- المعادلة الديكارتية لمستو مماس لسطح كرة:

(P) مستوي مماس لسطح كرة (S) مركزها $\Omega(x_0;y_0;z_0)$ في نقطة $A(x_A;y_A;z_A)$ و $M(x;y;z)$ نقطة كيفية من (P) فإن: $\overrightarrow{A\Omega}\perp\overrightarrow{AM}$ أي: $\overrightarrow{A\Omega}.\overrightarrow{AM}=0$ ومنه:

$$(x_0-x_A)(x-x_A))+(y_0-y_A)(y-y_A))+(z_0-z_A)(z-z_A))=0$$

بعد النشروالتبسيط ، نحصل على معادلة كما في 3-أ أعلاه.

* يمكن وضع هذه المعادلة مباشرة كما في 3-أ أعلاه كذلك، حيث يعتبر $\overrightarrow{A\Omega}$ شعاع ناظمي للمستوي (P)

د- ملاحظة:

ينتج المستقيم في الفضاء عن تقاطع مستويين. لذلك ليست له معادلة ديكارتية واحدة وإنما له جملة معادلتين ديكارتيين لهما. انطلاقا من هذه الجملة نحصل على تمثيل وسيطي للمستقيم.

4- المسافات

أ- المسافة بين نقطتين:

$A(x_A;y_A;z_A)$ و $B(x_B;y_B;z_B)$ نقطتان من الفضاء ، فإن:

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$$

ب- المسافة بين نقطة ومستو:

$(P): ax+by+cz+d=0$ و $A(x_A;y_A;z_A)$

لدينا: $$d(A;(P))=\frac{|ax_A+by_A+cz_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

ج- المسافة بين نقطة ومستقيم:

لا توجد علاقة تسمح مباشرة بحساب المسافة بين نقطة ومستقيم، لكن يمكن أن نستعين ببعض الحالات التالية:

الحالة 1:

H المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (D) فإن:

$$d(A;(D))=AH$$

الحالة 2:

$(P_1)\cap(P_2)=(D)$ و $(P_1)\perp(P_2)$

بعد حساب $d(A;(P_1))$ و $d(A;(P_2))$ وتطبيق مبرهنة فيثاغورس نجد:

$$d(A;(D))=\sqrt{[d(A;(P_1))]^2+[d(A;(P_2))]^2}$$

الحالة 3:

$(D)\cap(P)=\{B\}$ و $(D)\perp(P)$ و $A\in(P)$

$$d(A;(D))=AB$$

5- تذكير: المستوي المحوري-حجم رباعي وجوه

* المستوي المحوري لقطعة مستقيمة هو مستو يشمل منتصفها ويعامد حاملها.
* حجم رباعي وجوه $=\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة في الارتفاع.